gehört. Dann sind die Elemente von v mit den Vielfachen unserer Erzeugenden identisch (St. 17). Zu jedem $w \in \mathfrak{E}$ sei mit w^* die Menge derjenigen Vielfachen c von w bezeichnet, deren Komplemente $F+c$ zu C gehören. Es gibt, wie leicht ersichtlich, $\exp \mathfrak{k}$ solche c in $\mathfrak{a}$, also auch in v. Sei D der Durchschnitt aller $F+c$, wo c einer festen Menge w^* gehört. Ist w^* unendlich, so ist, wie schon gezeigt, das D zugeordnete Ideal $\mathfrak{u}$ durch v teilbar (da ja $\mathfrak{w}$ durch v teilbar war). Das Element $F+w$ (F ist die Einheit von B) ist unmöglich durch v teilbar, da anders auch $F=(F+w)+w$ durch v teilbar wäre. Also geht $\mathfrak{u}$ nicht in $F+w$ auf. Anderseits ist jedes $c \in w^*$ durch jedes Primideal teilbar, das in w aufgeht. Da aber jedes Primideal entweder a oder $F+a$ teilen muß (da das Produkt dieser Elemente Null, also durch unser Primideal teilbar ist), muß jedes Primideal, das ein $F+c$ teilt, auch in $F+w$ aufgehen. Also kann unmöglich ein in $F+w$ nicht aufgehendes Primideal $\mathfrak{y}$ ein $F+c$ teilen. Man hat aber $h(\mathfrak{a}_g) \subset \mathfrak{y}$ für ein passendes $g \in F$. Wäre $g \in c$, so wäre $c \, non \in \mathfrak{y}$, also $F+c \in \mathfrak{y}$. Folglich ist $g \, non \in c$ für alle c, also $g \in D$. Demnach ist $F+w$ durch $\mathfrak{u}$ teilbar, was wir schon als unmöglich eingesehen haben. Also sind alle w^* endlich.

Wir haben so die Menge von $\exp \mathfrak{k}$ Elementen c in endliche Schubfächer w^* eingeteilt. Also ist die Anzahl der letzteren, also auch die Anzahl unserer Erzeugenden wenigstens $\exp \mathfrak{k}$, w. z. b. w.

Die hier geschilderte Methode kann in der Weise verallgemeinert werden, daß man unser Q durch modifizierte Konstruktionen ersetzt, wie sie z. B. in meiner unter [3]) zitierten Arbeit (Theorem X) angegeben wurden. Die weiteren algebraischen Züge bleiben etwa dieselben als die hier angegebenen.

Sur les fonctions analytiques de deux variables complexes.

Par

S. Bergmann et J. Marcinkiewicz (Paris).

§ 1. Dans la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe, on peut se borner souvent à l'étude des fonctions analytiques dans le cercle-unité. En effet, la fonction $f(z)$ étant régulière dans n'importe quel domaine simplement connexe, on peut le ramener à un cercle par une transformation conforme.

Il n'y a rien de semblable dans la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes, de sorte que non seulement les difficultés, mais aussi les résultats mêmes des recherches dépendent d'une manière extrêmement étroite du domaine dans lequel ces fonctions sont considérées. On peut donc ou bien envisager les classes les plus vastes de ces domaines et chercher d'y établir les théorèmes les plus généraux, donc faibles, ou bien partir des domaines d'une structure spéciale, notamment telle qu'il soit possible de reproduire pour eux quelques procédés de la théorie des fonctions d'une variable complexe et, utilisant ces procédés, d'établir quelques théorèmes aussi forts que possible.

La deuxième méthode nous semble utile dans différentes recherches concernant le comportement des fonctions analytiques de deux variables complexes à la frontière du domaine de leur existence, p. ex. lorsqu'il s'agit de généraliser les théorèmes du type de Fatou. Pour étudier ces questions, nous considérons le cas des *domaines possédant une surface remarquable* [1]), c. à d. tels qu'à leur frontière (à 3 dimensions) se trouve située une surface (à 2 dimensions), qui joue un rôle analogue à celui de la courbe frontière des domaines plans dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

[1]) Bergmann [2].

La méthode utilisée est basée:

1⁰ sur la possibilité de présenter chaque domaine envisagé comme l'ensemble-somme de domaines qui sont des images pseudo-conformes de bicylindres et dont les surfaces remarquables sont situées à la frontière du domaine considéré [2]),

2⁰ sur l'application des procédés des évaluations maximales de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe à l'étude des fonctions dans les domaines qui sont des images pseudo-conformes d'un bicylindre.

Pour mieux faire ressortir les principes de cette méthode, nous nous bornerons à une classe assez spéciale de domaines d'existence, à savoir aux domaines ayant une surface remarquable.

Commençons par quelques notions auxiliaires.

Nous appelons un domaine D de deux variables complexes *domaine de type* **R**, ou plus brièvement *domaine* **R**, si les conditions suivantes sont vérifiées:

(A) La frontière du domaine D est donnée par les relations:

$$z_1=h(z_2,\lambda) \quad (0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi), \quad |z_2|\leqslant 1,$$
$$z_1=sh(z_2,\lambda) \quad (0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi, s\leqslant 1), \quad z_2=e^{i\varphi_2},$$

où $h(z_2,0)=h(z_2,2\pi)$ et, pour tout λ fixe, $h(z_2,\lambda)$ est une fonction analytique de z_2 et satisfait aux inégalités:

(1.1) $$\min_{z_2,\lambda}|h(z_2,\lambda)|\geqslant\Delta>0,$$

(1.2) $$1/M\leqslant|h'_\lambda(z_2,\lambda)|\leqslant M<\infty, \qquad h'_\lambda=dh/d\lambda.$$

(B) Etant donnée l'équation

(1.3) $$\varrho=\varrho(\omega)=\varrho(z_2,\omega)$$

en coordonnées polaires de la courbe $z_1=h(z_2,\lambda)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi,\ z_2$ fixé), ϱ est uniforme et on a:

(1.4) $$|d\varrho/d\omega|\leqslant M, \qquad |d^2\varrho/d\omega^2|\leqslant M,$$

où M désigne une constante absolue et ω une fonction de λ telle que

(1.5) $$1/M\leqslant|d\omega/d\lambda|\leqslant M.$$

Remarquons que la surface

$$z_1=h(z_2,\lambda), \quad z_2=e^{i\varphi_2} \quad (0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi_2\leqslant 2\pi)$$

forme la surface remarquable du domaine D.

[2]) Bergmann [1].

Etant donnée une fonction continue $f(\lambda,\varphi_2)$ de deux variables λ et φ_2, nous désignons:

par $F(z_1,\varphi_2)$ la fonction harmonique dans le domaine borné par la courbe $z_1=h(e^{i\varphi_2},\lambda)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi)$ et telle que $F(z_1,\varphi_2)=f(\lambda,\varphi_2)$ pour $z_1=h(e^{i\varphi_2},\lambda)$,

par $U(\varphi_1,\varphi_2)$ la valeur de la fonction F dans le point $z_1=\Delta e^{i\varphi_1}$.

Les parties: réelle et imaginaire seront désignées respectivement par Re et Im.

