L'identité

$$\Delta_\omega^n f(x) = \sum_{i=0}^{nk}(k)_i^n \frac{\Delta_\omega^n}{k+1} f\left(x+i\frac{\omega}{k+1}\right),$$

divisée par $\left(\dfrac{\omega}{k+1}\right)^n$, nous donne donc

$$\left|\left(\frac{k+1}{\omega}\right)^n \Delta_\omega^n f(x)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{nk}(k)_i^n = (k+1)^n \varepsilon,$$

d'où $|\Delta_\omega^n f(x)| \leqslant \varepsilon|\omega|^n$ et par suite, ε étant arbitraire, $\Delta_\omega^n f(x)=0$.

La fonction $f(x)$ est donc un polynôme suivant la définition donnée p. 43. Cependant, si l'on n'impose aucune condition supplémentaire à cette fonction, celle-ci n'est pas, en général, un polynôme au sens classique du terme, ainsi que le montre l'exemple bien connu, donné par G. Hamel, d'une solution discontinue de l'équation $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Il en sera pourtant ainsi lorsque la fonction $f(x)$ possède la propriété de Baire[5]) ou bien est bornée ou mesurable[6]). On arrivera encore au même résultat en supposant seulement que le module de la fonction $f(x)$ est majoré par une fonction mesurable $\varphi(x)$. En effet, la démonstration de T. Popoviciu[6]) conduit à une inégalité de la forme $|f(\xi+\gamma\omega)|>A$. On aura donc, dans les mêmes conditions, $\varphi(\xi+\gamma\omega)>A$ et, la fonction $\varphi(x)$ étant mesurable, la démonstration se poursuivra comme dans le texte de M. Popoviciu, en y remplaçant $f(x)$ par $\varphi(x)$.

En particulier, pour $n=2$, nous retrouvons le théorème suivant, récemment obtenu par M. Iyerengay[7]): *si le module de la fonction $f(x)$ est majoré par une fonction mesurable, et si le rapport $\frac{1}{\omega^2}[f(x+\omega)-2f(x)+f(x-\omega)]$ tend uniformément vers 0 avec ω dans un intervalle $\langle a,b\rangle$, la fonction $f(x)$ est de la forme $Ax+B$, où A et B sont des constantes.*

[5]) S. Mazur et W. Orlicz, loc. cit., p. 182.

[6]) T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica **8** (Cluj 1934), p. 56.

[7]) K. S. K. Iyerengay, *A note on the symmetric first and second mean derivates of a continuous function*, C. R. Soc. Sci. Varsovie **31** (1938), p. 108.

Ideale in vollständigen Mengenkörpern. II.

Von

Alfred Tarski (Warszawa)[1]).

§ 4. $\mathfrak{p}$-saturierte Ideale[2]).

Der Begriff des $\mathfrak{p}$-saturierten Ideals stellt eine Verallgemeinerung des Begriffs des Primideals dar.

Definition 4.1. Ein Ideal $\boldsymbol{I}$ in einem Körper $\boldsymbol{K}$ wird $\mathfrak{p}$-saturiert genannt, in Zeichen $\boldsymbol{I}\in\mathcal{S}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{K})$, wenn jedes System $S\subset\boldsymbol{K}-\boldsymbol{I}$, derart, daß der Durchschnitt $X\cdot Y$ zweier verschiedener Mengen $X,Y\in S$ immer zu $\boldsymbol{I}$ gehört, eine Mächtigkeit $<\mathfrak{p}$ hat.

Wir geben hier einige Sätze über $\mathfrak{p}$-saturierte Ideale, ohne sie genau zu beweisen.

Korollar 4.2. Für jeden Körper $\boldsymbol{K}$ ist $\mathcal{S}_0(\boldsymbol{K})=0$, $\mathcal{S}_1(\boldsymbol{K})=\{\boldsymbol{K}\}$ und $\mathcal{S}_2(\boldsymbol{K})=\mathcal{P}(\boldsymbol{K})+\{\boldsymbol{K}\}$; ist $\mathfrak{p}\geqslant 2$, so ist $\mathcal{P}(\boldsymbol{K})\subset\mathcal{S}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{K})\subset\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$; ist $\mathfrak{p}>\overline{\overline{\boldsymbol{K}}}$, so ist $\mathcal{S}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{K})=\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$. [Nach 3.1, 4.1].

Satz 4.3. Ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper, $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}\geqslant\aleph_0$ und $\mathfrak{p}\geqslant 2$, so ist $\overline{\overline{\mathcal{S}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{K})}}=2^{2^\mathfrak{k}}$. [Nach 2.29, 3.19, 4.2].

Satz 4.4. Ist $\boldsymbol{K}$ ein beliebiger Körper und $\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{q}$, so ist $\mathcal{S}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{K})\subset\mathcal{S}_\mathfrak{q}(\boldsymbol{K})$. [Nach 4.1].

Satz 4.5. Es sei $\mathfrak{p}=\aleph_0$ oder $\aleph_0\leqslant\mathfrak{p}^*<\mathfrak{p}$. Zu jedem Körper $\boldsymbol{K}$ und jedem Ideal $\boldsymbol{I}\in\mathcal{S}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{K})$ gibt es dann eine Zahl $\mathfrak{q}<\mathfrak{p}$, so daß $\boldsymbol{I}\in\mathcal{S}_\mathfrak{q}(\boldsymbol{K})$.

[1]) Der I. Teil dieser Arbeit, d. i. §§ 1–3, ist in Fund. Math. **32** (1938), SS. 45–63, erschienen; dort sind also insbesondere die unten zitierten Sätze zu finden, deren Nummern mit 1, 2 oder 3 beginnen (z. B. 3.1 oder 2.29).

[2]) Vgl. den I. Teil dieser Arbeit, S. 46, Anm. 1.

Der Beweis ist für $\mathfrak{p}=\aleph_0$ leicht, dagegen für $\mathfrak{p}^*<\mathfrak{p}$ ziemlich kompliziert; wir haben vor, ihn bei einer anderen Gelegenheit zu veröffentlichen.

Bemerkung 4.6. Die Behauptung des Satzes 4.5 kann auch in folgende (für jedes $\mathfrak{p}$ äquivalente, wenn auch scheinbar viel speziellere) Form gekleidet werden:

Ist $\boldsymbol{K}$ ein beliebiger Körper und ist $\overline{\overline{S}}<\mathfrak{p}$ für jedes System $S\subset\boldsymbol{K}$ von paarweise fremden Mengen, so gibt es eine Zahl $\mathfrak{q}<\mathfrak{p}$, derart daß $\overline{\overline{S}}<\mathfrak{q}$ für jedes System $S\subset\boldsymbol{K}$ von paarweise fremden Mengen.

Satz 4.5 läßt sich auf keine Zahl $\mathfrak{p}$ von der Form $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^+$ ausdehnen. Das Problem, ob dieser Satz für die regulären Limeszahlen, d. i. für die sog. im weiteren Sinne unerreichbaren Zahlen $\mathfrak{p}>\aleph_0$ gilt, bleibt dagegen offen (übrigens weiß man ja nicht, ob solche Zahlen überhaupt existieren) [1]).

Satz 4.7. Es sei $\boldsymbol{K}$ ein beliebiger Körper und $\boldsymbol{I}\subset\boldsymbol{K}$ ein Ideal. Damit $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$, ist notwendig, daß $\boldsymbol{I}$ folgender Bedingung genügt:

(i) *jedes System $S\subset\boldsymbol{K}-\boldsymbol{I}$ von paarweise fremden Mengen hat eine Mächtigkeit $<\mathfrak{p}$.*

Ist $\mathfrak{p}\leqslant\aleph_0$ oder $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$ oder $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})$ für ein $\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{p}$, so ist diese Bedingung auch hinreichend.

