Sur les transformations des séries de Fourier.

Par

R. Salem (Paris).

Soit une série de Fourier:

(1) $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par $\Omega(n)$ une fonction positive, croissante, concave, devenant infinie avec n.

Considérons la série

(2) $\frac{1}{2}a_0\Omega(0) + \Omega(1)(a_1\cos x + b_1\sin x) + \dots + \Omega(n)(a_n\cos nx + b_n \sin nx) + \dots$

Le but de cette note est de démontrer les théorèmes suivants:

Théorème I. *Si la fonction f est continue, on peut toujours trouver une fonction $\Omega(n)$ telle que la série* (2) *soit aussi la série de Fourier d'une fonction continue.*

Théorème II. *Si la fonction f est supposée seulement sommable, on peut toujours trouver une fonction $\Omega(n)$ telle que la série* (2) *soit aussi la série de Fourier d'une fonction sommable.*

Remarquons qu'un théorème analogue ne peut pas être énoncé pour les fonctions bornées. On sait en effet que si f n'est pas continue, la série (2) ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction bornée [1]).

[1]) Cf. A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Monografie Matematyczne **5** (1935), p. 100 et suivantes.

Posons pour simplifier $\frac{1}{2}a_0 = A_0 \dots a_n\cos nx + b_n \sin nx = A_n$; nous écrirons aussi f au lieu de $f(x)$.

Soit $S_n = A_0 + A_1 + \dots + A_n$ et $\sigma_n = \dfrac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$ (moyenne arithmétique de Féjer).

Si nous désignons par σ'_n la $(n+1)^{\text{ème}}$ moyenne arithmétique de Féjer de la série (2), nous avons

$$\sigma'_n - f\Omega(0) = \frac{(n+1)\Omega(0)[A_0 - f] + n\Omega(1)A_1 + (n-1)\Omega(2)A_2 + \dots + \Omega(n)A_n}{n+1},$$

ce que nous écrirons en posant $\theta_p = \dfrac{n+1-p}{n+1}\Omega(p)$:

$$\sigma'_n - \Omega(0)f = \theta_0(A_0 - f) + \theta_1 A_1 + \dots + \theta_n A_n.$$

En appliquant deux fois le théorème d'Abel et en posant

$$\Delta\theta_p = \theta_p - \theta_{p+1}, \qquad \Delta^2\theta_p = \Delta\theta_p - \Delta\theta_{p+1},$$

nous avons d'abord

$$\sigma'_n - \Omega(0)f = (S_0 - f)\Delta\theta_0 + (S_1 - f)\Delta\theta_1 + \dots + (S_{n-1} - f)\Delta\theta_{n-1} + (S_n - f)\theta_n;$$

puis, en remarquant que $\theta_{n+1} = 0$, donc $\theta_n = \Delta\theta_n$,

$$\sigma'_n - \Omega(0)f = \sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(\sigma_p - f)\Delta^2\theta_p + (n+1)(\sigma_n - f)\Delta\theta_n.$$

Le terme complémentaire s'écrit, puisque $\theta_n = \Delta\theta_n$:

$$(n+1)(\sigma_n - f)\theta_n = (\sigma_n - f)\Omega(n).$$

D'autre part, le calcul des différences secondes donne

$$\Delta^2\theta_p = \frac{n+1-p}{n+1}\Delta^2\Omega(p) + 2\Delta\left(\frac{n+1-p}{n+1}\right)\Delta\Omega(p+1) + \Delta^2\left(\frac{n+1-p}{n+1}\right)\Omega(p+2).$$

Or

$$\Delta\frac{n+1-p}{n+1} = \frac{1}{n+1} \qquad \Delta^2\left(\frac{n+1-p}{n+1}\right) = 0,$$

donc

$$\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(\sigma_p - f)\Delta^2\theta_p =$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1}\frac{n+1-p}{n+1}(p+1)(\sigma_p - f)\Delta^2\Omega(p) + \frac{2}{n+1}\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(\sigma_p - f)\Delta\Omega(p+1).$$

On peut ajouter à la première somme le terme obtenu en faisant $p=n$, à la condition de retrancher $(\sigma_n-f)\Delta^2\Omega(n)$; donc finalement [1]):

$$\sigma'_n-\Omega(0)f=\sum_{p=0}^{n}\frac{n+1-p}{n+1}(p+1)(\sigma_p-f)\Delta^2\Omega(p)+$$

$$(3)\qquad +\frac{2}{n+1}\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(\sigma_p-f)\Delta\Omega(p+1)+(\sigma_n-f)\Omega(n)-(\sigma_n-f)\Delta^2\Omega(n).$$

Démonstration du théorème I. On sait que, uniformément en x,

$$|\sigma_p-f|<\varepsilon(p),$$

$\varepsilon(p)$ tendant vers zéro pour $p=\infty$.