Nous dirons que la fonction continue et périodique $f(\lambda,\varphi_2)$ vérifie la condition **N** [3]) si l'on a:

(1.6) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi_1,\varphi_2)\cos(m\varphi_1-n\varphi_2)\,d\varphi_1\,d\varphi_2=0 \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi_1,\varphi_2)\sin(m\varphi_1-n\varphi_2)\,d\varphi_1\,d\varphi_2=0 \qquad (m,n=1,2,\ldots).$$

La fonction $f(\lambda,\varphi_2)$ sera appelée *de classe* L^p $(p\geqslant 1)$ si l'on a

(1.7) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\lambda,\varphi_2)|^p\,d\lambda\,d\varphi_2<\infty;$$

nous dirons qu'elle vérifie la *condition* **N** si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction continue et périodique $g(\lambda,\varphi_2)$ satisfaisant à cette condition et à la condition suivante:

(1.8) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\lambda,\varphi_2)-g(\lambda,\varphi_2)|^p\,d\lambda\,d\varphi_2\leqslant\varepsilon.$$

Nous dirons qu'une fonction analytique $F(z_1,z_2)$ régulière dans un domaine D de type **R** appartient à la *classe* H_p $(p\geqslant 1)$ si l'on a

(1.9) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F\left(s_1h(s_2e^{i\varphi_2},\lambda),s_2e^{i\varphi_2}\right)\right|^p d\lambda\,d\varphi_2\leqslant M<\infty$$

dès que le domaine $D_{s_1s_2}$ dont la frontière est

(1.10) $$z_1=s_1h(s_2z_2,\lambda) \quad |z_2|\leqslant 1, \qquad |z_1|\leqslant s|h(s_2e^{i\varphi_2},\lambda)|, \quad z_2=s_2e^{i\varphi_2} \qquad (0\leqslant s\leqslant s_1)$$

est contenu dans D.

[3]) Bergmann [1], en particulier p. 613.

Enfin, nous désignerons par $E(\lambda,\varphi_2,\alpha)$ la partie commune de D et du domaine défini par les inégalités:

$$|\arg(z_2+e^{i\varphi_2})-\varphi_2|\leqslant\alpha,\qquad |\arg\big(z_1+h(z_2,\lambda)\big)-\beta(z_2,\lambda)|\leqslant\alpha, \tag{1.11}$$

où $\beta(z_2,\lambda)$ désigne la direction de la normale extérieure à la courbe $z_1=h(z_2,\lambda)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi)$ au point $z_1=h(z_2,\lambda)$.

Le résultat principal du notre travail est le suivant

Théorème 1. *Soient D un domaine* $\mathbf{R}$ *et $F(z_1,z_2)$ une fonction de la classe H_p (où $p>1$). Pour presque tout point (λ,φ_2), la limite*

$$\begin{gathered} f(\lambda,\varphi_2)=\lim F(z_1,z_2)\\ \textit{pour}\quad (z_1,z_2)\to\big(h(e^{i\varphi_2},\lambda),e^{i\varphi_2}\big)\quad\textit{et}\quad (z_1,z_2)\in E(\lambda,\varphi_2,\alpha)\qquad(\alpha<\pi/2)\end{gathered} \tag{1.12}$$

existe et on a

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\lambda,\varphi_2)|^p\,d\lambda\,d\varphi_2<\infty. \tag{1.13}$$

On a aussi le théorème suivant que nous allons établir d'abord:

Théorème 2. *Soit $f(\lambda,\varphi_2)$ une fonction de classe L^p (où $p>1$) vérifiant la condition* **N.** *Il existe alors une fonction $F(z_1,z_2)$ de classe H_p satisfaisant pour presque tout point (λ,φ_2) à la condition*

$$\begin{gathered} \lim \operatorname{Re}[F(z_1,z_2)]=f(\lambda,\varphi_2)\\ \textit{pour}\quad (z_1,z_2)\to\big(h(e^{i\varphi_2},\lambda),e^{i\varphi_2}\big)\quad\textit{et}\quad (z_1,z_2)\in E(\lambda,\varphi_2,\alpha)\qquad(\alpha<\pi/2).\end{gathered} \tag{1.14}$$

Le cas le plus intéressant du th. 1 est celui où la fonction $F(z_1,z_2)$ est bornée dans tout le domaine D. Ce cas présente une généralisation directe du théorème de Fatou.

§ 2. ***Lemme 1.*** *Soit $f(\varphi)$ une fonction, de période 2π, définie dans l'intervalle $\langle 0,2\pi\rangle$ et satisfaisant à la condition*

$$\int_0^{2\pi}|f(\varphi)|^p\,d\varphi<\infty\qquad (p>1). \tag{2.1}$$

Alors, en posant

$$f^*(\varphi)=\max_h\frac{1}{h}\int_{-h}^{+h}|f(\varphi+u)|\,du, \tag{2.2}$$

on a

$$\int_0^{2\pi}f^{*p}(\varphi)\,d\varphi\leqslant A_p\int_0^{2\pi}|f(\varphi)|^p\,d\varphi, \tag{2.3}$$

où A_p ne dépend que de p.

Ce lemme est connu [4]).

Lemme 2. *La fonction $f(\varphi)$ vérifiant les hypothèses du lemme 1, posons:*

$$f(\varphi)\sim\frac{a_0}{2}+\sum^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi), \tag{2.4}$$

$$U(r,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty}r^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi), \tag{2.5}$$

$$U^*(\varphi)=\max_{|\omega-\varphi|\leqslant k(1-r)<\pi/2}|U(r,\omega-\varphi)|. \tag{2.6}$$

On a alors

$$U^*(\varphi)\leqslant Af^*(\varphi)\qquad\big(A=A(k)\big). \tag{2.7}$$

Ce lemme est aussi connu [5]) et se démontre comme il suit. Nous pouvons toujours admettre que $\varphi=0$. On a

$$U(r,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\omega)\frac{(1-r^2)\,d\omega}{(1-r)^2+4r\sin^2\dfrac{0-\omega}{2}},$$

ce qui donne

$$|U(r,0)|\leqslant\frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\omega)|\frac{(1-r)\,d\omega}{(1-r)^2+\omega^2}=\frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\ldots+\frac{A}{2\pi}\int_0^{\pi}\ldots=B_1+B_2.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$B_2=\frac{A}{2\pi}F(\omega)\frac{1-r}{(1-r)^2+\omega^2}\bigg|_0^{\pi}+\frac{A}{2\pi}\int_0^{\pi}F(\omega)\frac{2(1-r)\,\omega\,d\omega}{[(1-r)^2+\omega^2]^2} \tag{2.8}$$

où

$$F(\omega)=\int_0^{\omega}|f(\varphi)|\,d\varphi.$$

Or, $F(\omega)\leqslant\omega f^*(0)$, d'où selon (2.8)

$$B_2\leqslant Af^*(0)+Af^*(0)\int_0^{\pi}\frac{(1-r)\,\omega^2\,d\omega}{[(1-r)^2+\omega^2]^2}\leqslant 3Af^*(0). \tag{2.9}$$

Un raisonnement analogue donne $B_1\leqslant 3Af^*(0)$, ce qui démontre l'inégalité (2.7).

[4]) Hardy et Littlewood [4]. [5]) ibidem.

§ 3. ***Lemme 3.*** *Soit G un domaine borné par la courbe Γ dont l'équation en coordonnées polaires est*

(3.1) $$\varrho = \varrho(\omega) \qquad (0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi).$$

Supposons qu'on a:

(3.2) $$|\varrho'(\omega)| \leqslant K, \qquad |\varrho''(\omega)| \leqslant K \qquad (0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi),$$

(3.3) $$\min_{0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi} \varrho(\omega) = \lambda > 0.$$

Il existe alors un $r = r(\lambda, K)$ tel que tout cercle de rayon r, tangent à la courbe Γ et dont le centre se trouve dans G, est entièrement contenu dans G.