Der Beweis ist nicht schwer. Der erste Teil des Satzes ergibt sich unmittelbar aus 2.5 und 4.1. Um den zweiten Teil zu begründen, schließt man in indirekter Weise, wobei man den Wohlordnungssatz anwendet und aus Sätzen 2.5 und 2.11 Gebrauch macht.

Bemerkung 4.8. Ein Ideal $\boldsymbol{I}$, das der Bedingung (i) aus 4.7 genügt, braucht nicht im allgemeinen $\mathfrak{p}$-saturiert zu sein. Es sei z. B. $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper mit

$$\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}\geqslant\aleph_0,\quad \boldsymbol{I}=\underset{X}{E}[X\subset\sum(\boldsymbol{K})\ \textit{und}\ \overline{\overline{X}}<\mathfrak{k}],\quad \mathfrak{p}=\mathfrak{k}^+;$$

die Bedingung (i) ist dann sicher erfüllt und trotzdem kann man zeigen, daß $\boldsymbol{I}$ nicht $\mathfrak{p}$-saturiert ist [2]).

[1]) Vgl. meinen Aufsatz in Fund. Math. **30** (1938), S. 68 ff., insbesondere S. 70, Satz 3.

[2]) Das ergibt sich leicht aus einem Satz von Sierpiński über die Zerlegung einer Menge in fast disjunkte Teilmengen; vgl. W. Sierpiński, Fund. Math. **28** (1937), S. 115 ff.

Korollar 4.9. Für jeden vollständigen Körper $\boldsymbol{K}$ sind folgende Bedingungen äquivalent: (i) $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$; (ii) $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$ *und* $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})-\sum(\boldsymbol{I})}}<\mathfrak{p}$; (iii) *es gibt eine Menge* $Y\subset\sum(\boldsymbol{K})$, *für die* $\overline{\overline{Y}}<\mathfrak{p}$ *und* $\boldsymbol{I}=\underset{X}{E}[X\subset\sum(\boldsymbol{K})-Y]$ *ist. Ist insbesondere* $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}<\mathfrak{p}$, *so ist* $\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\subset\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$. [Nach 2.9, 4.7].

Satz 4.10. Ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper und $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}\geqslant\aleph_0$, so ist $\overline{\overline{\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}^{\mathfrak{p}}$ für $\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{k}$ und $=2^{\mathfrak{k}}$ für $\mathfrak{p}>\mathfrak{k}$. [Nach 1.16, 2.20, 4.9].

Satz 4.11. Ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper und $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}<\aleph_0$, so ist $\overline{\overline{\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})}}=\overline{\overline{\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})}}=\overline{\overline{\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})}}=\sum_{\mathfrak{x}<\mathfrak{p}}'\binom{\mathfrak{k}}{\mathfrak{x}}$ für $\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{k}$ und $=2^{\mathfrak{k}}$ für $\mathfrak{p}>\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{m}$ beliebig). [Nach 1.16, 2.13, 2.20, 4.9].

Der folgende Satz ist eine Ergänzung zu 3.14:

Satz 4.12. Ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper,

$$\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})-\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$$

und $\mathfrak{p}\leqslant\aleph_0$ oder $\mathfrak{m}>2^{\underline{\mathfrak{p}}}$, so gibt es ein Ideal $\boldsymbol{J}$, für das $\boldsymbol{I}\subset\boldsymbol{J}$ und

$$\boldsymbol{J}\epsilon\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})-\mathcal{H}(\boldsymbol{K}).$$

Beim Beweis kann man mit Rücksicht auf 2.12 und 4.5 annehmen, daß $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ und $\mathfrak{p}\neq\aleph_0$; man hat dann $\mathfrak{m}>2^{\underline{\mathfrak{p}}}$ für $\mathfrak{p}\leqslant\aleph_0$, und man braucht nicht den Fall $\mathfrak{p}\leqslant\aleph_0$ besonders zu betrachten. Ist nun $\mathfrak{m}$ keine Limeszahl, so gründet sich der Beweis auf Hilfssatz 11 aus der Arbeit *Überdeckungssätze...*, S. 147, und ist in großen Zügen dem Beweis von 3.9 analog. Der Fall einer singulären Limeszahl ($\mathfrak{m}^*<\mathfrak{m}$) wird durch 2.16 auf den vorhergehenden Fall zurückgeführt; wenn aber $\mathfrak{m}$ eine reguläre Limeszahl oder insbesondere $=\aleph_0$ ist, so muß man den ganzen Beweis der Hilfssätze 10 und 11 aus der zitierten Arbeit, S. 142 ff., mit geringen Modifikationen wiederholen.

Bemerkung 4.13. Unter der Voraussetzung: $\mathfrak{p}\leqslant\aleph_0$ (aber nicht $\mathfrak{m}>2^{\underline{\mathfrak{p}}}$) kann 4.12 auf beliebige Körper erstreckt werden; man muß nur annehmen, daß $\boldsymbol{I}\neq\boldsymbol{K}$ ist.

Sätze 3.14 und 4.12 bleiben gültig, wenn man in ihnen überall $\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$ durch $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}}(\boldsymbol{K})$ (wo $\mathfrak{n}$ eine vorgegebene Kardinalzahl ist) ersetzt.

Auf Grund von 4.12 läßt sich 3.9 folgendermaßen verschärfen:

Satz 4.14. *Ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper, $\mathfrak{p}\leqslant\aleph_0$ oder $\mathfrak{m}>2^{\mathfrak{p}}$ und ist die Zahl $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}$ von einer Zahl $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ aus schwach erreichbar, so ist $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})=\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$.* [Nach 2.12, 3.9, 4.12].

Im Grunde ist 4.14 nur eine Umformung des Hilfssatzes 12 aus *Überdeckungssätze...*, S. 149.

Satz 4.15. *Ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper, $\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{p}$ und ist die Zahl $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}$ von einer Zahl $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ aus stark erreichbar, so ist $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})=\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$.*

Mit Rücksicht auf 2.12 und 4.4 kann man beim Beweis dieses Satzes sich auf den Fall: $\mathfrak{k}\geqslant\mathfrak{m}=\mathfrak{p}\geqslant\aleph_0$ beschränken. Ist nun $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}$ keine Limeszahl, so schließt man analog wie im Beweis von 3.9, mit dem Unterschied, daß man anstatt des zweiten Überdeckungssatzes den ersten Teil von Korollar 1 aus derselben Arbeit (*Überdeckungssätze...*, S. 150) anwendet. Ist aber $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}$ eine Limeszahl, so zeigt man mit Hilfe von 1.18 und 1.20, daß dies eine singuläre Limeszahl ist (d. h. $\mathfrak{p}^*<\mathfrak{p}$); auf Grund von 2.14 und 4.5 wird dann dieser Fall auf den vorher betrachteten zurückgeführt.

Satz 4.16. *Sind die Voraussetzungen von 4.14 oder 4.15 erfüllt und ist $\mathfrak{k}\geqslant\aleph_0$, so ist $\overline{\overline{\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}^{\mathfrak{p}}$ für $\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{k}$ und $=2^{\mathfrak{k}}$ für $\mathfrak{p}>\mathfrak{k}$.*
[Nach 4.10, 4.14, 4.15].

Bemerkung 4.17. Außer den in 4.14–4.16 (und etwa 4.11) betrachteten Fällen ist die Mächtigkeit des Systems $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$ und die Natur der zu diesem System gehörigen Ideale noch unbekannt; man weiß z. B. nicht, ob die Voraussetzungen über die Erreichbarkeit der Zahl $\mathfrak{k}$ in 4.14–4.16 wesentlich sind, ob man in 4.15 das Wort „*stark*" durch „*schwach*" ersetzen darf usw.

