Wesentliche Primideale in vollständigen Ringen.

Von

Bedřich Pospíšil (Brno).

In einer neueren Arbeit beschäftigt sich E. Čech [1]) mit einer gewissen speziellen Art von bikompakten Räumen. Es ist da eine wichtige ungelöste Frage übriggeblieben; es handelt sich um die Mächtigkeiten der von Čech studierten Räume. Diese Frage wurde nachträglich von mir gelöst [2]). Diesem Resultat habe ich später [3]) weitere Überlegungen angeknüpft, die man mit Rücksicht auf eine Theorie von M. H. Stone [4]) algebraisch interpretieren kann. Man bekommt auf diese Weise Ergebnisse, die ganz eng mit gewissen neueren Überlegungen von A. Tarski [5]) zusammenhängen. Z. B. findet man durch die Stonesche topologische Interpretation von Satz 3.19 von Tarski von neuem die Mächtigkeiten der oben erwähnten Räume. Es sei noch erwähnt, daß (topologisch ausgedrückt) die Anzahl der abgeschlossenen Mengen in diesen Räumen schon im Jahre 1930 von Tarski [6]) angegeben wurde.

Herr Tarski hat mich aufgefordert, einige meiner Resultate, die zum erwähnten Problemenkreise angehören, vom topologischen Kleide loszumachen und noch einmal algebraisch darzustellen. Um aber mich sachlich nicht zu wiederholen, habe ich in der vorliegenden Arbeit Ergebnisse zusammengefaßt, die nicht bloße Übersetzungen meiner früheren Resultate ins Algebraische sind, sondern auch sachlich etwas neues darbieten. Die Grundgedanken meiner Methode, insofern sie Primideale betrifft, werden auch so ganz ersichtlich sein.

[1]) E. Čech, Annals of Math. **38** (1937), S. 823 ff.

[2]) B. Pospíšil, ibid., S. 845 f.

[3]) B. Pospíšil, Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk à Brno **270** (1939).

[4]) M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), S. 375 ff.

[5]) A. Tarski, Fundam. Math. **32** (1939), S. 45 ff.

[6]) A. Tarski, Fundam. Math. **16** (1930), S. 181 ff.

Nach Stone [7]) kann ein beliebiger Mengenkörper als ein Ring angesehen werden, indem man unter der Multiplikation die Produktbildung und unter der Addition folgendes versteht: Die *Summe* von einer endlichen Anzahl von Mengen ist die Menge derjenigen Dinge, die zu einer ungeraden Anzahl von Summanden angehören. Summen von Mengen werden wir immer in diesem Sinne verstehen! Mit K werden wir immer eine feste unendliche Menge von Mächtigkeit $\mathfrak{k}$ und mit A den Ring aller Teilmengen von K bezeichnen. Die Ringe dieser Art heißen nach Tarski vollständig (auch wenn K endlich wäre).

Die kleinste Anzahl von Erzeugenden irgendeines Ideals $\mathfrak{a}$ in irgendeinem Ringe R soll mit $\chi_R(\mathfrak{a})$ bezeichnet werden. Ein System von Erzeugenden von $\mathfrak{a}$ ist dadurch gekennzeichnet, daß $\mathfrak{a}$ das kleinste diese Erzeugenden enthaltende Ideal in R ist, d. h. $\mathfrak{a}$ ist der größte gemeinsame Teiler seiner Erzeugenden. Es ist ferner einleuchtend, daß es für jeden Unterring $\mathfrak{a}$ von A die größte Kardinalzahl $\omega(\mathfrak{a})$ von der Beschaffenheit gibt, daß $\mathfrak{a}$ im Tarskischen Sinne $\omega(\mathfrak{a})$-additiv ist, d. h. die Vereinigungsmenge jeder als $\omega(\mathfrak{a})$ kleineren Anzahl von zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Mengen selbst zu $\mathfrak{a}$ gehört. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in A soll ein *ω-Ideal* gennant werden, wenn es in $\mathfrak{a}$ $\omega(\mathfrak{a})$ Mengen gibt, deren Vereinigung ganz K gleich ist.

Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in A soll *wesentlich* heißen, wenn es zu jeder Menge $a \epsilon \mathfrak{a}$ genau $\mathfrak{k}$ Elemente in K gibt, die in a nicht liegen.