Considérons p. ex. le point $\omega = 0$. D'après (3.2), on a

(3.4) $$\varrho = \varrho(0) + a\omega + b\omega^2,$$

où $a = \text{const.}$, $b = b(\omega)$, $|a| \leqslant K$ et $|b| \leqslant K$. Il en résulte que la courbe Γ_1 dont l'équation est

(3.5) $$\varrho = \varrho(0) + a\omega - K\omega^2$$

se trouve dans G. Désignons par P le point $\omega = 0$, $\varrho = \varrho(0)$ et par K_r la circonférence tangente au point P à la courbe Γ_1 et dont le centre C est situé sur la normale intérieure de la courbe Γ_1 au point P. Soit r le rayon de K_r. Désignons le point $\varrho = 0$ par O et posons $x = \sphericalangle POC$. L'équation de K_r est évidemment:

(3.6) $$\tilde{\varrho}^2 + d^2 - 2\tilde{\varrho} d \cos(\omega - x) = r^2, \qquad (\tilde{\varrho}(0) = \varrho(0)),$$

où d désigne la longueur du segment OC. L'équation (3.6) donne:

(3.7) $$\tilde{\varrho}'(0) = \frac{\tilde{\varrho}(0) d \sin x}{\tilde{\varrho}(0) - d\cos x} = a,$$

(3.8) $$\tilde{\varrho}''(\omega) = -\frac{\tilde{\varrho} d \cos(\omega - x)}{\tilde{\varrho} - d\cos(\omega - x)} - \frac{\tilde{\varrho}' d^2 \sin(\omega - x)\cos(\omega - x)}{\tilde{\varrho} - d\cos(\omega - x)} + \\ + \frac{\tilde{\varrho} d^2 \sin^2(\omega - x)}{[\tilde{\varrho} - d\cos(\omega - x)]^2}.$$

L'expression $\tilde{\varrho}(0) - d\cos x$ désigne la longueur de la projection du segment CP sur l'axe $\omega = 0$. Elle est donc égale à

$$r\sqrt{\frac{\tilde{\varrho}^2(0)}{\tilde{\varrho}^2(0) + a^2}} = ra \qquad \text{où} \qquad a = \operatorname{tg} \sphericalangle POC.$$

D'autre part, pour $\eta = \eta(K, \lambda)$ suffisamment petit et pour $|\omega| < r\eta$, on a $|\tilde{\varrho} - \tilde{\varrho}(0)| \leqslant \frac{1}{3} ra$, $|d\cos(\omega - x) - d\cos x| \leqslant \frac{1}{3} ra$ et comme on a aussi $|x| \leqslant \pi r/\lambda$, on trouve facilement pour $|\omega| < \eta r$

$$\tilde{\varrho}''(\omega) = -\frac{\tilde{\varrho}(0)\sqrt{\tilde{\varrho}^2(0) + a^2}}{r} + A,$$

où A est uniformément borné pour $|\omega| \leqslant \eta r$, $|a| \leqslant K$, $\varrho(0) \geqslant \lambda$ et $r < \lambda/2$. Il en vient pour l'équation de K_r

$$\tilde{\varrho}(\omega) = \tilde{\varrho}(0) + a\omega - \tfrac{1}{2}\omega^2 \left[\frac{\tilde{\varrho}(0)\sqrt{\tilde{\varrho}^2(0) + a^2}}{2r} + A\right].$$

En choisissant r suffisamment petit, on voit qu'il existe un secteur de K_r qui se trouve entièrement dans G. Pour achever la démonstration, il suffit d'inscrire dans ce secteur le cercle tangent à Γ_1 au point P.

Lemme 4. *G et Γ vérifiant les hypothèses* (3.1)-(3.3), *il existe un $r = r(\lambda, K)$ tel que tout cercle de rayon r, tangent à Γ et dont le centre est situé sur la normale extérieure, se trouve situé en dehors de G.*

La démonstration est analogue à celle du lemme 3.

Lemme 5. *G et Γ vérifiant* (3.1) *où*

(3.9) $$|\varrho'(\omega)| \leqslant K,$$

(3.10) $$\min_{0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi} \varrho \geqslant \lambda > 0,$$

soit $\Phi(z)$ la fonction effectuant une représentation conforme du domaine G sur le cercle unité. Alors, pour un nombre quelconque $\Delta > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ ne dépendant que de Δ, K et λ, et tel que

(3.11) $$\min_{z \in \Gamma} |z_0 - z| \geqslant \Delta \qquad \textit{entraîne} \qquad \min_{z \in \Gamma} |\Phi(z) - \Phi(z_0)| \geqslant \delta.$$

En effet, dans le cas contraire, il existerait:

1° une suite infinie de domaines G_n, bornés par les courbes Γ_n aux équations $\varrho = \varrho_n(\omega)$ assujetties à (3.9) et (3.10), les courbes Γ_n convergeant uniformément vers la courbe Γ [6]) de manière que les fonctions $\Phi_n(z)$, correspondantes à Γ_n, convergent uniformément dans tout domaine intérieur à G.

2° une suite de points z_n tels que:

$$\min_{z \in \Gamma_n} |z_n - z| \geqslant \Delta, \qquad \min_{z \in \Gamma_n} |\Phi_n(z_n) - \Phi_n(z)| \leqslant 1/n, \qquad \lim_{n \to \infty} z_n = z_0.$$

[6]) c. à d. $\varrho_n(\omega)$ convergeant uniformément vers $\tilde{\varrho}(\omega)$.

Or, il est facile de voir que l'on aurait alors $\Phi(z_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(z_n)$ et $|\Phi(z_0)|=1$, ce qui est impossible, la fonction $\Phi(z)$ donnant par hypothèse la représentation conforme de G sur le cercle-unité.

Lemme 6. *G et Γ vérifiant* (3.1)-(3.3), *soit $\Phi(z)$ la fonction donnant une représentation conforme du domaine G sur le cercle-unité, de manière que $\Phi(0)=0$. Alors, la dérivée $\Phi'(z)$ est continue dans le domaine fermé $G+\Gamma$ et on a $0<|\Phi'(z)|<\infty$ pour tout $z\in G+\Gamma$.*

Ce lemme est connu [7]).

Lemme 7. *Dans les mêmes hypothèses on a*

$$1/M\leqslant|\Phi'(z)|\leqslant M \quad \textit{pour tout} \quad z\in G+\Gamma, \tag{3.12}$$

où M est une constante qui ne dépend que de K et λ.

Il est difficile de dire si ce lemme a été jamais publié explicitement. En tout cas, on pourrait l'obtenir en modifiant en peu les démonstrations connues [8]). Comme il est pour nous très important, nous en donnons ici la démonstration complète.

Remarquons d'abord que, en vertu du lemme 6 et les principes de minimum et de maximum, il suffit de démontrer (3.12) pour $z\in\Gamma$. Soit p. ex. z_1 le point $\omega=0$, $\varrho=\varrho(0)$. D'après le lemme 3, il existe un nombre $r=r(\lambda,K)$ tel que le cercle K de rayon r, tangent à Γ au point z_1, se trouve entièrement dans G. Soit z_0 le centre de K. Désignons respectivement par $F(z)$ et $H(z)$ les fonctions représentant conformément les domaines G et K sur le cercle-unité de manière que l'on ait $F(z_0)=H(z_0)=0$ et $F(z_1)=H(z_1)=1$.