Bemerkung 4.18. Wir wollen zur Erläuterung die erzielten Ergebnisse auf den Körper $\boldsymbol{K}$ aller Mengen reeller Zahlen (oder, allgemeiner, auf einen beliebigen vollständigen Körper $\boldsymbol{K}$ mit $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$) anwenden. Die Systeme $\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$, $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})$ für $\mathfrak{m}\leqslant\aleph_1$, $\mathcal{P}(\boldsymbol{K})$ und $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$ für $\mathfrak{p}\geqslant 2$ sind in diesem Fall von der Mächtigkeit $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ (2.28, 2.29, 3.19, 4.3); das System $\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$ ist von der Mächtigkeit $2^{\mathfrak{c}}$ (2.20). Das System $\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})$ deckt sich mit $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})$ für $\mathfrak{m}>\aleph_0$ und hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ (3.7, 3.9); in analoger Weise deckt sich $\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$ mit $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$ für $\mathfrak{m}>\aleph_0\geqslant\mathfrak{p}\geqslant 2$ und hat ebenfalls die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ (4.10, 4.14). Allgemein ist das System $\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$ von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}^{\mathfrak{p}}$ für $\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{c}$ (4.10); auf Grund der zusätzlichen Hypothese, daß $\mathfrak{c}$ von $\aleph_0$ stark erreichbar ist[1]), deckt sich dieses System mit $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$ für $\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{p}>\aleph_0$ (4.15). Wir vermögen dagegen nicht die Mächtigkeit von $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})$ für $\aleph_1<\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{c}$ zu bestimmen (falls es derartige Zahlen $\mathfrak{m}$ überhaupt gibt); auch ist die Mächtigkeit von $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$ für $\aleph_0<\mathfrak{m}<\mathfrak{p}\leqslant 2^{\mathfrak{c}}$ bisher nicht untersucht worden.

§ 5. Anwendungen auf das abstrakte Maßproblem.

Definition 5.1. *Ist $\boldsymbol{K}$ ein beliebiger Körper, so wird eine Funktion f als (endlich-additive) Maßfunktion in $\boldsymbol{K}$ bezeichnet, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) *der Vorbereich von f ist mit $\boldsymbol{K}$ identisch, der Nachbereich aber besteht aus reellen nicht-negativen Zahlen;*

(ii) *ist $X, Y\in\boldsymbol{K}$ und $X\cdot Y=0$, so ist $f(X+Y)=f(X)+f(Y)$;*

(iii) *es gibt eine Menge $X\in\boldsymbol{K}$, für die $f(X)\neq 0$;*

(iv) *ist $X\in\boldsymbol{At}(\boldsymbol{K})$, so ist $f(X)=0$.*

Das abstrakte Maßproblem (in seiner allgemein-mengentheoretischen Fassung) betrifft eben die Existenz von Funktionen, die den angegebenen Bedingungen genügen[2]).

Durch folgende Sätze wird der enge Zusammenhang zwischen den Maßfunktionen und gewissen Arten von Idealen aus Licht gebracht.

Satz 5.2. *Es sei $\boldsymbol{K}$ ein beliebiger Körper, f eine Maßfunktion in $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{I}=\underset{X}{E}[f(X)=0]$. Es gilt dann:*

(i) *$\boldsymbol{I}\in\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$, $\boldsymbol{I}\neq\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{At}(\boldsymbol{K})\subset\boldsymbol{I}$;*

(ii) *wenn $\sum(\boldsymbol{K})\in\boldsymbol{K}$ oder, insbesondere, wenn $\boldsymbol{K}$ vollständig ist, so ist $\boldsymbol{I}\in\mathcal{S}_{\aleph_1}(\boldsymbol{K})$.*

Beweis. (i) ergibt sich leicht aus 2.4 und 5.1. Um (ii) zu beweisen, nehmen wir an, daß $\sum(\boldsymbol{K})\in\boldsymbol{K}$ und daß trotzdem $\boldsymbol{I}\ non\in\mathcal{S}_{\aleph_1}(\boldsymbol{K})$. Laut 4.1 gibt es dann ein nicht-abzählbares System $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{K}-\boldsymbol{I}$, derart daß $X\cdot Y\in\boldsymbol{I}$ für zwei beliebige verschiedene

[1]) Zu dieser Hypothese vgl. W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*. Monogr. Mat. 4, Warszawa–Lwów 1934, S. 152 ff.

[2]) Vgl. hiezu z. B. *Überdeckungssätze...*, S. 152 ff., wo auch weitere Literaturangaben zu finden sind.

Mengen $X, Y \epsilon \boldsymbol{S}$. Hieraus schließt man in bekannter Weise, daß es eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ und eine unendliche Folge von Mengen $X_1, \ldots, X_n, \ldots \epsilon \boldsymbol{S}$ gibt, derart daß $f(X_n) \geqslant \varepsilon$ für jedes natürliche n. Setzen wir: $Y_1 = X_1$ und $Y_n = X_n - (X_1 + \ldots + X_{n-1})$ für $n \geqslant 2$. Nach 2.1 ist $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots \epsilon \boldsymbol{K}$. Man hat ferner:

$$X_n = Y_n + (X_1 \cdot X_n + \ldots + X_{n-1} \cdot X_n) \text{ und } Y_n \cdot (X_1 \cdot X_n + \ldots + X_{n-1} \cdot X_n) = 0$$

für $n \geqslant 2$, woraus nach 5.1 (ii) $f(X_n) = f(Y_n) + f(X_1 \cdot X_n + \ldots + X_{n-1} \cdot X_n)$. Alle Mengen $X_1 \cdot X_n, \ldots, X_{n-1} \cdot X_n$ gehören nun zu $\boldsymbol{I}$; wegen 2.5 gehört also auch $X_1 \cdot X_n + \ldots + X_{n-1} \cdot X_n$ zu $\boldsymbol{I}$, so daß $f(X_1 \cdot X_n + \ldots + X_{n-1} \cdot X_n) = 0$. Es gilt folglich $f(X_n) = f(Y_n) \geqslant \varepsilon$ für jedes n; da hierbei die Mengen $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ paarweise fremd sind, so ergibt sich aus 5.1 (ii), daß $f(Y_1 + \ldots + Y_n) = f(Y_1) + \ldots + f(Y_n) \geqslant n \cdot \varepsilon$. Mit Hilfe von 5.1 (i), (ii) gewinnt man hieraus: $f(\sum(\boldsymbol{K})) \geqslant n \cdot \varepsilon$; da dies für jedes natürliche n gilt, so kann nicht $f(\sum(\boldsymbol{K}))$ eine (endliche) reelle Zahl sein, im Widerspruch zu 5.1 (i). Dadurch ist unsere Annahme widerlegt und (ii) ist bewiesen.

Hilfssatz 5.3. Ist $\boldsymbol{K}$ *ein beliebiger Körper und* $\boldsymbol{I} \epsilon \mathcal{S}_{\aleph_0}(\boldsymbol{K})$, *so gibt es ein endliches System* $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{K} - \boldsymbol{I}$ *von paarweise fremden Mengen, das folgender Bedingung genügt: jeder Menge* $X \epsilon \boldsymbol{K}$ *entspricht genau ein System* $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{S}$, *derart daß* $X - \sum(\boldsymbol{Y}) \epsilon \boldsymbol{I}$ *und* $\sum(\boldsymbol{Y}) - X \epsilon \boldsymbol{I}$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{p}$ die kleinste Zahl, für die $\boldsymbol{I} \epsilon \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{K})$; aus 4.2 und 4.5 folgt, daß $1 \leqslant \mathfrak{p} < \aleph_0$. Nach 4.7 gibt es ein System $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{K} - \boldsymbol{I}$, das aus $\mathfrak{p}-1$ paarweise fremden Mengen besteht; es gibt aber kein derartiges System von einer Mächtigkeit $> \mathfrak{p}-1$. Wir betrachten nun eine beliebige Menge $X \epsilon \boldsymbol{K}$ und setzen

$$\text{(1)} \qquad \boldsymbol{Y} = \underset{Z}{E}[Z \epsilon \boldsymbol{S} \text{ und } Z - X \epsilon \boldsymbol{I}].$$