Es ist ja immer $\chi_A(\mathfrak{a}) \leqslant \exp \mathfrak{k}$ [8]) und $\omega(\mathfrak{a})$ unendlich für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in A. Es kann weiter nicht mehr als $\exp\exp \mathfrak{k}$ Ideale in A geben. Unser Ziel ist, den folgenden Satz abzuleiten:

Satz. *Die Anzahl von wesentlichen Primidealen* $\mathfrak{a}$ *in* A, *für die* $\chi_A(\mathfrak{a}) = \exp \mathfrak{k}$ *und* $\omega(\mathfrak{a})$ *abzählbar ist, ist gleich* $\exp\exp \mathfrak{k}$ [9]).

[7]) Ich setze eine algebraische Theorie der Booleschen Ringe (d. h. der Ringe mit lauter idempotenten Elementen), die von Stone in Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), S. 37 ff. entwickelt wurde, als bekannt voraus. Im folgenden wird z. B. mit St. 16 das Theorem 16 aus dieser Arbeit gemeint.

[8]) Ich schreibe immer $\exp \mathfrak{C} = 2^{\mathfrak{C}}$ und nach Tarski $\mathfrak{C}^{\underline{\mathfrak{m}}} = \sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \mathfrak{C}^{\mathfrak{n}}$.

[9]) Vgl. Sätze 3.10 und 3.19 von Tarski (loc. cit. Fundam. Math. **32**), aus denen folgt, daß es für sogenannte *von* $\aleph_0$ *aus schwach erreichbare Kardinalzahlen* $\mathfrak{k}$ $\exp\exp \mathfrak{k}$ Primideale $\mathfrak{a}$ in A mit abzählbaren $\omega(\mathfrak{a})$ gibt.

Aus dem Beweise dieses Satzes werden sich fast von selbst zwei interessante Nebenfolgerungen ergeben, die ich ausdrücklich formulieren will. Zwei Ideale heißen bekanntlich *teilerfremd*, wenn sie gemeinsam den ganzen Ring erzeugen.

Nebensatz. *Sei* $\mathfrak{m}$ *irgendeine reguläre unendliche Kardinalzahl,* $\mathfrak{h}\geqslant\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{k}\geqslant\mathfrak{h}^{\mathfrak{m}}$. *Dann gibt es in* A *wenigstens* $\exp\exp\mathfrak{h}$ *wesentliche zu je zwei teilerfremde* ω*-Ideale* $\mathfrak{a}$ *mit* $\chi_A(\mathfrak{a})\geqslant\exp\mathfrak{h}$ *und* $\omega(\mathfrak{a})=\mathfrak{m}$.

Die Anzahl von Idealen irgendeiner Beschaffenheit in einem Ringe R möge *strikt* heißen, wenn es nicht mehr Ideale dieser Beschaffenheit überhaupt in R gibt und wenn es aber schon dieselbe Anzahl von zu je zwei teilerfremden Idealen in R gibt, die diese Beschaffenheit besitzen. Setzt man $\mathfrak{h}=\mathfrak{k}$ in unserem Nebensatze, so bekommt man den folgenden

Folgesatz. *Sei* $\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{k}$ *für eine reguläre Kardinalzahl* $\mathfrak{m}$. *Dann ist die strikte Anzahl wesentlicher* ω*-Ideale* $\mathfrak{a}$ *in* A *mit* $\chi_A(\mathfrak{a})=\exp\mathfrak{k}$ *und* $\omega(\mathfrak{a})=\mathfrak{m}$ *gleich* $\exp\exp\mathfrak{k}$.

Satz 2.28 von Tarski ist eine Folgerung dieses Folgesatzes. Der erwähnte Satz besagt nämlich: es gibt in A $\exp\exp\mathfrak{k}$ $\mathfrak{m}$-additive Ideale, vorausgesetzt, daß $\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{k}$. Dabei ist unsere Annahme, daß $\mathfrak{m}$ regulär ist, keine Einschränkung davon. Denn für eine irreguläre Zahl $\mathfrak{m}$ sind die $\mathfrak{m}$-additiven Ideale auch $\mathfrak{n}$-additiv, wo $\mathfrak{n}$ die nächstgrößere Zahl zu $\mathfrak{m}$ ist, und man hat auch $\mathfrak{k}^{\mathfrak{n}}=\mathfrak{k}$, wenn nur $\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{k}$ ist; und $\mathfrak{n}$ ist bekanntlich schon regulär. Übrigens ist die Annahme, daß $\mathfrak{m}$ regulär ist, unentbehrlich, da, wie leicht ersichtlich, $\omega(\mathfrak{a})$ unmöglich irregulär sein kann.