D'après le principe de maximum, on a pour $z\in K$

$$\lg|F(z)|\leqslant\lg|H(z)|,$$

ce qui donne évidemment

$$\frac{d}{dn}\lg|F(z_1)|\leqslant\frac{d}{dn}\lg|H(z_1)|=-\frac{1}{r},$$

où $\dfrac{d}{dn}$ désigne la dérivée prise dans la direction de la normale intérieure. On voit facilement que $\dfrac{d}{dn}\lg|F(z_1)|=F'(z_1)$, ce qui donne

$$|F'(z_1)|\geqslant 1/r. \tag{3.13}$$

[7]) Kellog [6].

[8]) Warschawski [9], Lichtenstein [7].

La fonction

$$\Phi(z)=e^{i\theta}\frac{F(z)-F(0)}{1-F(z)\overline{F}(0)}$$

donne la répresentation conforme du domaine D sur le cercle unité et l'on a $\Phi(0)=0$. D'autre part, on peut choisir θ de manière que l'on ait $\Phi(z_1)=1$. Il vient

$$\Phi'(z_1)=e^{i\theta}\frac{F'(z_1)\,[1-|F(0)|^2]}{[1-\overline{F}(0)]^2},$$

ce qui donne d'après (3.14) et lemme 5

$$|\Phi'(z_1)|\geqslant\frac{1}{4r}(1-|F(0)|^2)=\frac{1}{4r}(1-|\Phi(z_0)|^2)\geqslant\frac{\delta(r,\lambda,K)}{4r},$$

et le côté gauche de l'inégalité (3.12) se trouve établi. On en démontre le côté droit d'une manière tout à fait analogue, mais en se servant du lemme 4 au lieu du lemme 3.

Lemme 8. *Dans les hypothèses du lemme 6, posons:*

$$\arg\Phi(z)=\theta \quad \textit{où} \quad z\in\Gamma, \quad \arg z=\omega.$$

Désignons par D_θ le domaine contenu dans le cercle-unité et vérifiant l'inégalité

$$|\arg Z-\theta|\leqslant\varkappa(1-|Z|)<\pi/2,$$

par I le segment $y=x\,\mathrm{tg}\,\omega$, $\varrho\leqslant\varrho(\omega)$, où x et y désignent les coordonnées cartésiennes, et par C_θ l'image de I.

Il existe alors, pour un $\varkappa$ convenablement choisi, un $R=R(K,\lambda)<1$ tel que la courbe C_θ est contenue dans $D_\theta+K_R$, où K_R désigne le cercle $|z|\leqslant R$.

En tenant compte de (3.2) et (3.3), on conclut qu'il existe un nombre N ne dépendant que de K et λ, et tel que

$$|z_0-\varrho(\arg z_0)\,e^{i\arg z_0}|\leqslant N\min_{z_1\in\Gamma}|z_0-z_1|.$$

D'autre part, (3.12) donne pour tout couple z_1,z_2 de points de G

$$M|z_1-z_2|>|\Phi(z_1)-\Phi(z_2)|>\frac{1}{M}|z_1-z_2|,$$

d'où l'inégalité $|\Phi(z_1)-\Phi(z_0)|\geqslant\dfrac{1}{M^2N}[1-|\Phi(z_0)|]$ où $z_1\in\Gamma$ et $z\in I$.

La dernière formule entraîne sans difficulté la thèse du lemme.

Lemme 9. *G et Γ vérifiant les conditions* (3.1)-(3.3), *soient $f(\omega)$ une fonction de classe L^p où $p>1$, et $F(z)$ une fonction harmonique dans G satisfaisant presque partout à la condition $F(\varrho e^{i\omega})=f(\omega)$.*

Alors, en posant

$$F^*(\omega)=\max_{0\leqslant\varrho\leqslant\varrho(\omega)}|F(\varrho e^{i\omega})|,$$

on a

$$\int_0^{2\pi}\{F^*(\omega)\}^p\,d\omega\leqslant A\int_0^{2\pi}|f(\omega)|^p\,d\omega$$

où la constante A ne dépend que de p, K et λ.

C'est une conséquence immédiate des lemmes 1, 2 et 8.

§ 4. La partie réelle $U(z_1,z_2)$ d'une fonction analytique $F(z_1,z_2)$ de deux variables complexes $z_1=x_1+iy_1$ et $z_2=x_2+iy_2$ satisfait aux équations:

(4.1) $$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2}=0,$$ (4.2) $$\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2}=0,$$

(4.3) $$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y_1\,\partial y_2}=0,$$ (4.4) $$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial y_2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x_2\,\partial y_1}=0.$$

Une fonction $U(z_1,z_2)$ qui satisfait aux équations (4.1) et (4.2) s'appelle *doublement harmonique* [9]); si elle satisfait aussi aux équations (4.3) et (4.4), on l'appelle *biharmonique*.

Lemme 10. *Soit $U(z_1,z_2)$ une fonction doublement harmonique dans un domaine D et biharmonique dans un sous-domaine D' de D tel que toute intersection $z_2=\mathrm{const.}$ contient un cercle situé dans le domaine D'. Alors, la fonction $U(z_1,z_2)$ est biharmonique dans le domaine D tout entier.*

Considérons la fonction

$$H(z_1,z_2)=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y_1\,\partial y_2}.$$

Elle est une fonction harmonique de z_1 pour tout z_2 fixe. Or, comme elle s'annule dans un cercle du plan $z_2=\mathrm{const.}$, elle s'annule identiquement dans D.

L'équation (4.4) se démontre d'une manière analogue.

[9]) Bergmann [1].

§ 5. $f(\lambda,\varphi_2)$ étant une fonction de classe L^p $(p>1)$, soit $F(z_1,\varphi_2)$ une fonction harmonique dans le domaine G_{φ_2} borné par la courbe Γ_{φ_2} $z_1=h(e^{i\varphi_2},\lambda)$ et qui admet $f(\lambda,\varphi_2)$ comme fonction frontière [10]). Soit $u(\varphi_1,\varphi_2)$ la valeur de la fonction $F(z_1,\varphi_2)$ au point $z_1=\varDelta e^{i\varphi_1}$, où $\varDelta$ satisfait à (1.1). On conclut du lemme 9 que $u\,\epsilon\,L^p$, ce qui permet de définir à l'aide de l'intégrale de Poisson une fonction $U(z_1,z_2)$ doublement harmonique dans le bicylindre $|z_2|<1$, $|z_1|<\varDelta$; désignons-le par B.

En supposant la condition **N** satisfaite, la fonction $U(z_1,z_2)$ est biharmonique. A plus forte raison elle est biharmonique dans le domaine D_{s_0} dont la frontière est:

$$z_1=s_0h(z_2,\lambda),\quad |z_2|\leqslant 1,\qquad z_1=sh(e^{i\varphi_2},\lambda),\quad z_2=e^{i\varphi_2}$$

où $0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi$, $0\leqslant s\leqslant s_0$ et s_0 est si petit que $|s_0h(z,\lambda)|<\varDelta$. La famille des courbes $\Gamma_{z_2}(s_0)$, $z_1=s_0h(z_2,\lambda)$, $z_2=\mathrm{const.}$ vérifie les conditions (1.1) et (1.4). Il existe donc un r satisfaisant à la thèse du lemme 3. Fixons $\lambda=\lambda_0$ et s_1 tel que $s_0<s_1\leqslant 1$; considérons la transformation [11]):

(5.1) $$z_1'=\frac{z_1-s_1h(z_2,\lambda_0)}{ih_\lambda'(z_2,\lambda_0)},\qquad z_2'=z_2.$$

Par (5.1) le domaine D_{s_1} se transforme en un domaine D'_{s_1} et — comme on le vérifie facilement — cette transformation conserve les conditions (1.1) et (1.4), et même d'une façon uniforme par rapport aux constantes K et $\varDelta$. Désignons:

par $\Gamma_{z_2}(s_1)$ la courbe $z_1=s_1h(z_2,\lambda)$, $z_2=\mathrm{const.}$
par $C_{\lambda_0}(s_1)$ la courbe $z_1=s_1h(z_2,\lambda_0)$, $y_2=\mathrm{Im}\,z_2=\mathrm{const.}$
par $\Gamma'_{z_2}(s_1)$ et $C'_{\lambda_0}(s_1)$ respectivement les courbes s'obtenant de $\Gamma_{z_2}(s_1)$ et $C_{\lambda_0}(s_1)$ par la transformation (5.1).