Wie leicht zu zeigen, ist

$$\text{(2)} \qquad X - \sum(\boldsymbol{S}) \epsilon \boldsymbol{I};$$

sonst wäre nämlich $\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S} + \{X - \sum(\boldsymbol{S})\}$ ein System $\subset \boldsymbol{K} - \boldsymbol{I}$ von paarweise fremden Mengen mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{\boldsymbol{S}_1}} > \mathfrak{p}-1$. In analoger Weise schließt man aus (1):

$$\text{(3)} \qquad X \cdot Z \epsilon \boldsymbol{I} \text{ für jedes } Z \epsilon \boldsymbol{S} - \boldsymbol{Y}.$$

Da hiebei $\boldsymbol{S}$ endlich ist und

$$X - \sum(\boldsymbol{Y}) \subset X - \sum(\boldsymbol{S}) + \sum_{Z \epsilon \boldsymbol{S} - \boldsymbol{Y}} (X \cdot Z),$$

so erhält man aus (1) und (2) mit Hilfe von 2.4 und 2.5: $X - \sum(\boldsymbol{Y}) \epsilon \boldsymbol{I}$. Aus (1) und 2.5 folgt ferner auch $\sum(\boldsymbol{Y}) - X \epsilon \boldsymbol{I}$.

Es sei nun $\boldsymbol{Y}_1$ ein anderes Teilsystem von $\boldsymbol{S}_1$ für das $X - \sum(\boldsymbol{Y}_1) \epsilon \boldsymbol{I}$ und $\sum(\boldsymbol{Y}_1) - X \epsilon \boldsymbol{I}$. Man hat dann offenbar

$$\sum(\boldsymbol{Y}) - \sum(\boldsymbol{Y}_1) \subset (\sum(\boldsymbol{Y}) - X) + (X - \sum(\boldsymbol{Y}_1)) \epsilon \boldsymbol{I},$$

folglich $\sum(\boldsymbol{Y}) - \sum(\boldsymbol{Y}_1) \epsilon \boldsymbol{I}$ und analog $\sum(\boldsymbol{Y}_1) - \sum(\boldsymbol{Y}) \epsilon \boldsymbol{I}$. Da das System $\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}_1 \subset \boldsymbol{K} - \boldsymbol{I}$ aus paarweise fremden Mengen besteht, so gewinnt man hieraus leicht $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{Y}_1 \subset \boldsymbol{Y}$, d. i. $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_1$.

Somit entspricht jeder Menge $X \epsilon \boldsymbol{K}$ genau ein System $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{S}$, für das $X - \sum(\boldsymbol{Y}), \sum(\boldsymbol{Y}) - X \epsilon \boldsymbol{I}$; das System $\boldsymbol{S}$ hat also alle behaupteten Eigenschaften.

Satz 5.4. Damit — unter den Voraussetzungen von 5.2 — die Funktion f *nur endlich viele, bzw. nur zwei, verschiedene Werte annimmt, ist notwendig und hinreichend, daß* $\boldsymbol{I} \epsilon \mathcal{S}_{\aleph_0}(\boldsymbol{K})$, *bzw.* $\boldsymbol{I} \epsilon \mathcal{P}(\boldsymbol{K})$.

Beweis. Setzen wir zunächst voraus, daß f nur endlich viele verschiedene Werte annimmt. a sei die kleinste und b die größte der Zahlen $x \neq 0$, denen eine Menge $X \epsilon \boldsymbol{K}$ mit $f(X) = x$ entspricht. Ist nun $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine beliebige Folge von paarweise fremden Mengen des Systems $\boldsymbol{K} - \boldsymbol{I}$, so hat man offenbar wegen 5.1 (ii)

$$b \geqslant f(X_1 + \ldots + X_n) = f(X_1) + \ldots + f(X_n) \geqslant n \cdot a,$$

wonach $n \leqslant b/a$. Hieraus ersieht man leicht, daß es kein unendliches System von paarweise fremden Mengen gibt; nach 4.7 ist also $\boldsymbol{I} \epsilon \mathcal{S}_{\aleph_0}(\boldsymbol{K})$.

Wenn umgekehrt $\boldsymbol{I} \epsilon \mathcal{S}_{\aleph_0}(\boldsymbol{K})$ ist, so gibt es ein endliches System $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{K}$, das der Behauptung von 5.3 genügt: jeder Menge $X \epsilon \boldsymbol{K}$ entspricht ein System $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{S}$, für das $X - \sum(\boldsymbol{Y}) \epsilon \boldsymbol{I}$ und $\sum(\boldsymbol{Y}) - X \epsilon \boldsymbol{I}$. Im Einklang mit 5.1 (ii) folgt hieraus, daß

$$f(X) = f(X \cdot \sum(\boldsymbol{Y})) + f(X - \sum(\boldsymbol{Y})) = f(X \cdot \sum(\boldsymbol{Y}))$$

und

$$f(\sum(\boldsymbol{Y})) = f(X \cdot \sum(\boldsymbol{Y})) + f(\sum(\boldsymbol{Y}) - X) = f(X \cdot \sum(\boldsymbol{Y})),$$

wonach $f(X) = f(\sum(\boldsymbol{Y}))$. Der Nachbereich von f ist also endlich: er besteht aus allen Zahlen $f(\sum(\boldsymbol{Y}))$, wo $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{S}$.

Im Fall, wenn f nur zwei Werte annimmt, bzw. $\boldsymbol{I}$ ein Primideal ist, ist die Schlußweise analog, aber noch einfacher (anstatt auf 5.3 stützt man sich unmittelbar auf die Definition 3.1). Damit ist der Beweis zu Ende geführt.

Satz 5.4 läßt sich in gewissem Sinne umkehren:

Satz 5.5. Es sei K *ein beliebiger Körper. Ist* $I\,\epsilon\,\mathcal{S}_{\aleph_0}(K)$, $I \neq K$ *und* $At(K)\subset I$, *so gibt es eine Maßfunktion* f *in* K, *für die* $I=\underset{X}{E}[f(X)=0]$ *gilt. Ist insbesondere* $I\,\epsilon\,\mathcal{P}(K)$ *und* $At(K)\subset I$, *so kann die Maßfunktion* f *durch die Formeln:*

$$f(X)=0 \quad \text{für} \quad X\,\epsilon\, I, \qquad f(X)=1 \quad \text{für} \quad X\,\epsilon\, K-I$$

bestimmt werden.

Beweis. Es sei S ein System, das der Behauptung von 5.3 genügt. Wir ordnen ganz willkürlich jeder Menge $Z\,\epsilon\, S$ eine Zahl $f(Z)>0$ zu und setzen dann: $f(X)=\sum_{Z\,\epsilon\, Y} f(Z)$ für $X\,\epsilon\, K-S$, wo Y dasjenige Teilsystem von S ist, für welches $X-\sum(Y), \sum(Y)-X\,\epsilon\, I$ (wenn insbesondere $X\,\epsilon\, I$, so ist, wie leicht ersichtlich, $Y=0$ und demnach $f(X)=0$). Man zeigt mühelos auf Grund von 5.1, daß die dadurch bestimmte Funktion f eine Maßfunktion in K ist und daß $I=\underset{X}{E}[f(X)=0]$, w. z. b. w.

Bemerkung 5.6. Wenn man die Beweise von 5.4 und 5.5 etwas näher analysiert, so ersieht man, daß die beiden Sätze präziser gefaßt werden können. Ist nämlich f eine Maßfunktion in K und $\mathfrak{p}$ die kleinste Kardinalzahl $\leqslant\aleph_0$, für die $I=\underset{X}{E}[f(X)=0]\,\epsilon\, S_{\mathfrak{p}}(K)$, so hat der Nachbereich von f eine Mächtigkeit $\geqslant\mathfrak{p}$ und $\leqslant 2^{\mathfrak{p}-1}$; und zwar kann man zu jeder Zahl $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{m}\leqslant 2^{\mathfrak{p}-1}$, eine Maßfunktion f angeben, die genau $\mathfrak{m}$ verschiedene Werte annimmt.

