Sur une suite infinie de fonctions de classe 1 dont toute fonction d'accumulation est non mesurable.

(Solution d'un problème de M. S. Banach).

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Nous dirons, selon M. A. Tychonoff[1]), qu'une fonction $f(x)$ de variable réelle est une *fonction d'accumulation* (Häufungsfunktion) d'une suite infinie de fonctions $f_k(x)$ $(k=1,2,...)$, s'il existe, pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout système fini $x_1, x_2, ..., x_m$ de nombres réels, une infinité de valeurs de k tels que

(1) $$|f(x_i)-f_k(x_i)|<\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad i=1,2,...,m.$$

M. Tychonoff a démontré[2]) que toute suite infinie uniformément bornée de fonctions de variable réelle admet au moins une fonction d'accumulation. M. S. Banach a posé récemment le problème, si toute suite infinie uniformément bornée de fonctions de Baire de variable réelle admet une fonction d'accumulation mesurable. Le but de cette Note est de démontrer que *la réponse au problème de M. Banach est négative.* On a ce

Théorème. *Toute fonction d'accumulation de la suite infinie de fonctions*

(2) $$f_k(x)=\mathrm{E}\,2^k x-2\,\mathrm{E}\,2^{k-1}x \qquad (k=1,2,...)$$

(où $\mathrm{E}t$ désigne le plus grand entier ne dépassant pas t) *est non mesurable.*

Démonstration. Les fonctions (2) ne prennent évidemment que les valeurs 0 et 1, et chacune d'elles a dans chaque intervalle fini un nombre fini (ou nul) de points de discontinuité.

[1]) A. Tychonoff, Math. Ann. **111** (1935), p. 762.

[2]) l. c., p. 764, Satz I et Math. Ann. **102** (1929), p. 548-550.

Soit r une fraction dyadique finie $r=p/2^q$, où p est un entier et q un nombre naturel.

Soit x un nombre réel donné. D'après (2) on trouve sans peine

(3) $$f_k(x+r)=f_k(x) \qquad \text{pour} \qquad k>q.$$

Si $f(x)$ est une fonction d'accumulation de la suite (2), on a évidemment $f(x)=0$ ou 1, et il existe une infinité des valeurs de l'indice k pour lesquelles on a

(4) $$f_k(x)=f(x) \qquad \text{et} \qquad f_k(x+r)=f(x+r).$$

Les égalités (4) se présentent donc pour un $k>q$, ce qui donne d'après (3)

(5) $f(x+r)=f(x)$ *pour tout x réel et pour toute fraction dyadique finie r.*

Soit maintenant x un nombre irrationnel. Si t est un nombre réel, mais pas un entier, on a évidemment $\mathrm{E}(-t)=-\mathrm{E}t-1$ et on en déduit selon (2) que

(6) $$f_k(1-x)=1-f_k(x)$$

pour tout x irrationnel et $k=1,2,...$

Or, $f(x)$ étant une fonction d'accumulation de la suite (2), il existe un k tel que

(7) $$f_k(1-x)=f(1-x) \qquad \text{et} \qquad f_k(x)=f(x).$$

Les formules (6) et (7) donnent

(8) $f(1-x)=1-f(x)$ *pour tout x irrationnel.*

En s'appuyant sur les propriétés connues d'ensembles mesurables, on montre sans peine, que toute fonction $f(x)$ de variable réelle ne prenant que les valeurs 0 et 1, et satisfaisant aux conditions (5) et (8), est non mesurable[3]), c. q. f. d.

Il est à remarquer qu'on peut obtenir de la suite (1) une suite infinie uniformément bornée de fonctions continues de variable réelle dont toute fonction d'accumulation est non mesurable.

[3]) Cf. p. ex. Fund. Math. **30** (1938), p. 98-99. On peut montrer aussi qu'une telle fonction ne satisfait pas à la condition de Baire relativement à la droite.