Soit $u(x)$ une fonction positive croissante de $x\geqslant 0$ telle que la série $\sum_0^\infty\frac{1}{u(n)}$ converge. $\Omega(y)$ sera définie pour tout $y\geqslant 0$ et satisfera aux conditions suivantes:

1⁰ $\Omega(y)$ sera positive, croissante, infinie avec y, concave (ou linéaire), et dérivable deux fois;

2⁰ On devra avoir — condition essentielle —

$$u[\Omega(n)]<\frac{1}{\varepsilon(n)};$$

3⁰ $\Omega'(y)$ sera convexe; de plus $\Omega(y)$ croissant indéfiniment avec y, $y^2\Omega'(y)$ ne reste pas bornée; nous supposerons donc sans inconvénient cette quantité croissante.

Dans ces conditions, nous avons

$$\begin{aligned} n\varepsilon(n)|\Delta^2\Omega(n)| &= n\varepsilon(n)\Big[\Omega(n+1)-\Omega(n)-[\Omega(n+2)-\Omega(n+1)]\Big]\\ &< n\varepsilon(n)[\Omega'(n)-\Omega'(n+2)]\\ &< 2n\varepsilon(n)|\Omega''(n)|=\frac{2n|\Omega''(n)|}{\Omega'(n)}\cdot\varepsilon(n)\Omega'(n).\end{aligned}$$

Comme $y^2\Omega'(y)$ croît, on a:

$$2y\Omega'(y)+y^2\Omega''(y)>0,\qquad y|\Omega''(y)|<2\Omega'(y),$$

donc

$$n\varepsilon(n)|\Delta^2\Omega(n)|<4\varepsilon(n)\Omega'(n)<\frac{4\Omega'(n)}{u[\Omega(n)]}.$$

[1]) L'idée de cette transformation est empruntée à Paley et Zygmund (cf. Zygmund, loc. cit., p. 128).

Or, la série $\sum\frac{\Omega'(n)}{u[\Omega(n)]}$ converge, comme l'intégrale

$$\int^\infty\frac{\Omega'(y)dy}{u[\Omega(y)]}=\int^\infty\frac{dz}{u(z)};$$

donc la série $\sum n\varepsilon(n)|\Delta^2\Omega(n)|$ converge; la série $\sum_0^\infty(n+1)(\sigma_n-f)\Delta^2\Omega(n)$ converge donc uniformément; et le premier terme de l'égalité (3), qui n'est autre que la moyenne arithmétique des $n+1$ premières sommes partielles de cette série, converge donc aussi uniformément vers une fonction continue de x.

Occupons-nous maintenant des autres termes de l'égalité (3). Le dernier tend uniformément vers zéro, car $n\varepsilon(n)|\Delta^2\Omega(n)|$ tend vers zéro comme terme général d'une série convergente, donc, a fortiori, $\varepsilon(n)\Delta^2\Omega(n)\to 0$.

L'avant-dernier terme tend aussi uniformément vers zéro, car $\varepsilon(n)\Omega(n)<\frac{\Omega(n)}{u[\Omega(n)]}\to 0$ à cause de la convergence de l'intégrale $\int^\infty\frac{dz}{u(z)}$, $u(z)$ étant croissante.

Reste le second terme de l'égalité (3). $\Omega(y)$ étant concave ou linéaire, $\frac{\Omega(y)-\Omega(0)}{y}$ décroît, et comme $\Omega(0)\geqslant 0$, $\frac{\Omega(y)}{y}$ décroît, d'où $y\Omega'(y)-\Omega(y)<0$, donc

$$\begin{aligned} p\,\varepsilon(p)|\Delta\Omega(p+1)| &= p\,\varepsilon(p)[\Omega(p+2)-\Omega(p+1)]\\ &< p\,\varepsilon(p)\Omega'(p)<\varepsilon(p)\Omega(p)\to 0.\end{aligned}$$

Donc la moyenne arithmétique $\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(\sigma_p-f)\Delta\Omega(p+1)$ tend aussi uniformément vers zéro, et il en est de même du second terme de l'égalité (3).