Das Problem, ob man in 5.5 $\aleph_0$ durch $\aleph_1$ ersetzen darf, steht noch offen.

Satz 5.7. Für jeden Körper K *sind folgende Bedingungen äquivalent:* (i) *es gibt eine Maßfunktion in* K; (ii) *es gibt eine Maßfunktion in* K, *die nur zwei verschiedene Werte annimmt;* (iii) *es gibt ein unendliches System* $S\subset K$ *von paarweise fremden Mengen und eine Menge* $X\,\epsilon\, K$, *für die* $\sum(S)\subset X$. *Alle diese Bedingungen sind erfüllt, wenn* K *unendlich ist und* $\sum(K)$ *zu* K *gehört.* [Nach 3.15, 5.2 (i), 5.5].

Bemerkung 5.8. Man könnte in 5.1 die Bedingung (iv) durch folgende Bedingung ersetzen:

(iv′) *ist* $X, Y\,\epsilon\, At(K)$, *so ist* $f(X)=f(Y)$.

Die Bedingung (iv) und (iv′) sind äquivalent, wenn K unendlich viele Atome enthält. Im allgemeinen ist aber (iv′) schwächer als (iv): man kann leicht zeigen, daß es in jedem endlichen Körper Funktionen gibt, die den Bedingungen 5.1 (i)-(iii) und (iv′) genügen, während auf Grund von 5.7 Maßfunktionen im ursprünglichen Sinne nur in unendlichen Körpern existieren können.

Aus 5.7 ergibt sich insbesondere die Existenz von Maßfunktionen in jedem unendlichen vollständigen Körper. Man kann aber noch weiter gehen und zwar die Anzahl dieser Maßfunktionen bestimmen:

Satz 5.9. Ist K *ein vollständiger Körper und* $\overline{\overline{\sum(K)}}=\mathfrak{k}\geqslant\aleph_0$, *so hat sowohl das System* $\mathcal{M}$ *aller Maßfunktionen in* K *als auch das System* $\mathcal{M}_1$ *derjenigen Maßfunktionen, welche nur zwei Werte annehmen, die Mächtigkeit* $2^{2^{\mathfrak{k}}}$ [1]).

Beweis. Dem Satz 3.6 zufolge deckt sich in jedem vollständigen Körper K das System der Primideale, die alle Atome von K enthalten, mit $\mathcal{P}(K)-\mathcal{H}(K)$. Gemäß 5.5 kann man also jedem Ideal $I\,\epsilon\,\mathcal{P}(K)-\mathcal{H}(K)$ eine Funktion $f\,\epsilon\,\mathcal{M}_1\subset\mathcal{M}$ eineindeutig zuordnen, wonach $\overline{\overline{\mathcal{P}(K)-\mathcal{H}(K)}}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{M}_1}}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{M}}}$. Da wegen 3.7 und 3.19 $\overline{\overline{\mathcal{P}(K)-\mathcal{H}(K)}}=2^{2^{\mathfrak{k}}}-\mathfrak{k}=2^{2^{\mathfrak{k}}}$, so hat man ferner $2^{2^{\mathfrak{k}}}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{M}_1}}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{M}}}$. Nach den allgemeinen Sätzen der Mengenlehre hat anderseits das System aller Funktionen, deren Vorbereich gleich K ist und deren Nachbereich aus reellen Zahlen besteht, die Mächtigkeit $\mathfrak{c}^{2^{\mathfrak{k}}}=2^{\aleph_0\cdot 2^{\mathfrak{k}}}=2^{2^{\mathfrak{k}}}$. Hieraus $\overline{\overline{\mathcal{M}}}\leqslant 2^{2^{\mathfrak{k}}}$ und schließlich $\overline{\overline{\mathcal{M}}}=\overline{\overline{\mathcal{M}_1}}=2^{2^{\mathfrak{k}}}$, w. z. b. w.

Bemerkung 5.10. Als eine absolut- (oder abzählbar-) additive Maßfunktion im Körper K wird eine Funktion f bezeichnet, die neben den Bedingungen (i)-(iv) aus 5.1 noch folgende Bedingung (eine Verschärfung von 5.1(ii)) erfüllt:

(ii′) *ist* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *eine unendliche Folge von paarweise fremden Mengen des Körpers* K, *so ist* $X_1+\ldots+X_n+\ldots\,\epsilon\, K$ *und* $f(X_1+\ldots+X_n+\ldots)=f(X_1)+\ldots+f(X_n)+\ldots$

[1]) Für $\mathfrak{k}=\mathfrak{c}$ wurde dieser Satz (unter Einschränkung auf das System $\mathcal{M}$) von G. Fichtenholz und L. Kantorowitch in Stud. Math. **5** (1934), S. 83 ff. bewiesen.

Unter den Voraussetzungen von 5.2 ist offenbar die Bedingung: $I \epsilon \mathcal{A}_{\aleph_1}(\boldsymbol{K})$ notwendig dafür, daß f eine absolut-additive Maßfunktion ist. Wenn der Körper $\boldsymbol{K}$ selbst $\aleph_1$-additiv ist und f nur endlich viele Werte annimmt, so kann man mit Hilfe von 5.3 zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist; das ermöglicht uns, Satz 5.5 auf absolut-additive Maßfunktionen zuerstrecken. Das am Ende von 5.6 erwähnte Problem wird aber für die absolut-additiven Maßfunktionen in negativer Weise gelöst: man kann einen ($\aleph_1$-additiven) Körper $\boldsymbol{K}$ und ein Ideal $I \epsilon \mathcal{A}_{\aleph_1}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{S}_{\aleph_1}(\boldsymbol{K})$ angeben, derart daß es keine absolut-additive Maßfunktion f in $\boldsymbol{K}$ gibt, für die $I \subset \underset{X}{E}[f(X)=0]$ ist (das gilt z. B. für den Körper $\boldsymbol{K}$ aller Borelschen Mengen eines euklidischen Raumes und für das Ideal I der Borelschen Mengen erster Kategorie [1])).

Satz 5.7 kann folgendermaßen ergänzt werden:

Damit es in dem gegebenen Körper $\boldsymbol{K}$ eine (endlich-, aber) nicht absolut-additive Maßfunktion gibt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine unendliche Folge von nicht-leeren paarweise fremden Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \epsilon \boldsymbol{K}$ und eine Menge $Y \epsilon \boldsymbol{K}$ gibt, für die $X_1 + \ldots + X_n + \ldots \subset Y$ gilt.

Im Gegensatz dazu wurde bisher kein allgemeines Kriterium für die Existenz von absolut-additiven Maßfunktionen aufgestellt. Es sind aber gewisse allgemeine Sätze über die Nicht-Existenz derartigen Maßfunktionen in vollständigen Mengenkörpern bekannt; diese Sätze können leicht aus 4.14 ($\mathfrak{m}=\aleph_1$, $\mathfrak{p}=\aleph_0$) und 4.15 ($\mathfrak{m}=\aleph_1$) abgeleitet werden [2]).

§ 6. Anwendungen auf die Topologie.

Wir wollen hier zum Schluß auf einige topologische Anwendungen der in §§ 2 und 3 erzielten Ergebnisse hinweisen.

Wir brauchen dazu den Begriff der Isomorphie zweier Mengenkörper.

Definition 6.1. Man sagt, daß die Funktion F eine Isomorphie zwischen den Körpern $\boldsymbol{K}_1$ und $\boldsymbol{K}_2$ herstellt, wenn der Vorbereich von F gleich $\boldsymbol{K}_1$, der Nachbereich gleich $\boldsymbol{K}_2$ ist und wenn dabei die Formeln: $X \subset Y$ und $F(X) \subset F(Y)$ für beliebige $X, Y \epsilon \boldsymbol{K}_1$ äquivalent sind. Gibt es eine Funktion F von dieser Beschaffenheit, so heißen die Körper $\boldsymbol{K}_1$ und $\boldsymbol{K}_2$ (zueinander) isomorph.