On voit aisément que $C'_{\lambda_0}(s_1)$ coïncide avec la droite $z_1'=0$, $y_2'=\mathrm{Im}\,z_2=\mathrm{const.}$ et que la direction de la normale à la courbe $\Gamma_{z_2}(s_1)$ au point z_1' est celle de l'axe $\mathrm{Im}\,z_1'=0$. Il en résulte que le domaine D'_{s_1} contient un bicylindre $B_r'(\lambda_0)$ de la forme $|z_1'+r|\leqslant r$, $|z_2'|\leqslant 1$. Posons:

$$v(\psi_1,\psi_2)=U(z_1',\varphi_2),\qquad |z'+r|=r,\qquad \psi_1=\arg(z_1'+r)\ \text{et}\ \psi_2=\varphi_2.$$

En tenant compte du lemme 9, on conclut facilement que $v\,\epsilon\,L^p$, ce qui permet de définir dans $B_r'(\lambda_0)$ une fonction doublement harmonique $V(z_1',z_2')$ admettant v comme fonction frontière.

[10]) Bergmann [1].
[11]) Bergmann [3].

Si s_1 est suffisamment proche de s_0, le domaine $D'_{s_0}\cdot B'_r(\lambda_0)$ contient tout un bicylindre. Il en résulte que la fonction $V(z'_1, z'_2)$ ainsi définie dans le domaine $B'_r(\lambda_0)$ peut être considérée comme le prolongement de la fonction $U(z'_1, z'_2)$ sur $B'_r(\lambda_0)$. Le lemme 10 montre donc qu'elle est biharmonique dans le domaine $D'_{s_0}+B'_r(\lambda_0)$.

En effectuant la représentation inverse à (5.1), on obtient la fonction biharmonique définie dans le domaine $D_{s_0}+B_r(\lambda_0)$ où $B_r(\lambda_0)$ désigne le transformé de $B'_r(\lambda_0)$. Maintenant, on peut choisir une suite $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de manière que le domaine $D_{s0}+B_{\lambda_0}+B_{\lambda_1}+\ldots+B_{\lambda_n}$ contienne un domaine $D_{s'}$ où $s'>s_0$. Cette méthode permet ainsi de définir la fonction $U(z_1, z_2)$ dans un domaine plus grand et on prouve facilement que $s'-s_0$ est d'ordre de grandeur de r. On peut donc définir une suite infinie $D_{s_0}, D_{s_1}, D_{s_2}, \ldots$ de domaines croissants, de manière que D_{s_k} tende vers D et que l'on puisse passer d'un domaine à l'autre en répétant les opérations décrites.

Lemme 11. *La fonction $U(z_1, z_2)$ ainsi définie est de classe H_p dans D.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 9 (appliqué deux fois).

§ 6. ***Lemme 12.*** *$f(\varphi_1, \varphi_2)$ étant une fonction de classe L^p où $p>1$, posons*

$$f^*(\varphi_1, \varphi_2)=\max_{hk}\frac{1}{hk}\int_{-h}^{+h}\int_{-k}^{+k}|f(\varphi_1+u_1, \varphi_2+u_2)|\,du_1\,du_2. \tag{6.1}$$

On a alors

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{f^*(\varphi_1, \varphi_2)\}^p\,d\varphi_1\,d\varphi_2\leqslant A_p\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\varphi_1, \varphi_2)|^p\,d\varphi_1\,d\varphi_2. \tag{6.2}$$

Ce lemme est connu [12]).

Lemme 13. *$f(\varphi_1, \varphi_2)$ étant une fonction de classe L^p où $p>1$ et $U(z_1, z_2)$ une fonction doublement harmonique dans le bicylindre $|z_1|<1$, $|z_2|<1$, admettant $f(\varphi_1, \varphi_2)$ comme la fonction frontière, posons:*

$$U^*(\varphi_1, \varphi_2)=\max|U(z_1, z_2)| \qquad \textit{pour} \qquad |\arg z_i-\varphi_i|\leqslant k(1-r_i)\leqslant\pi/2$$

où $i=1,2$ et k est une constante. On a alors

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{U^*(\varphi_1, \varphi_2)\}^p d\varphi_1\,d\varphi_2\leqslant A_p\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\varphi_1, \varphi_2)|^p\,d\varphi_1\,d\varphi_2 \qquad (p>1) \tag{6.3}$$

Ce lemme est aussi connu [13]) et se démontre de la même manière que le lemme 2.

[12]) Jessen, Marcinkiewicz et Zygmund [5]. [13]) ibidem.

Lemme 14. *Soit $\Gamma(\varphi_2)$ une famille de courbes dans le plan z aux équations $z=h(\lambda, \varphi_2)$ où $0\leqslant\lambda\leqslant2\pi$, bornant les domaines $G(\varphi_2)$. Supposons qu'en les écrivant en coordonnées polaires*

$$\varrho=\varrho(\varphi_1)=\varrho(\varphi_1, \varphi_2) \qquad \textit{où} \qquad \varphi_1=\arg z,$$

on a

$$\left|\frac{d\varrho}{d\varphi_1}\right|\leqslant K, \qquad \left|\frac{d^2\varrho}{d\varphi_1^2}\right|\leqslant K, \qquad \min_{\varphi_1,\varphi_2}\varrho\geqslant\Delta>0$$

et que λ est une fonction croissante de φ_1 (avec φ_2 fixe) pour laquelle

$$\frac{1}{M}\leqslant\left|\frac{d\lambda}{d\varphi_1}\right|\leqslant M, \qquad \varphi_1(0)=0. \tag{6.4}$$

Soient:

$U(z, \varphi_2)$ la fonction harmonique dans le domaine $G(\varphi_2)$ limité par la courbe $\Gamma(\varphi_2)$ et $f(\lambda, \varphi_2)$ sa fonction frontière;

K_r le cercle de rayon $r<\Delta/2$ satisfaisant à la thèse du lemme 3, situé dans le domaine $G(\varphi_2)$ et tangent à la courbe $\Gamma(\varphi_2)$ au point $z_1=h(0, \varphi_2)$;

z_0 le centre de K_r,

$$\psi=\psi(z)=\arg(z-z_0)-\arg(z_1-z_0),$$

$$V(\psi, \varphi_2)=U(z, \varphi_2), \qquad |z-z_0|=r, \qquad \psi=\psi(z).$$

Enfin, posons

$$U^*(\lambda, \varphi_2)=\operatorname*{borne\,sup}_{z\in I_\lambda}|U(z, \varphi_2)|$$

où I_λ désigne le segment joignant les points 0 et $z=h(\lambda, \varphi_2)$.