Il reste que $\sigma'_n-\Omega(0)f$, et par conséquent σ'_n, tend uniformément, pour $n=\infty$, vers une fonction continue. On sait que, dans ces conditions, la série (2) est la série de Fourier d'une fonction continue, ce qui démontre le théorème.

Cas particulier. Si la série de Fourier de f converge uniformément, la démonstration devient immédiate. On a:

$$\begin{aligned} S'_n-\Omega(0)f &= \Omega(0)[A_0-f]+\Omega(1)A_1+\ldots+\Omega(n)A_n=\\ &=(S_0-f)\Delta\Omega(0)+(S_1-f)\Delta\Omega(1)+\ldots+(S_{n-1}-f)\Delta\Omega(n-1)+(S_n-f)\Omega(n).\end{aligned}$$

Si $|S_n - f| < \varepsilon_1(n)$, il suffit de prendre $\Omega(n)$ concave, dérivable, et telle que

$$u[\Omega(n)] < \frac{1}{\varepsilon_1(n)}.$$

Dans ce cas, la série (2) converge aussi uniformément.

Exemples. Si $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α avec $\alpha < 1$, on sait que:

$$\varepsilon(n) < \frac{C}{n^\alpha}, \qquad \varepsilon_1(n) < \frac{C_1 \log n}{n^\alpha}.$$

On en déduit en prenant $u(x) = x^{1+\delta}$ $(\delta > 0)$ que la série

$$\Sigma n^{\alpha-\eta}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (\eta > 0)$$

converge uniformément. Ceci est encore vrai si $\alpha = 1$, car alors ε et ε_1 ont pour borne commune $\dfrac{B \log n}{n}$.

Si $\alpha < 1$, et si on prend $u(x) = x \log^{1+\delta} x$, on voit aisément que $\sum \dfrac{n^\alpha (a_n \cos nx + b_n \sin nx)}{\log^{1+\eta} n}$ représente une fonction continue pour $\eta > 0$ et converge uniformément pour $\eta > 1$.

Si $\alpha = 1$, la série $\sum \dfrac{n(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}{\log^{2+\eta} n}$ représente une fonction continue pour $\eta > 0$.

Si le module de continuité $\omega(\delta)$ de f est quelconque, on sait que

$$\varepsilon(n) < C\omega(1/n) |\log \omega(1/n)|$$

et on voit facilement qu'il suffit de prendre

$$\Omega(n) < \left[\frac{1}{\omega(1/n)}\right]^{1-\eta} \quad \text{ou} \quad \Omega(n) < \frac{1}{\omega(1/n) |\log \omega(1/n)|^{2+\eta}} \quad \text{avec} \quad \eta > 0.$$

Le premier de ces résultats donne incidemment le théorème suivant:

Si f admet le module de continuité $\omega(\delta)$, la série $\sum \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{[\omega(1/n)]^{2-\varepsilon}}$ converge pour $\varepsilon > 0$.

Ce théorème peut d'ailleurs se démontrer directement, en partant de l'inégalité

$$\sum_{n+1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < C\omega^2\left(\frac{1}{n}\right),$$

C étant une constante absolue, inégalité résultant de la théorie de la meilleure approximation [1]).

Démonstration du théorème II. La relation (3) donne pour $n > m$:

$$\sigma_n' - \sigma_m' = \sum_{p=0}^{m} \left[\frac{n+1-p}{n+1} - \frac{m+1-p}{m+1}\right](p+1)(\sigma_p - f)\Delta^2\Omega(p) +$$
$$+ \sum_{p=m+1}^{n} \frac{n+1-p}{n+1}(p+1)(\sigma_p - f)\Delta^2\Omega(p) +$$
$$+ \frac{2}{n+1}\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(\sigma_p - f)\Delta\Omega(p+1) - \frac{2}{m+1}\sum_{p=0}^{m-1}(p+1)(\sigma_p - f)\Delta\Omega(p+1) +$$
$$+ (\sigma_n - f)\Omega(n) - (\sigma_n - f)\Delta^2\Omega(n) - (\sigma_m - f)\Omega(m) + (\sigma_m - f)\Delta^2\Omega(m).$$

Or, si ΣA_n est une série de Fourier, on a [2])

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_p - f|\, dx < \varepsilon(p),$$

$\varepsilon(p)$ tendant vers zéro pour $p = \infty$.