Wir fangen mit folgender Konstruktion an. Sei H eine feste Menge von Mächtigkeit $\mathfrak{h}$. Sei X die Menge aller Funktionen, deren Argument H durchläuft und welche nur Werte 1 und 2 annehmen. Jeder Teilmenge a von H mit $\overline{\overline{a}}<\mathfrak{m}$ lassen wir für jedes Element φ von X eine Menge a_φ entsprechen: a_φ wird die Menge aller $\psi\epsilon X$ sein, für die $\psi(t)=\varphi(t)$ für alle $t\epsilon a$ ist.

Sei $\mathfrak{B}$ das System aller Mengen a_φ. Sei $B_1\epsilon\mathfrak{B}$ und $B_2\epsilon\mathfrak{B}$. Die Menge aller geordneten Paare $\{x,y\}$ mit $x\epsilon B_1$ und $y\epsilon B_2$ möge das *Quadrat* mit der horizontalen Seite B_1 und mit der vertikalen Seite B_2 genannt werden. Sei F die Menge aller Funktionen, deren Argument X durchläuft und deren Werte auch in X liegen. Es ist ja $\overline{\overline{F}}=\exp\exp\mathfrak{h}$. Sei E die Menge derjenigen Gruppen e von Quadraten mit $\overline{\overline{e}}<\mathfrak{m}$, daß die horizontalen Seiten von Quadraten in e zu je zwei punktfremd sind. Jeder Gruppe e sei eine

Menge e_0 von Mächtigkeit $\mathfrak{k}$ derart zugeordnet, daß die Mengen e_0 zu je zwei und zu F punktfremd sind. Sei K die Vereinigungsmenge aller e_0 und Q die Vereinigung von F und K.

Es sei nun $f\epsilon F$. Es sei ein System von weniger als $\mathfrak{m}$ geordneten Paaren $z=\{x,y\}$ mit $x\epsilon X$ und $y=f(x)\epsilon X$ gegeben. Außerdem sei ein jedes z in ein Quadrat Z eingeschlossen. Jeder Gruppe G von Paaren z und ihnen zugeordneten Quadraten Z soll eine Menge U wie folgt zugeordnet werden. Sei V_1 die Menge aller derjenigen $e\epsilon E$, daß es für jedes z aus G ein im zugeordneten Z enthaltenes, zu e gehöriges Quadrat gibt, dessen horizontale Seite das erste Glied x von $z=\{x,y\}$ enthält. Sei U_1 die Vereinigungsmenge aller e_0 mit $e\epsilon V_1$. Sei ferner U_2 die Menge aller derjenigen $g\epsilon F$, daß für jedes z aus G der Funktionswert $g(x)$ in der vertikalen Seite von Z liegt. Man hat nun nur U der Vereinigungsmenge von U_1 und U_2 gleich zu setzen. Sei $\mathfrak{U}$ das System aller U.

Wir wollen zuerst den Beweis des Nebensatzes zu Ende führen. Jedem f in F ist ein Ideal $\mathfrak{a}_f$ in A derart zugeordnet, daß die Mengen $K+KU$ mit $f\epsilon U\epsilon\mathfrak{U}$ ein System von Erzeugenden davon bilden. Diese Ideale sind ja wesentlich. Sie sind auch zu je zwei teilerfremd. Denn ist $f\neq g\epsilon F$, so gibt es in $\mathfrak{U}$ zwei disjunkte Mengen U und V mit $f\epsilon U$ und $g\epsilon V$. Also ist $u=K+KU\epsilon\mathfrak{a}_f$, $v=K+KV\epsilon\mathfrak{a}_g$ und $K=u+v+uv$. Da nun $u+uv$ zu $\mathfrak{a}_f$ und v zu $\mathfrak{a}_g$ gehört, muß K in jedem Ideal in A enthalten sein, das $\mathfrak{a}_f$ und $\mathfrak{a}_g$ enthält. Also muß das letztere gleich A sein.

Um die Ungleichung $\chi_A(\mathfrak{a}_f)\geqslant\exp\mathfrak{h}$ zu beweisen, setzen wir voraus, es gebe ein System $\mathfrak{E}$ von Mächtigkeit $<\exp\mathfrak{h}$ von Erzeugenden von $\mathfrak{a}_f$, die ja unter den Mengen $K+KU$ mit $U\epsilon\mathfrak{U}$ gewählt werden können. Die Vereinigung jeder endlichen Anzahl von Elementen von $\mathfrak{E}$ möge in $\mathfrak{E}$ enthalten sein (St. 16). Nach dem Übergang zu den Komplementen in K haben wir also aus der folgenden Behauptung einen Widerspruch zu folgern: Es gibt ein System $\mathfrak{V}$ von $<\exp\mathfrak{h}$ Mengen U mit $f\epsilon U\epsilon\mathfrak{U}$ derart, daß in jeder Menge KU mit $f\epsilon U\epsilon\mathfrak{U}$ eine Menge KV mit $V\epsilon\mathfrak{V}$ enthalten ist.