Korollar 6.2. Jede Funktion F, die eine Isomorphie zwischen den Körpern $\boldsymbol{K}_1$ und $\boldsymbol{K}_2$ herstellt, ist eineindeutig; sind $\boldsymbol{K}_1$ und $\boldsymbol{K}_2$ isomorph, so ist $\overline{\overline{\boldsymbol{K}_1}} = \overline{\overline{\boldsymbol{K}_2}}$. [Nach 6.1].

[1]) Das ergibt sich aus den Untersuchungen von E. Szpilrajn in Fund. Math. **21** (1933), S. 226 ff., und Fund. Math. **22** (1934), S. 304 ff.

[2]) Vgl. S. 55, Anm. 2.

Korollar 6.3. Jeder Körper $\boldsymbol{K}$ ist zu sich selbst isomorph; ist $\boldsymbol{K}_1$ zu $\boldsymbol{K}_2$ isomorph, so auch $\boldsymbol{K}_2$ zu $\boldsymbol{K}_1$; sind $\boldsymbol{K}_1$ und $\boldsymbol{K}_2$ zu $\boldsymbol{K}_3$ isomorph, so sind sie auch zueinander isomorph. [Nach 6.1, 6.2].

Satz 6.4. Es sei $\boldsymbol{K}_1$ ein beliebiger und $\boldsymbol{K}_2$ ein vollständiger Körper. Damit $\boldsymbol{K}_1$ und $\boldsymbol{K}_2$ isomorph sind, ist notwendig und hinreichend, daß sie folgenden Bedingungen genügen:

(i) *zu jeder nicht-leeren Menge $X \epsilon \boldsymbol{K}_1$ gibt es eine Menge $Y \epsilon \boldsymbol{At}(\boldsymbol{K}_1)$, für die $Y \subset X$;*

(ii) *zu jedem System $S \subset \boldsymbol{K}_1$ gibt es die kleinste Menge $X \epsilon \boldsymbol{K}_1$, für die $S \subset \underset{Y}{E}[Y \subset X]$;*

(iii) $\overline{\overline{\boldsymbol{At}(\boldsymbol{K}_1)}} = \overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K}_2)}}$.

Der Satz ist bekannt, und sein Beweis ist leicht [1]).

Bemerkung 6.5. Ein Körper, der die Bedingung 6.4(i) erfüllt, heißt atomar; ein Körper, der 6.4(ii) erfüllt, kann als absolut-additiv (im weiteren Sinne) bezeichnet werden.

Korollar 6.6. Damit zwei vollständige Körper $\boldsymbol{K}_1$ und $\boldsymbol{K}_2$ isomorph sind, ist notwendig und hinreichend, daß $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K}_1)}} = \overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K}_2)}}$. [Nach 2.3, 6.4].

Im folgenden werden wir mit gewissen topologischen Begriffen zu tun haben [2]). Wir wollen eine Menge R als topologischen Raum bezeichnen, wenn jedem Element $x \epsilon R$ ein System $\boldsymbol{U}_x$ von Mengen $X \subset R$, den sog. Umgebungen des Punktes x, in der Weise zugeordnet ist, daß dabei die vier Hausdorffschen Axiome erfüllt sind. Mit Hilfe des Begriffs der Umgebung werden in bekannter Weise andere topologische Begriffe definiert. Wir bezeichnen insbesondere mit $\overline{X}$ die abgeschlossene Hülle einer Menge $X \subset R$, mit $Is(X)$ die Menge der isolierten Punkte von X, mit $\boldsymbol{F}(R)$, bzw. $\boldsymbol{G}(R)$, das System der abgeschlossenen, bzw. der offenen, Mengen $X \subset R$. Auch der Begriff der Homöomorphie zweier Räume wird als bekannt vorausgesetzt.

Es werden uns topologische Räume interessieren, die einer (oder mehreren) der folgenden Bedingungen genügen:

$\mathcal{B}_1$. *Zu jedem System $S \subset \boldsymbol{G}(R)$ mit $\sum(S)=R$ gibt es ein endliches Teilsystem S_1 mit $\sum(S_1)=R$.*

$\mathcal{B}_2$. *Zu je zwei disjunkten Mengen $X, Y \epsilon \boldsymbol{F}(R)$ gibt es eine Menge $Z \epsilon \boldsymbol{G}(R)$, für die $X \subset Z$ und $Y \cdot \overline{Z} = 0$.*

$\mathcal{B}'_2$. *Zu je zwei disjunkten Mengen $X, Y \epsilon \boldsymbol{F}(R)$ gibt es eine Menge $Z \epsilon \boldsymbol{F}(R) \cdot \boldsymbol{G}(R)$, für die $X \subset Z$ und $G \cdot Z = 0$.*

$\mathcal{B}_3$. *Ist $X \epsilon \boldsymbol{G}(R)$, so ist auch $\overline{X} \epsilon \boldsymbol{G}(R)$.*

$\mathcal{B}'_3$. *Zu jedem System $S \subset \boldsymbol{F}(R) \cdot \boldsymbol{G}(R)$ gibt es die kleinste Menge $X \epsilon \boldsymbol{F}(R) \cdot \boldsymbol{G}(R)$, für die $\sum(S) \subset X$.*

$\mathcal{B}_4$. *$\overline{Is(R)} = R$ (m. a. W. die Menge $Is(R)$ ist im Raum R dicht).*

[1]) Vgl. hiezu meine Arbeit in Fund. Math. **24** (1935), S. 197 f.

[2]) Zum folgenden vgl. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, S. 209 ff. Alle unten angegebenen Sätze gelten übrigens auch für diejenigen Räume, in denen Axiome I–III von C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Mat. **3**, Warszawa-Lwów 1933, S. 15 erfüllt sind.

Ein topologischer Raum, der die Bedingung $\mathcal{B}_1$, bzw. $\mathcal{B}_2$, bzw. $\mathcal{B}_2'$ erfüllt, wird bikompakt, bzw. normal, bzw. 0-dimensional genannt.

Hilfssatz 6.7. Jeder topologischer Raum R, der die Bedingungen $\mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}_3$ erfüllt, erfüllt auch B_2' und B_3', und umgekehrt.

Beweis. Nehmen wir an, R erfülle $\mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}_3$. Ist $X, Y \in \mathbf{F}(R)$, und $X \cdot Y = 0$, so gibt es nach $\mathcal{B}_2$ eine Menge $Z \in \mathbf{G}(R)$, für die $X \subset Z$ und $Y \cdot \overline{Z} = 0$; wegen $\mathcal{B}_3$ hat man dann: $\overline{Z} \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$, $X \subset \overline{Z}$ und $Y \cdot \overline{Z} = 0$, und $\mathcal{B}_2'$ ist erfüllt. Ist ferner $S \subset \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$, so setzt man $X = \overline{\sum(S)}$ und man zeigt leicht mit Hilfe von $\mathcal{B}_3$, daß X die kleinste Menge des Systems $\mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ ist, für die $\sum(S) \subset X$; dadurch ist $\mathcal{B}_3'$ gewonnen.