Alors on a

$$\operatorname*{borne\,sup}_{h,k}\frac{1}{hk}\int_{-h}^{+h}\int_{-k}^{+k}|V(\psi, \varphi_2+\varphi)|\,d\psi\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant A\operatorname*{borne\,sup}_{h,k}\frac{1}{hk}\int_{-h}^{h}\int_{-k}^{k}U^*(\lambda, \varphi_2+\varphi)\,d\lambda\,d\varphi$$

où A ne dépend que de K, M et Δ.

Il est facile de voir qu'il existe un nombre $\delta>0$ tel que ψ soit, pour $|\psi|<\delta$, une fonction de φ_1 et φ_2 assujettie à la condition

$$\frac{1}{A_1}\leqslant\left|\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_1}\right|\leqslant A_1 \tag{6.5}$$

où A est une constante ne dépendant que de Δ, K, M_1 et δ. Or, on a

$$|V(\psi, \varphi_2)|\leqslant U_*(\varphi_1, \varphi_2)=\max_{\arg z=\varphi_1}|U(z, \varphi_2)|.$$

On en obtient pour $h<\delta$

$$\frac{1}{hk}\int_{-h}^{h}\int_{-k}^{k}|V(\psi,\varphi_2+\varphi)|\,d\psi\,d\varphi\leqslant\frac{1}{hk}\int_{-h}^{h}\int_{-k}^{k}|U_*(\varphi_1,\varphi_2+\varphi)|\,d\psi\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A_1}{hk}\int_{-h'}^{h'}\int_{-k}^{k}U_*(\varphi_1,\varphi_2+\varphi)\,d\varphi_1\,d\varphi$$

où h' désigne la valeur de φ_1 lorsque $\psi=h$ pour φ_2 fixé. On conclut de (6.5) et (6.4) que

$$\frac{1}{hk}\int_{-h}^{h}\int_{-k}^{k}|V(\psi,\varphi_2+\varphi)|\,d\psi\,d\varphi\leqslant\frac{M_1}{hk}\int_{-h}^{h}\int_{-k}^{k}U_*(\varphi_1,\varphi_2+\varphi)\,d\varphi_1\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant B\ \text{borne sup}\,\frac{1}{hk}\int_{-h}^{h}\int_{-k}^{k}U^*(\lambda,\varphi_2+\varphi)\,d\lambda\,d\varphi.$$

D'autre part, si $h>\delta$ on a d'après le lemme 9

$$\frac{1}{hk}\int_{-h}^{h}\int_{-k}^{k}|V(\psi,\varphi_2+\varphi)|\,d\psi\,d\varphi\leqslant\frac{1}{\delta k}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-k}^{k}|V(\psi,\varphi_2+\varphi)|\,d\psi\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{\delta k}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-k}^{k}|U_*(\varphi_1,\varphi_2+\varphi)|\,d\varphi_1\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant B(K,M,\Delta,\delta)\limsup_{h,k}\frac{1}{hk}\int_{-h}^{h}\int_{-k}^{k}U^*(\lambda,\varphi_2+\varphi)\,d\lambda\,d\varphi$$

ce qui achève la démonstration du lemme 14.

§ 7. Ces préparatifs terminés, soient $f(\lambda,\varphi_2)$ une fonction de classe L^p (où $p>1$) satisfaisant à la condition **N** et $U(z_1,z_2)$ la fonction biharmonique définie par les opérations décrites dans les § 5 en partant de la fonction $f(\lambda,\varphi_2)$. Fixons λ_0 et φ_2 et considérons la transformation

$$z_1'=\frac{z_1-h(z_2,\lambda_0)}{ih_\lambda'(z_2,\lambda_0)},\qquad z_2'=z_2. \tag{7.1}$$

D'après le lemme 3, le transformé D' du domaine D contient un bicylindre B de la forme $|z_1'+r|\leqslant r$, $|z_2'|\leqslant 1$. En tenant compte des lemmes 13 et 14, on en conclut que l'on a

$$\max_{(z_1',z_2')\in B'(\lambda_0,\varphi_2)}|U(z_1',z_2')|\leqslant A\,U^*(\lambda_0,\varphi_2)=A\max_{\substack{z=sh(e^{i\varphi_2},\lambda_0)\\ 0\leqslant s\leqslant 1}}|U(z_1,e^{i\varphi_2})|$$

où $B'(\lambda_0,\varphi_2)$ est le domaine défini par les inégalités:

$$|\arg(z_1'+r)|\leqslant k(1-|z_1'+r|)<\pi/2,\quad |\arg z_2'-\varphi_2|\leqslant k(1-|z_2'|)<\pi/2.$$

Soit $B(\lambda_0,\varphi_2)$ le domaine qui s'obtient de $B'(\lambda_0,\varphi_2)$ par la transformation inverse à (7.1). Il vient

$$V(\lambda_0,\varphi_2)=\max_{(z_1,z_2)\in B(\lambda_0,\varphi_2)}|U(z_1,z_2)|\leqslant A\,U^*(\lambda_0,\varphi_2), \tag{7.2}$$

ce qui donne d'après les lemmes 9 et 12

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}V^p(\lambda,\varphi_2)\,d\lambda\,d\varphi_2\leqslant A\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\lambda,\varphi_2)|^p\,d\lambda\,d\varphi_2. \tag{7.3}$$

Posons $f=f_1+f_2$ où f_1 est une fonction continue et

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_2(\lambda,\varphi_2)|^p\,d\lambda\,d\varphi_2\leqslant\varepsilon^p. \tag{7.4}$$

Considérons les fonctions biharmoniques correspondantes $U_1(z_1,z_2)$ et $U_2(z_1,z_2)$. En appliquant la transformation (7.1), on prouve facilement qu'on a partout et d'une façon uniforme

$$\lim_{\substack{z_1\to h(e^{i\varphi_2},\lambda)\\ z_2\to e^{i\varphi_2}}}U_1(z_1,z_2)=f_1(\lambda,\varphi_2).$$

D'autre part, l'inégalité (7.2) donne $\operatorname{mes}\underset{\lambda,\varphi_2}{E}[V_2(\lambda,\varphi_2)>\sqrt{\varepsilon}]\leqslant A\sqrt{\varepsilon}$, d'où

$$\operatorname{mes}\underset{\lambda,\varphi_2}{E}\Big(\overline{\lim_{\substack{(z_1,z_2)\in B(\lambda,\varphi_2)\\ z_1\to h(e^{i\varphi_2},\lambda)\\ z_2\to e^{i\varphi_2}}}}|U(z_1,z_2)-f(\lambda,\varphi_2)|>\sqrt{\varepsilon}\Big)<A\sqrt{\varepsilon},$$

ce qui équivaut à (1.14) pour $U(z_1,z_2)$. Pour achever la démonstration du th. 2, il suffit donc de montrer que la fonction conjuguée de $U(z_1,z_2)$ est de classe H_p, ce qui revient à montrer que la fonction conjuguée à $f(\lambda,\varphi_2)$ est de classe L^p. Or, c'est une conséquence du lemme 7 et du lemme connu [14]) suivant:

Lemme 15. *$F(z)=U(z)+iV(z)$ étant une fonction analytique dans le cercle unité, l'inégalité $\int_0^{2\pi}|U(e^{i\varphi})|^p\,d\varphi<\infty$ où $p>1$ entraîne $\int_0^{2\pi}|V(e^{i\varphi})|^p\,d\varphi\leqslant A_p\int_0^{2\pi}|U(e^{i\varphi})|^p\,d\varphi$ où A_p ne dépend que de p.*

Le th. 2 se trouve ainsi démontré.