Jede Menge $V\epsilon\mathfrak{V}$ ist einer Gruppe G von Paaren $z=\{x,y\}$ und zugehörigen Quadraten Z zugeordnet. Die Anzahl der zu einer solchen Gruppe G gehörigen x ist $<\mathfrak{m}$. Es gibt also ein x, das zu keiner dieser Gruppen (für $V\epsilon\mathfrak{V}$) gehört. Sei $y=f(x)$. Dann gehört zum Paare $z=\{x,y\}$ und zu einem sonst beliebigen Quadrate Z mit $z\epsilon Z$ eine Menge $U\epsilon\mathfrak{U}$ mit $f\epsilon U$, in der offenbar gar keine Menge $V\epsilon\mathfrak{V}$ enthalten ist.

Um endlich zu zeigen, daß $\omega(\mathfrak{a}_f)\geqslant\mathfrak{m}$ ist, genügt es zu bemerken, daß offenbar jeder Durchschnitt von $<\mathfrak{m}$ Mengen U mit $f\epsilon U\epsilon\mathfrak{U}$ eine ebensolche enthält ($\mathfrak{m}$ regulär!).

Um den Nebensatz völlig zu beweisen, haben wir also nur zu zeigen, daß es in $\mathfrak{a}_f$ $\mathfrak{m}$ Mengen gibt, deren Vereinigung ganz K ist, d. h. daß es $\mathfrak{m}$ Mengen KU mit $f\epsilon U\epsilon\mathfrak{U}$ gibt, deren Durchschnitt leer ist.

Sei also r ein fester Punkt in X. Es seien schon die disjunkten Mengen $O_\iota\epsilon\mathfrak{B}$ für $\iota<\alpha$ $(\alpha<\mathfrak{m})$ so gewählt, daß $r\,non\,\epsilon\,O_\iota$ ist. Es gibt dann eine Menge O_ι^α mit $r\epsilon O_\iota^\alpha\subset X-O_\iota$ und $O_\iota^\alpha\epsilon\mathfrak{B}$. Der Durchschnitt aller O_ι^α enthält ein $O_\alpha^\alpha\epsilon\mathfrak{B}$ mit $r\epsilon O_\alpha^\alpha$ und man kann in O_α^α eine r nicht enthaltende Menge $O_\alpha\epsilon\mathfrak{B}$ wählen. Wählt man nun zu jeder Zahl ι mit $\iota<\mathfrak{m}$ eine Gruppe G, so daß O_ι unter den in Betracht kommenden horizontalen Seiten vorkommt, so ist der Durchschnitt aller unseren Gruppen zugeordneten Mengen von $\mathfrak{U}$ offenbar leer, w. z. b. w.

Im Beweise unseres Satzes soll immer $\mathfrak{m}=\aleph_0$ sein. Dann ist die Voraussetzung des Folgesatzes immer erfüllt. Offenbar ist jeder Teiler $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{a}_f$ ein ω-Ideal mit abzählbarem $\omega(\mathfrak{t})$. Es genügt also zu zeigen, daß man jedes $\mathfrak{a}_f$ zu einem wesentlichen Primideal $\mathfrak{y}_f$ mit $\chi_A(\mathfrak{y}_f)=\exp\mathfrak{k}$ erweitern kann. Denn die Ideale $\mathfrak{y}_f$ sind ja zu je zwei verschieden, was aus der Teilerfremdheit der $\mathfrak{a}_f$ hervorgeht. Ich setze im folgenden die wichtige Tatsache als bekannt voraus, daß jedes vom ganzen Ringe verschiedene Ideal in einem Booleschen Ringe immer durch ein Primideal teilbar ist (vgl. St. 64 [10])).