Setzen wir nun voraus, R erfülle $\mathcal{B}_2'$ und $\mathcal{B}_3'$. Aus $\mathcal{B}_2'$ erhält man unmittelbar $\mathcal{B}_2$. Um $\mathcal{B}_3$ abzuleiten, betrachten wir eine beliebige Menge $X \in \mathcal{G}(R)$; es sei $S = \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R) \cdot \underset{Y}{E}[Y \subset X]$. Nach $\mathcal{B}_3'$ gibt es die kleinste Menge $X_1 \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$, für die $\sum(S) \subset X_1$. Nehmen wir an, daß $X \, non \subset X_1$. Es gibt dann ein Element $x \in X - X_1$. Man hat offenbar $X - X_1 \in \mathbf{G}(R)$, folglich $R - (X - X_1) \in \mathbf{F}(R)$ und auch $\{x\} \in \mathbf{F}(R)$; hiebei sind die Mengen $\{x\}$ und $R - (X - X_1)$ disjunkt. Nach $\mathcal{B}_2'$ gibt es also eine Menge $Z \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$, für die $\{x\} \subset Z$ und $[R - (X - X_1)] \cdot Z = 0$. Daraus gewinnt man: $Z \neq 0$, $Z \subset X$ und $Z \cdot X_1 = 0$, wonach $Z \in S$ und $Z \, non \subset X_1$; das ist aber unmöglich, da X_1 alle Mengen des Systems S umfaßt. Dadurch ist unsere Annahme widerlegt, und es gilt $X \subset X_1$; hieraus ergibt sich $\overline{X} \subset \overline{X}_1 = X_1$ (da ja X_1 abgeschlossen ist). In analoger Weise kann die inverse Inklusion $X_1 \subset \overline{X}$ gewonnen werden (wäre sie nämlich nicht erfüllt, so könnte man eine nicht-leere offene und abgeschlossene Menge $Z \subset X_1 - X$ konstruieren, und man hätte dann $X_1 - Z \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ sowie $\sum(S) \subset X \cdot X_1 \subset X_1 - Z$; das ist aber unmöglich, weil X_1 die kleinste offene und abgeschlossene Menge ist, für die $\sum(S) \subset Z$). Die Inklusionen $\overline{X} \subset X_1$ und $X_1 \subset \overline{X}$ ergeben sofort $\overline{X} = X_1$; hienach ist $\overline{X} \in \mathbf{G}(R)$. Der Raum R genügt also der Bedingung $\mathcal{B}_3$, und der Beweis ist zu Ende geführt.

Die Möglichkeit, die Ergebnisse der Theorie der Mengenkörper auf die Topologie anzuwenden, ergibt sich aus den Untersuchungen von Stone[1]). Wir führen hier die betreffenden Sätze von Stone an (sie knüpfen an die elementare Tatsache an, daß in jedem topologischen Raum das System der zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen einen Körper bildet).

Satz 6.8. Es sei $\mathbf{K}$ ein beliebiger Körper, der $\sum(\mathbf{K})$ als Element enthält. Wir setzen: $\mathcal{F}(X) = \underset{I}{E}[\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ und $X \, non \in \mathbf{I}]$ für jedes $X \in \mathbf{K}$ und bezeichnen als eine Umgebung eines Ideals $\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ jede Menge $\mathcal{U} = \mathcal{F}(X)$, wo $X \in \mathbf{K} - \mathbf{I}$. Auf Grund dieses Konwention wird die Menge $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbf{K})$ zu einem bikompakten 0-dimensionalen topologischen Raum; durch die Funktion $\mathcal{F}$ wird eine Isomorphie zwischen $\mathbf{K}$ und dem Körper $\mathbf{F}(\mathcal{R}) \cdot \mathbf{G}(\mathcal{R})$ hergestellt.

---

[1]) Vgl. M. H. Stone, Proc. Nat. Ac. Sc. **20** (1934), S. 198, Theoreme IV_1-IV_3. Stone spricht nicht über die 0-dimensionalen Räume im Sinne von $\mathcal{B}_3'$, sonder über die total-unzusammenhängenden Räume; vgl. hiezu A. Mostowski, Fund. Math. **29** (1937), S. 45, Korollar 3c. In einer neuen Arbeit von Stone, Trans. Am. Math. Soc. **41** (1937), S. 375 ff., liegt eine allgemeinere Fassung der betreffenden Ergebnisse vor.

Satz 6.9. Sind die Voraussetzungen von 6.8 erfüllt und setzt man $\mathcal{G}(\mathbf{I}) = \sum_{X \in \mathbf{I}} \mathcal{F}(X)$ für jedes $\mathbf{I} \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$, so wird durch die Funktion $\mathcal{G}$ das System $\mathcal{I}(\mathbf{K})$ auf das System $\mathbf{G}(\mathcal{R})$ in eineindeutiger Weise abgebildet.

Satz 6.10. Zwei bikompakte und 0-dimensionale topologische Räume R_1 und R_2 sind dann und nur dann homöomorph, wenn die Körper $\mathbf{F}(R_1) \cdot \mathbf{G}(R_1)$ und $\mathbf{F}(R_2) \cdot \mathbf{G}(R_2)$ isomorph sind.

Wir wollen nun einige Eigenschaften derjenigen topologischen Räume angeben, welche auf Grund von 6.8 den vollständigen Körpern zugeordnet sind. Es stellt sich zunächst heraus, daß für diese Räume die oben angegebenen Bedingungen $\mathcal{B}_1$—$\mathcal{B}_4$ charakteristisch sind (s. 6.12).

Hilfssatz 6.11. Für jeden 0-dimensionalen topologischen Raum gilt:

(i) $\mathbf{At}\left(\mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)\right) = \underset{\{x\}}{E}[x \in \mathbf{Is}(R)]$;

(ii) *der Körper $\mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ ist dann und nur dann zu dem vollständigen Körper $\mathbf{K}$ isomorph, wenn R die Bedingungen $\mathcal{B}_3$ (bzw. $\mathcal{B}_3'$) und $\mathcal{B}_4$ erfüllt und wenn dabei $\overline{\overline{Is(R)}} = \overline{\overline{\sum(\mathbf{K})}}$.*

Beweis. Mit Rücksicht auf 2.2 hat man zunächst für einen ganz beliebigen Raum R:

(1) $\underset{\{x\}}{E}[x \in \mathbf{Is}(R)] \subset \mathbf{At}\left(\mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)\right)$.

Ist R 0-dimensional, so gilt ferner:

(2) *in jeder nicht-leeren Menge $X \in \mathbf{G}(R)$ ist eine nicht-leere Menge $Z \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ enthalten; wenn dabei X aus mehr als einem Punkt besteht, so ist $Z \neq X$.*

Besteht, in der Tat, X nur aus einem Punkt, so ist $X \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ und man setzt einfach $Z = X$. Wenn aber X zwei verschiedene Punkte, sagen wir x und y, enthält, so sind $\{x\}$ und $R - X + \{y\}$ zwei disjunkte abgeschlossene Mengen; nach $\mathcal{B}_2'$ gibt es dann eine Menge $Z \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$, für die $\{x\} \subset Z$ und $(R - X + \{y\}) \cdot Z = 0$, folglich $Z \neq 0$, $Z \subset X$ und $Z \neq X$.

Aus (1) und (2) gewinnt man sofort mit Hilfe von 2.2 den ersten Teil der Behauptung. Um den zweiten Teil zu erhalten, wendet man 6.4 auf die Körper $\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ und $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}$ an. Mit Rücksicht auf (2) und den ersten Teil der Behauptung geht 6.4 (i) in $\mathcal{B}_4$ über und 6.4 (iii) in die Formel: $\overline{\overline{Is(R)}} = \overline{\overline{\sum(\mathbf{K})}}$; 6.4 (ii) deckt sich mit der Bedingung $\mathcal{B}_3'$, die für 0-dimensionale Räume mit $\mathcal{B}_3$ äquivalent ist (vgl. 6.7). Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 6.12. Ist $\mathbf{K}$ ein vollständiger Körper und sind die Voraussetzungen von 6.8 erfüllt, so genügt der Raum $\mathcal{R}$ den Bedingungen $\mathcal{B}_1$—$\mathcal{B}_4$, und es gilt $\overline{\overline{Is(\mathcal{R})}} = \overline{\overline{\sum(\mathbf{K})}}$. [Nach 6.7, 6.8, 6.11].