---

[14]) M. Riesz [8].

§ 8. Passons à la démonstration du th. 1.

Lemme 16. *Soit $f(z)$ une fonction analytique définie dans le cercle unité et satisfaisant à la condition*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \leqslant M \qquad (r<1,\ p>1).$$

Il existe alors une fonction $f(e^{i\varphi})$ telle que

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})-f(e^{i\varphi})|^p d\varphi = 0.$$

Ce lemme est connu [15]).

Lemme 17. *G et Γ vérifiant les hypothèses* (3.1)-(3.3), *soit $f(z)$ une fonction régulière dans G et telle que*

$$\int_\Gamma |f(sz)|^p |dz| \leqslant M \qquad (s<1).$$

Il existe alors une fonction $f(z)$ définie pour $z\epsilon\Gamma$ et telle que

$$\lim_{s\to 0} \int_\Gamma |f(z)-f(sz)|^p |dz| = 0.$$

C'est une conséquence des lemmes 7, 9 et 16.

Lemme 18. *Soit $\Gamma(\varphi)$ une famille de courbes vérifiant uniformément les hypothèses* (3.1)-(3.3). *Admettons que, pour tout φ, il existe une fonction $F(z,\varphi)$ régulière dans le domaine $G(\varphi)$ borné par la courbe $\Gamma(\varphi)$ et que l'on a*

$$\int_0^{2\pi}\int_{\Gamma(\varphi)} |F(sz,\varphi)|^p |dz|\, d\varphi \leqslant M \qquad (s<1,\ p>1).$$

Il existe alors une fonction $F(z,\varphi)$ définie pour $z\epsilon\Gamma(\varphi)$ et pour laquelle on a

$$\lim_{s\to 1}\int_0^{2\pi}\int_{\Gamma(\varphi)} |F(sz,\varphi)-F(z,\varphi)|^p |dz|\, d\varphi = 0.$$

Posons

$$H(\varphi) = \underset{0\leqslant s<1}{\text{borne sup}} \int_{\Gamma(\varphi)} |F(sz,\varphi)|^p |dz|.$$

Nous allons établir l'inégalité

$$\int_0^{2\pi} H(\varphi)\,d\varphi < AM \tag{8.1}$$

où $A=A(K,\lambda,p)$.

[15]) Voir p. ex. Zygmund [10], surtout p. 86 et 87.

Supposons d'abord que $H(\varphi)=\infty$ pour tout φ appartenant à un ensemble E de mesure positive. Le nombre K_1 étant fixé, on peut trouver pour tout $\varphi\epsilon E$ un $s_\varphi<1$ de manière que $H(s_\varphi,\varphi)\geqslant K_1$ où $H(s,\varphi)=\int_{\Gamma(\varphi)}|F(sz,\varphi)|^p|dz|$. Désignons par E_n l'ensemble des points $\varphi\epsilon E$ pour lesquels $s_\varphi\leqslant 1-1/n$. Il est évident que $E_n\to E$, ce qui permet de choisir un $n=n_0$ de façon que $|E_{n_0}|>\frac{1}{2}|E|$. En supposant $\varphi\epsilon E_{n_0}$ et en tenant compte du lemme 9, on en conclut que $H(s_\varphi,\varphi)\leqslant AH(1-1/n_0,\varphi)$, où A ne dépend ni de φ ni de n_0. Il en vient

$$\tfrac{1}{2}K_1|E| \leqslant \int_{E_{n_0}} H(s_\varphi,\varphi)\,d\varphi \leqslant AM.$$

Or, K_1 étant arbitraire, on a en conséquence $|E|=0$, ce qui prouve qu'on a presque partout $H(\varphi)<\infty$.

Ceci établi, choisissons un r_φ de manière que l'on ait $H(r_\varphi,\varphi)\geqslant\frac{1}{2}H(\varphi)$ et désignons par E_n l'ensemble des points pour lesquels $r_\varphi<1-1/n$. En tenant compte du lemme 9, on obtient pour $\varphi\epsilon E_n$ l'inégalité $H(r_\varphi,\varphi)\leqslant AH(1-1/n,\varphi)$ où $A=A(K,\lambda,p)$; c. à d.

$$\int_{E_n} H(\varphi)\,d\varphi \leqslant 2AM, \qquad \int_0^{2\pi} H(\varphi)\,d\varphi \leqslant 2AM. \tag{8.2}$$

D'autre part, on conclut du lemme 17 que presque partout

$$\int_{\Gamma(\varphi)} |F(sz,\varphi)-F(z,\varphi)|^p |dz| \to 0,$$

ce qui entraîne la thèse du lemme en vertu de (8.2).

Lemme 19. *$F(z_1,z_2)$ étant une fonction de classe H_p $(p>1)$ dans un domaine D de type* **R**, *il existe une fonction $F(z_1,e^{i\varphi_2})$ analytique pour presque tout φ_2 et satisfaisant à la condition*

$$\lim_{s\to 1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|F\left(rh(se^{i\varphi_2},\lambda),se^{i\varphi_2}\right)-F\left(rh(e^{i\varphi_2},\lambda),e^{i\varphi_2}\right)\right|^p d\lambda\, d\varphi_2 = 0 \quad (0<r<1). \tag{8.3}$$

D'après la définition de la classe H_p, on a pour tout $r<1$ et $s<1$ suffisamment proches de 1

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|F\left(rh(se^{i\varphi_2},\lambda),se^{i\varphi_2}\right)\right|^p d\lambda\, d\varphi_2 \leqslant M.$$

En tenant compte du lemme 18, il existe donc une fonction $F\big(rh(e^{i\varphi_2},\lambda),e^{i\varphi_2}\big)$ telle que:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F\big(rh(e^{i\varphi_2},\lambda),e^{i\varphi_2}\big)\right|^p d\lambda\, d\varphi_2\leqslant AM,$$

$$\lim_{s\to1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F\big(rh(se^{i\varphi_2},\lambda),se^{i\varphi_2}\big)-F\big(rh(e^{i\varphi_2},\lambda),e^{i\varphi_2}\big)\right|^p d\lambda\, d\varphi_2=0.$$

Supposons le lemme 19 vrai si le domaine D est un bicylindre quelconque. En tenant compte du lemme 9, la fonction $F(z_1,e^{i\varphi_2})$ est analytique dans presque tout cercle $|z_1|\leqslant\Delta$, $z_2=e^{i\varphi_2}$ et, à plus forte raison, dans presque tout domaine $D_s(\varphi_2)$ borné par la courbe $\Gamma_s(\varphi_2)$ où $z_1=sh(z_2,\lambda)$ et $z_2=e^{i\varphi_2}$. Soit s_0 la borne supérieure de nombres s pour lesquels la fonction $F(z_1,e^{i\varphi_2})$ est encore analytique dans les domaines $D_s(\varphi_2)$ sauf peut-être un ensemble de mesure nulle de valeurs de φ_2. Soit E_n l'ensemble de points φ_2 tels que la fonction $F(z_1,e^{i\varphi_2})$ n'est pas analytique dans le domaine $D_{s_0-1/n}(\varphi_2)$. Il est évident que, sauf l'ensemble $E=\sum_n E_n$, la fonction $F(z_1,e^{i\varphi_2})$ est analytique dans les domaines $D_{s_0}(\varphi_2)$. Fixons $\lambda=\lambda_0$ et effectuons la transformation

$$z_1'=\frac{z_1-s_0h(z_2,\lambda_0)}{ih_\lambda'(z_2,\lambda_0)},\qquad z_2'=z_2. \tag{8.4}$$