Sei h_1 diejenige homomorphe Abbildung von A, deren *Kern* (d. h. das größte in Null übergehende Ideal) aus den Teilmengen von K besteht, deren Mächtigkeiten $<\mathfrak{k}$ sind. Wesentliche Ideale können dabei offenbar nicht in ganz $h_1(A)$ übergehen. Sei h_2 diejenige homomorphe Abbildung von $h_1(A)$, deren Kern aus Elementen besteht, die von allen Idealen $h_1(\mathfrak{a}_f)$ mit $f\epsilon F$ geteilt werden. Sei $h=h_2h_1$ die aus h_1 und h_2 zusammengesetzte homomorphe Abbildung und $B=h(A)$. Dann ist immer $h(\mathfrak{a}_f)$ ein offenbar von B verschiedenes Ideal in B. Um nun den Beweis zu Ende zu führen, genügt es zu zeigen, daß es für beliebiges $f\epsilon F$ ein Primideal v in B gibt, für welches $h(\mathfrak{a}_f)\subset v$ und $\chi_B(v)=\exp\mathfrak{k}$ gilt. Denn $\mathfrak{y}_f=h^{-1}(v)$ ist ein Primideal in A (St. 48), $\mathfrak{a}_f\subset\mathfrak{y}_f$, ferner $\chi_A(\mathfrak{y}_f)=\exp\mathfrak{k}$ (hätte nämlich $\mathfrak{y}_f$ weniger als $\exp\mathfrak{k}$ Erzeugende p, so würden die $h(p)$ das Ideal v in B erzeugen) und schließlich ist das Ideal $\mathfrak{y}_f$ wesentlich, was aus der Definition von h_1 hervorgeht (vgl. St. 48). Es handelt sich also um die Konstruktion von v für ein festgewähltes $f\epsilon F$.

[10]) Andere Litteratur dazu findet man bei A. Tarski, Fundam. Math. **32** (1939), S. 59, Fußnote [2]).

Bekanntlich ist F die Menge aller Abbildungen von X in X, wo X die Menge aller Abbildungen von H in eine zweipunktige Menge ist. Für jedes vorgegebene $g\epsilon F$ ist jedem $x\epsilon X$ ein $g(x)\epsilon X$ zugeordnet und ebenso jedem $m\epsilon H$ ein $x(m)$ für jedes $x\epsilon X$. Also ist jedem Paare $\{x,m\}$ ein $n=y(m)$ mit $y=g(x)\epsilon X$ zugeordnet und diese Zuordnung ist durch g gekennzeichnet: $n=g(x)(m)$. So können die g als Abbildungen von Paaren $\{x,m\}$ auf eine zweipunktige Menge angesehen werden.

Sei C die Menge aller FU mit $U\epsilon\mathfrak{U}$. Dann ist leicht zu sehen, daß jedes $a\epsilon C$ wie folgt gekennzeichnet werden kann: Es gibt eine endliche, von a abhängige Kombination $\varrho(a)$ von Paaren $\{x,m\}$, für welche die Abbildungen $g\epsilon a$ bestimmte, von a abhängige Werte annehmen.

Wir wollen nun zeigen, daß die Ideale $h(\mathfrak{a}_g)$ ganz B in dem Sinne erschöpfen, daß jedes Primideal $\mathfrak{y}$ in B ein passendes $h(\mathfrak{a}_g)$ teilt, d. h. enthält. Vorausgesetzt, $h(\mathfrak{a}_g)$ sei nie durch $\mathfrak{y}$ teilbar, so wäre $\mathfrak{a}_g$ nie durch das Primideal $h^{-1}(\mathfrak{y})=\mathfrak{q}$ in A teilbar (St. 48). Also gäbe es immer ein $a_g\epsilon\mathfrak{a}_g$, $a_g\,non\,\epsilon\,\mathfrak{q}$. Mit Rücksicht auf die Definition von $\mathfrak{a}_g$ kann man $a_g=K+KU_g$ annehmen. Es ist ja immer KU_g Produkt endlich vieler KV_g, wo $V_g\epsilon\mathfrak{U}$ mit $\varrho(FV_g)=1$ ist. Es ist $K+KV_g\epsilon\mathfrak{a}_g$ und es gibt ein $KV_g\epsilon\mathfrak{q}$, d. h. $K+KV_g\,non\,\epsilon\,\mathfrak{q}$; denn das Produkt KU_g ist durch $\mathfrak{q}$ teilbar. Also kann man $\varrho(FU_g)=1$ annehmen. Man hat offenbar $c_g=F+FU_g\epsilon C$. Wären nun die Mengen $\varrho(c_g)$ zu je zwei verschieden, so wäre der Durchschnitt aller c_g offenbar nicht leer. Also ist z. B. $\varrho(c_r)=\varrho(c_s)$ und $c_r\neq c_s$. Dann ist die Vereinigung der Mengen $c_r=F+c_s=FU_s$ und $c_s=F+c_r=FU_r$ der Menge F gleich. Das Produkt a der zugehörigen Elemente a_r und a_s ist nicht in $\mathfrak{q}$ enthalten (da anders a_r oder a_s in $\mathfrak{q}$ enthalten wäre); a ist aber durch alle $\mathfrak{a}_g$ teilbar. Also wird $\mathfrak{q}$ durch h auf ganz B abgebildet (St. 48), was nicht geht.