D'autre part, $\dfrac{n+1-p}{n+1} - \dfrac{m+1-p}{m+1} = \dfrac{p}{m+1} - \dfrac{p}{n+1} > 0$. Donc

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n' - \sigma_m'|\, dx < \sum_{p=0}^{m}\left[\frac{n+1-p}{n+1} - \frac{m+1-p}{m+1}\right](p+1)\varepsilon(p)\Delta^2\Omega(p) +$$
$$+ \sum_{p=m+1}^{n} \frac{n+1-p}{n+1}(p+1)\varepsilon(p)\Delta^2(p) +$$
$$+ \frac{2}{n+1}\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)\varepsilon(p)\Delta\Omega(p+1) + \frac{2}{m+1}\sum_{p=0}^{m-1}(p+1)\varepsilon(p)\Delta\Omega(p+1) +$$
$$+ \varepsilon(n)\Omega(n) + \varepsilon(n)\Delta^2\Omega(n) + \varepsilon(m)\Omega(m) + \varepsilon(m)\Delta^2\Omega(m).$$

Les quatre derniers termes tendant vers zéro pour $m = \infty$, comme nous l'avons montré ci-dessus, $\Omega(n)$ était choisie en fonction de $\varepsilon(n)$ comme précédemment; les deux dernières sommes aussi.

---

[1]) Pour les résultats de cette théorie dont nous nous sommes servis, voir p. ex., de la Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation*, Paris, 1919, p. 13 25, 32 et 45.

[2]) Zygmund, loc. cit., p. 85.

Restent les deux premières sommes. On a vu que la série $\sum_0^\infty (p+1)\varepsilon(p)\Delta^2\Omega(p)$ converge. Or, les deux premières sommes équivalent ensemble à

$$K=\sum_{p=0}^{n}\frac{n+1-p}{n+1}(p+1)\varepsilon(p)\Delta^2\Omega(p)-\sum_{p=0}^{m}\frac{m+1-p}{m+1}(p+1)\varepsilon(p)\Delta^2\Omega(p),$$

c'est-à-dire à

$$\frac{\Sigma_0+\Sigma_1+\ldots+\Sigma_n}{n+1}-\frac{\Sigma_0+\Sigma_1+\ldots+\Sigma_m}{m+1}$$

où $\Sigma_j=\sum_0^j (p+1)\varepsilon(p)\Delta^2\Omega(p)$. Donc $K\to 0$ avec $m=\infty$. Donc, pour $m=\infty$, $\int_0^{2\pi}|\sigma_n'-\sigma_m'|\,dx$ tend vers zéro. Cela suffit à affirmer que $\Sigma A_n\Omega(n)$ est une série de Fourier [1]).

[1]) Zygmund, loc. cit., p. 85.

Sur un espace métrique séparable universel*)

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le premier exemple d'un espace métrique séparable U qui contient un ensemble isométrique avec tout espace métrique séparable a été donné par Paul Urysohn [1]). Or, MM. Banach et Mazur ont démontré [2]) que l'espace (C) de toutes les fonctions continues dans l'intervalle $(0\leqslant x\leqslant 1)$ avec la distance $r(f,g)$ définie par la formule

$$r(f,g)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)-g(t)|$$

(qui, comme on sait, est un espace séparable) contient aussi un ensemble isométrique avec tout espace métrique séparable. La démonstration publiée par M. Banach fait usage de la théorie des fonctionnelles linéaires. Dans le § 1 de cette Note, je donne une démonstration directe et plus élémentaire de ladite propriété de l'espace (C). Dans le § 2, je fais une comparaison des propriétés des espaces U et (C).

§ 1. M étant un espace métrique séparable donné, soit $Q=(p_1,p_2,\ldots)$ un sous-ensemble dénombrable de M dense dans M. ϱ désignant la distance dans M, posons:

$$\gamma_n(p)=\varrho(p,p_n)-\varrho(p,p_1)\qquad \text{pour } p\in Q \text{ et } n=1,2,\ldots \tag{1}$$

Vu que

$$-\varrho(p_1,p_n)\leqslant\varrho(p,p_n)-\varrho(p,p_1)\leqslant\varrho(p_1,p_n),$$

*) Cf. ma Note du 24 Avril 1940 parue dans les Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, **75**.

[1]) P. Urysohn, C. R. Paris **180**, p. 83 (séance du 16 mars 1925) et Bull. Sc. Math. 2e série, **51** (1927), p. 1-38.

[2]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne I (Warszawa 1932), p. 187.