Le transformé D' du domaine D contient un bicylindre de la forme $|z_1'|\leqslant\varrho$, $|z_2|\leqslant1$, à moins que $s_0\neq1$. Le lemme 9 montre que la fonction $\Phi(z_1',z_2')=F(z_1,z_2)$, où z_1,z_2 et z_1',z_2' sont liés par les relations (8.4), est de classe H_p. En appliquant donc le lemme 19, supposé vrai pour le bicylindre, on voit que la fonction $\Phi(z_1',e^{i\varphi_2'})$ est analytique dans presque tout domaine $|z_1'|=\varrho$, $z_2'=e^{i\varphi_2'}$. En effectuant la représentation inverse à (8.4), on voit que la fonction $F(z_1,e^{i\varphi_2})$ est analytique dans presque tout cercle $|z_1-s_0h(z_2,\lambda_0)|=r$, $z_2=e^{i\varphi_2}$. La même opération peut être faite dans tout le point λ et on voit facilement que la borne inférieure des rayons r correspondants est positive. Il en résulte l'existence d'une suite $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n$ telle qu'en désignant par $K(r,\varphi_2,\lambda)$ le cercle $|z_1-s_0h(z_2,\lambda)|\leqslant r$, $z_2=e^{i\varphi_2}$, on a $D_{s_0}(\varphi_2)+\sum_i K(r,\varphi_2,\lambda_i)\supset D_{s_1}(\varphi_2)$ où $s_1>s_0$ est indépendant de φ_2. On en conclut que la fonction $F(z_1,e^{i\varphi_2})$ est encore analytique dans presque tout domaine $D_{s_1}(\varphi_2)$.

Donc $s_0=1$ et la démonstration du lemme 19 s'achève par le suivant

Lemme 20. *$F(z_1,z_2)$ étant une fonction analytique de classe H_p $(p>1)$ dans le bicylindre $|z_1|\leqslant1$, $|z_2|\leqslant1$, il existe une fonction $F(z_1,e^{i\varphi_2})$ analytique pour presque tout φ_2 et satisfaisant à la condition*

$$\lim_{s\to1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(re^{i\varphi_1},se^{i\varphi_2})-F(re^{i\varphi_1},e^{i\varphi_2})|^p d\varphi_1\, d\varphi_2=0\qquad(0\leqslant r<1).$$

Soit $U(z_1,z_2)$ la partie réelle de $F(z_1,z_2)$. Il existe[16]) une fonction $f(\varphi_1,\varphi_2)$ de classe L^p telle que

$$U(z_1,z_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi_1+\varphi',\varphi_2+\varphi'')\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)\,d\varphi'\,d\varphi''}{(1-2r_1\cos\varphi'+r_1^2)(1-2r_2\cos\varphi''+r_2^2)}$$

où $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ et $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$. En posant

$$U(z_1,e^{i\varphi_2})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi_1+\varphi',\varphi_2)\frac{(1-r_1^2)\,d\varphi'}{1-2r_1\cos\varphi'+r_1^2},$$

on obtient

$$\lim_{s\to1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|U(re^{i\varphi_1},se^{i\varphi_2})-U(re^{i\varphi_1},e^{i\varphi_2})|^p d\varphi_1\, d\varphi_2=0\qquad(r<1).$$

La même proposition étant vraie aussi pour la partie imaginaire de $F(z_1,z_2)$, le lemme 20, et partant le lemme 19, se trouve établi.

§ 9. Le th. 1 à démontrer résulte des lemmes 16-20 comme il suit.

En appliquant les lemmes 18 et 19, il existe une fonction $F(e^{i\varphi_1},e^{i\varphi_2})$ qui peut être considérée pour presque tout φ_2 comme la fonction frontière de la fonction analytique $F(z_1,e^{i\varphi_2})$. Elle est évidement de classe L^p. En partant d'elle et en effectuant les opérations décrites dans le § 5, nous retrouvons donc la fonction $F(z_1,z_2)$. Par conséquent nous sommes dans les conditions du th. 2 et, celui-ci étant établi, il en est de-même du th. 1.

---

16) ce qu'on peut déduire immédiatement des théorèmes connus (voir p. ex. A. Zygmund [10], p. 86-87).

Travaux cités.

[1] S. Bergmann. *Über ausgezeichnete Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.* Math. Ann. **104** (1931), p. 611–636.

[2] — *Zur Veranschaulichung der Kreiskörper und Bereiche mit ausgezeichneter Randfläche.* Jahresbericht der Deutschen Math. Verein. **44** (1933), p. 238–252.

[3] — *Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler.* II. Math. Zeit. **39** (1934), p. 605–608.

[4] G. H. Hardy et J. E. Littlewood. *A maximal theorem with function-theoretic applications.* Acta Math. **54** (1930), p. 81–116.

[5] B. Jessen, J. Marcinkiewicz et A. Zygmund. *Note on the differentiability of multiple integrals.* Fund. Math. **25** (1935), p. 217–234.

[6] O. D. Kellog. *Harmonic functions and Green integral.* Trans. Americ. Math. Soc. **13** (1912), p. 109–132.

[7] L. Lichtenstein. *Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken.* Journal für Math. **140** (1911), p. 100–119.

[8] M. Riesz. *Sur les fonctions conjuguées.* Math. Zeit. **27** (1927), p. 218–244.

[9] S. Warschawski. *Über einen Satz von O. D. Kellog.* Nachrichten der Ges. Wiss. Göttingen (1932), p. 73–86.

[10] A. Zygmund. *Trigonometrical Series.* Monografie Matematyczne **5**, Warszawa-Lwów 1939.

On transformations having periodic properties [1]).

By

W. L. Ayres (Ann Arbor, Mich., U. S. A.).

1. The purpose of this paper is to study the relations between properties of four types of periodic and semi-periodic transformations. It is shown that these types are identical only for quite special spaces such as linear graphs and dendrites, but that they give always identical properties relative to the cyclic elements of a Peano space. These properties are studied in detail. The principal results are that the set of cyclic elements which are invariant in the large form a non-vacuous Peano space, and that the components of the space minus this invariant set are permuted among themselves in a definite manner.

2. We consider a metric space X and a single-valued transformation (function) f of X into itself, i. e. for each $x \epsilon X$, $f(x) \epsilon X$ and there is an $x_1 \epsilon X$ such that $f(x_1)=x$. We denote by $f^2(x)$ the point $f(f(x))$, and by f^n the result of repeating f n times.

Property P_1. f is said to be *periodic* if there is a positive integer n such that $f^n=I$, where I is the identity transformation.

Property P_2. f is said to be *point-wise periodic* if for each $x \epsilon X$ there is a positive integer $n=n(x)$ such that $f^n(x)=x$.

Property P_3. f is said to be *almost periodic* if for each $\varepsilon>0$ there exists a positive integer $n=n(\varepsilon)$ such that $\varrho(x,f^n(x))<\varepsilon$ for every $x \epsilon X$.

Property P_4. f is said to be *point-wise almost periodic* if for each $x \epsilon X$ and any $\varepsilon>0$ there is a positive integer $n=n(x,\varepsilon)$ such that $\varrho(x,f^n(x))<\varepsilon$.

1) Presented to the American Mathematical Society Dec. 30, 1936.