Jedem $c\epsilon C$ kann man ein bestimmtes Element c' von B wie folgt zuordnen. Es gibt ja ein $U\epsilon\mathfrak{U}$ mit $c=FU$; wir setzen $c'=h(KU)$. Auf diese Weise ist das Element c' eindeutig bestimmt. Es sei also ein $V\epsilon\mathfrak{U}$ mit $c=FV$ gegeben.

Man hat zu zeigen, daß $h(KU)=h(KV)$, d. h. $h(KU+KV)=0$ gilt. Man hat also nur zu zeigen, daß $KU+KV$ zu allen $\mathfrak{a}_g$ mit $g \epsilon F$ gehört.

Ist g in c enthalten, so gibt es offenbar ein $W \epsilon \mathfrak{U}$ mit $W \subset UV$ und $c=KW$, also $KU+KV \subset K+KW=K+c \epsilon \mathfrak{a}_g$. Für g *non* $\epsilon\, c$ kann man ein $W \epsilon \mathfrak{U}$ wählen mit $g \epsilon W$, $UW=0$ und $VW=0$. Nach der Definition von $\mathfrak{a}_g$ ist dann auch $KU+KV$ durch $\mathfrak{a}_g$ teilbar. Man kann der Einfachheit halber c' mit c identifizieren und ganz einfach c statt c' schreiben. Die Elemente von C sind Teilmengen von F; man kann also von Vereinigungen und Durchschnitten beliebiger Anzahlen von c, und ebenso von Inklusionen $\epsilon\, c$ sprechen. Die Addition und Multiplikation unserer als Mengen betrachteten Elementen c stimmt ja mit unserer Algebra B überein. Die Menge F, die ja eine Vereinigung endlich vieler c ist, kann also als ein Element von B angesehen werden; F ist ersichtlich das Einheitselement von B, da offenbar $h(K)=F$ ist. Man hat nämlich immer $h(KU)=FU$ für $U \epsilon \mathfrak{U}$.

Wir bemerken noch, daß aus $g \epsilon a \epsilon C$ die Teilerfremdheit von a zu $h(\mathfrak{a}_g)$ folgt. Denn $F+a \epsilon h(\mathfrak{a}_g)$; also muß jeder gemeinsame Teiler von a und $h(\mathfrak{a}_g)$ $F=(F+a)+a$, also ganz B teilen.

Sei $\varDelta$ die Klasse aller Mengen, die man durch unendliche Durchschnittsbildungen aus Elementen von C und auch durch endliche Vereinigungen der so entstandenen Durchschnitte bekommt. Dann kann unmöglich eine zu $\varDelta$ gehörige Menge ein Element von C enthalten. Sei also V die Vereinigungsmenge von n unendlichen Durchschnitten von Elementen von C. Es sei noch ein solcher Durchschnitt D gegeben. Sei $a \epsilon C$. Setzen wir voraus, daß es ein $b \epsilon C$ mit $b \subset a+aV$ gibt. Offenbar kann b nicht in D enthalten sein. Also muß b ein $c \epsilon C$ mit $c \subset F+D$ treffen (da $F+D$ die Vereinigungsmenge solcher c ist). Dann ist aber bc ganz im Komplemente der Vereinigung von V und D enthalten und unsere Annahme ist auch für $n+1$ erfüllt.

Wir schreiben nun $\mathfrak{a}=h(\mathfrak{a}_f)$. Sei $\mathfrak{u}$ ein zu $\mathfrak{a}$ teilerfremdes Ideal in B. Lassen wir a alle nicht durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Elemente von C durchlaufen, d. h. $f \epsilon a$, und setzen wir voraus, daß immer a *non* $\epsilon\, \mathfrak{u}$ ist. Jedem a soll nun das von $F+a$ erzeugte Hauptideal $\mathfrak{v}(a)$ zugeordnet werden. Nach St. 67 (2) ist das von allen $\mathfrak{v}(a)$ gemeinsam mit $\mathfrak{u}$ erzeugtes Ideal $\mathfrak{i}$ dann und nur dann durch ein Primideal $\mathfrak{y}$ in B teilbar, wenn $\mathfrak{u}$ und alle $\mathfrak{v}(a)$ durch $\mathfrak{y}$ teilbar sind. Anderseits geht jedes in allen $\mathfrak{v}(a)$ aufgehende Primideal $\mathfrak{y}$ auch in $\mathfrak{a}$ auf. (Denn es muß, wie schon gezeigt, ein $g \epsilon F$ mit $h(\mathfrak{a}_g) \subset \mathfrak{y}$ geben; wäre $g \neq f$, so wäre ein passendes a in $h(\mathfrak{a}_g)$, also in $\mathfrak{y}$ enthalten, was ersichtlich nicht der Fall sein kann). Also kann $\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{i}$ nicht aufgehen. Es gibt also kein Primideal in B, das $\mathfrak{i}$ teilt, d. h. $\mathfrak{i}$ ist ganz B gleich. Also ist (St. 17) F der Vereinigung[11]) endlich vieler Elemente b von passenden $\mathfrak{v}(a)$ einem Elemente von $\mathfrak{u}$ gleich. Für die b kann man Elemente $F+a$ wählen. Dann ist das Produkt der zugehörigen endlich vielen a, das ja selbst ein a ist, durch $\mathfrak{u}$ teilbar. Also gibt es ein $a \epsilon C$, das nicht durch $\mathfrak{a}$, ja aber durch $\mathfrak{u}$ teilbar ist.

Sei $D \epsilon \varDelta$. Sei $\mathfrak{u}$ das größte (offenbar existierende) Ideal, für das jedes $\mathfrak{u}$ nicht teilende Primideal in B ein Teiler eines $h(\mathfrak{a}_g)$ mit $g \epsilon D$ ist. Nehmen wir an, $\mathfrak{u}$ wäre zu $\mathfrak{a}$ teilerfremd. Dann hat man mit Rücksicht aufs Vorhergesagte ein $a \epsilon C$ vorhanden, in den nicht $\mathfrak{a}$, ja aber $\mathfrak{u}$ aufgeht. Sei nun $g \epsilon a$; sei $\mathfrak{y}$ ein in $h(\mathfrak{a}_g)$ aufgehendes Primideal in B. Dann geht, wie schon gesagt, $\mathfrak{y}$ in a nicht auf. Also ist $\mathfrak{y}$ kein Teiler von $\mathfrak{u}$. Folglich geht $\mathfrak{y}$ in ein $h(\mathfrak{a}_r)$ mit $r \epsilon D$ auf. Da aber sämtliche $h(\mathfrak{a}_s)$ zu je zwei teilerfremd sind, muß $r=g$ sein. Also ist g in D enthalten, d. h. $a \subset D$, was, wie schon gesagt, nicht geht. Also ist $\mathfrak{u}$ zu $\mathfrak{a}$ nicht teilerfremd.

Sei eine endliche Klasse von Mengen $D_k \epsilon \varDelta$ gegeben. Sei D die Vereinigung aller D_k. Man hat $D \epsilon \varDelta$. Mit $\mathfrak{u}_k$ sollen die Ideale bezeichnet werden, die den Mengen D_k je in derselben Weise zugeordnet sind, wie $\mathfrak{u}$ der Menge D. Es ist leicht einzusehen, daß das durch die $\mathfrak{u}_k$ erzeugte Ideal ganz in $\mathfrak{u}$ enthalten ist. Also ist es nicht zu $\mathfrak{a}$ teilerfremd. Sei $\mathfrak{w}$ das von allen möglichen $\mathfrak{u}$ erzeugte Ideal. Wäre es zu $\mathfrak{a}$ teilerfremd, so wäre (St. 17) F die Vereinigung eines Elementes von $\mathfrak{a}$ und einer endlichen Anzahl von Elementen, die etwa in den Idealen $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_N$ (N endlich) enthalten sind. Dann wäre also $\mathfrak{a}$ mit dem größten gemeinsamen Teiler der Ideale $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_N$ teilerfremd. Also ist $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{u}$ teilerfremd, was als unmöglich erkannt wurde. Also gibt es ein Primideal $\mathfrak{v}$, das gleichzeitig in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{w}$ aufgeht.

Es bleibt übrig zu zeigen daß $\chi_B(\mathfrak{v})=\exp \mathfrak{f}$ ist.

Sei also $\mathfrak{E}$ eine Menge von Erzeugenden von $\mathfrak{v}$. Man kann voraussetzen, ohne die Mächtigkeit von $\mathfrak{E}$ zu beeinflussen, daß es zu jeder endlichen Anzahl dieser Erzeugenden auch ihre Vereinigung zu $\mathfrak{E}$

[11]) Die Vereinigung zweier Elemente a und b in einem Booleschen Ringe kann als $a+b+ab$ definiert und durch Induktion auf mehrere Elemente ausgedehnt werden.

gehört. Dann sind die Elemente von v mit den Vielfachen unserer Erzeugenden identisch (St. 17). Zu jedem $w \in \mathfrak{E}$ sei mit w^* die Menge derjenigen Vielfachen c von w bezeichnet, deren Komplemente $F+c$ zu C gehören. Es gibt, wie leicht ersichtlich, $\exp \mathfrak{k}$ solche c in $\mathfrak{a}$, also auch in v. Sei D der Durchschnitt aller $F+c$, wo c einer festen Menge w^* gehört. Ist w^* unendlich, so ist, wie schon gezeigt, das D zugeordnete Ideal $\mathfrak{u}$ durch v teilbar (da ja $\mathfrak{w}$ durch v teilbar war). Das Element $F+w$ (F ist die Einheit von B) ist unmöglich durch v teilbar, da anders auch $F=(F+w)+w$ durch v teilbar wäre. Also geht $\mathfrak{u}$ nicht in $F+w$ auf. Anderseits ist jedes $c \in w^*$ durch jedes Primideal teilbar, das in w aufgeht. Da aber jedes Primideal entweder a oder $F+a$ teilen muß (da das Produkt dieser Elemente Null, also durch unser Primideal teilbar ist), muß jedes Primideal, das ein $F+c$ teilt, auch in $F+w$ aufgehen. Also kann unmöglich ein in $F+w$ nicht aufgehendes Primideal $\mathfrak{y}$ ein $F+c$ teilen. Man hat aber $h(\mathfrak{a}_g) \subset \mathfrak{y}$ für ein passendes $g \in F$. Wäre $g \in c$, so wäre $c \operatorname{non} \in \mathfrak{y}$, also $F+c \in \mathfrak{y}$. Folglich ist $g \operatorname{non} \in c$ für alle c, also $g \in D$. Demnach ist $F+w$ durch $\mathfrak{u}$ teilbar, was wir schon als unmöglich eingesehen haben. Also sind alle w^* endlich.

Wir haben so die Menge von $\exp \mathfrak{k}$ Elementen c in endliche Schubfächer w^* eingeteilt. Also ist die Anzahl der letzteren, also auch die Anzahl unserer Erzeugenden wenigstens $\exp \mathfrak{k}$, w. z. b. w.

Die hier geschilderte Methode kann in der Weise verallgemeinert werden, daß man unser Q durch modifizierte Konstruktionen ersetzt, wie sie z. B. in meiner unter [3]) zitierten Arbeit (Theorem X) angegeben wurden. Die weiteren algebraischen Züge bleiben etwa dieselben als die hier angegebenen.

Sur les fonctions analytiques de deux variables complexes.

Par

S. Bergmann et J. Marcinkiewicz (Paris).

§ 1. Dans la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe, on peut se borner souvent à l'étude des fonctions analytiques dans le cercle-unité. En effet, la fonction $f(z)$ étant régulière dans n'importe quel domaine simplement connexe, on peut le ramener à un cercle par une transformation conforme.

Il n'y a rien de semblable dans la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes, de sorte que non seulement les difficultés, mais aussi les résultats mêmes des recherches dépendent d'une manière extrêmement étroite du domaine dans lequel ces fonctions sont considérées. On peut donc ou bien envisager les classes les plus vastes de ces domaines et chercher d'y établir les théorèmes les plus généraux, donc faibles, ou bien partir des domaines d'une structure spéciale, notamment telle qu'il soit possible de reproduire pour eux quelques procédés de la théorie des fonctions d'une variable complexe et, utilisant ces procédés, d'établir quelques théorèmes aussi forts que possible.

La deuxième méthode nous semble utile dans différentes recherches concernant le comportement des fonctions analytiques de deux variables complexes à la frontière du domaine de leur existence, p. ex. lorsqu'il s'agit de généraliser les théorèmes du type de Fatou. Pour étudier ces questions, nous considérons le cas des *domaines possédant une surface remarquable* [1]), c. à d. tels qu'à leur frontière (à 3 dimensions) se trouve située une surface (à 2 dimensions), qui joue un rôle analogue à celui de la courbe frontière des domaines plans dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

[1]) Bergmann [2].