Korollar 6.13[1]. *Zu jeder Kardinalzahl $\mathfrak{k}$ gibt es einen topologischen Raum R, der die Bedingungen $\mathscr{B}_1-\mathscr{B}_4$ erfüllt und für den $\overline{\overline{Is(R)}}=\mathfrak{k}$ ist.* [Nach 6.12].

Setzt man insbesondere in diesem Korollar $\mathfrak{k}=\aleph_0$, so gewinnt man ein Beispiel eines normalen separablen, aber nicht-metrisierbaren topologischen Raumes.

Satz 6.14. Zwei topologische Räume R_1 und R_2, die den Bedingungen $\mathscr{B}_1-\mathscr{B}_4$ genügen, sind dann und nur dann homöomorph, wenn $\overline{\overline{Is(R_1)}}=\overline{\overline{Is(R_2)}}$.

Beweis. Es seien $\boldsymbol{K}_1$ und $\boldsymbol{K}_2$ zwei vollständige Körper, für die

(1) $\overline{\overline{Is(R_1)}}=\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K}_1)}}$ *und* $\overline{\overline{Is(R_2)}}=\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K}_2)}}$.

Aus 6.7, 6.11 und (1) folgt:

(2) $\boldsymbol{K}_1$ *ist zu* $\boldsymbol{F}(R_1)\cdot\boldsymbol{G}(R_1)$ *isomorph und* $\boldsymbol{K}_2$ *zu* $\boldsymbol{F}(R_2)\cdot\boldsymbol{G}(R_2)$.

Betrachten wir nun folgende Bedingungen: (i) R_1 und R_2 sind homöomorph; (ii) $\boldsymbol{F}(R_1)\cdot\boldsymbol{G}(R_1)$ und $\boldsymbol{F}(R_2)\cdot\boldsymbol{G}(R_2)$ sind isomorph, (iii) $\boldsymbol{K}_1$ und $\boldsymbol{K}_2$ sind isomorph, (iv) $\overline{\overline{Is(R_1)}}=\overline{\overline{Is(R_2)}}$. Nach 6.10 und 6.7 sind (i) und (ii) äquivalent; nach 6.3 und (2) sind (ii) und (iii) äquivalent; aus 6.6 und (1) ergibt sich schließlich die Äquivalenz von (iii) und (iv). Demnach sich auch (i) und (iv) äquivalent, w. z. b. w.

Satz 6.15. Erfüllt der topologische Raum R die Bedingungen $\mathscr{B}_1-\mathscr{B}_4$ und ist $\overline{\overline{Is(R)}}=\mathfrak{k}\geqslant\aleph_0$, so ist $\overline{\overline{R}}=\overline{\overline{\boldsymbol{F}(R)}}=\overline{\overline{\boldsymbol{G}(R)}}=2^{2^{\mathfrak{k}}}$ und $\overline{\overline{\boldsymbol{F}(K)\cdot\boldsymbol{G}(R)}}=2^{\mathfrak{k}}$.

Beweis. Es sei $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper mit $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}$; wir konstruieren den topologischen Raum $\mathscr{R}$, der der Behauptung von 6.8 genügt. Da $\mathscr{R}=\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$, so hat man nach 3.19 $\overline{\overline{\mathscr{R}}}=2^{2^{\mathfrak{k}}}$. Der Körper $\boldsymbol{K}$ ist zu $\boldsymbol{F}(\mathscr{R})\cdot\boldsymbol{G}(\mathscr{R})$ isomorph; wegen 6.2 gilt also $\overline{\overline{\boldsymbol{F}(\mathscr{R})\cdot\boldsymbol{G}(\mathscr{R})}}=2^{\mathfrak{k}}$. Aus 6.9 folgt ferner, daß $\overline{\overline{\boldsymbol{F}(\mathscr{R})}}=\overline{\overline{\boldsymbol{G}(\mathscr{R})}}=\overline{\overline{\mathscr{I}(\boldsymbol{K})}}$; hieraus auf Grund von 2.29 $\overline{\overline{\mathscr{F}(\boldsymbol{R})}}=\overline{\overline{\mathscr{G}(\boldsymbol{R})}}=2^{2^{\mathfrak{k}}}$.

Dem Satz 6.12 gemäß genügt anderseits $\mathscr{R}$ den Bedingungen $\mathscr{B}_1-\mathscr{B}_4$ und man hat $\overline{\overline{Is(\mathscr{R})}}=\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}$, wonach $\overline{\overline{Is(R)}}=\overline{\overline{Is(\mathscr{R})}}$. Die Räume R und $\mathscr{R}$ sind also nach 6.14 homöomorph und umsomehr gleichmächtig; ebenso sind die entsprechenden Systeme $\boldsymbol{G}(R)$ und $\boldsymbol{G}(\mathscr{R})$, $\boldsymbol{F}(R)$ und $\boldsymbol{F}(\mathscr{R})$ usw. von der gleichen Mächtigkeit. Hieraus ergibt sich sofort die Behauptung des betrachteten Satzes.

Bemerkung 6.16. Der Fall $\mathfrak{k}<\aleph_0$ ist trivial: man hat dann $R=Is(R)$ und $\boldsymbol{F}(R)=\boldsymbol{G}(R)=\boldsymbol{F}(R)\cdot\boldsymbol{G}(R)=\underset{X}{E}[X\subset R]$, folglich $\overline{\overline{R}}=\mathfrak{k}$ und

$$\overline{\overline{\boldsymbol{F}(R)}}=\overline{\overline{\boldsymbol{G}(R)}}=\overline{\overline{\boldsymbol{F}(R)\cdot\boldsymbol{G}(R)}}=2^{\mathfrak{k}}.$$

[1]) Zu den Sätzen 6.13–6.15 vgl. den I. Teil des vorliegenden Aufsatzes, S. 47, Anm. 1. Neben den dort zitierten Aufsätzen von Čech und Pospíšil sei hier eine neue Arbeit von Pospíšil: *On bicompact spaces*, Publ. Naturwiss. Fak. Brünn **270** (1939) erwähnt: es werden in dieser Arbeit aus den topologischen Ergebnissen einige Sätze algebraischer Natur gefolgert, die als Verschärfungen von 2.29 und 3.19 (s. den I. Teil des vorliegenden Aufsatzes) gelten können.

Im Zusammenhang mit 6.14 entsteht die Frage, ob man in diesem Satz die Formel: $\overline{\overline{Is(R_1)}}=\overline{\overline{Is(R_2)}}$ durch $\overline{\overline{R}}_1=\overline{\overline{R}}_2$ ersetzen darf. Wir wollen zum Schluß zeigen, daß dieses Problem einem unentschiedenen Problem aus der Kardinalzahlarithmetik äquivalent ist:

Satz 6.17. Folgende Behauptungen sind äquivalent:

(i) *zwei beliebige topologische Räume R_1 und R_2, die den Bedingungen $\mathscr{B}_1-\mathscr{B}_4$ genügen und gleichmächtig sind, sind homöomorph;*

(ii) *sind $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ zwei Kardinalzahlen und ist $2^{\mathfrak{k}_1}=2^{\mathfrak{k}_2}$, so ist auch $\mathfrak{k}_1=\mathfrak{k}_2$.*

Beweis. Nehmen wir an, daß (i) gilt. Es sei $2^{\mathfrak{k}_1}=2^{\mathfrak{k}_2}$. Ist $\mathfrak{k}_1<\aleph_0$ oder $\mathfrak{k}_2<\aleph_0$, so hat man offenbar $\mathfrak{k}_1=\mathfrak{k}_2$. Ist aber $\mathfrak{k}_1\geqslant\aleph_0$ und $\mathfrak{k}_2\geqslant\aleph_0$, so schließen wir aus 6.13 und 6.15, daß es zwei topologische Räume R_1 und R_2 gibt, die $\mathscr{B}_1-\mathscr{B}_4$ erfüllen und für die $\overline{\overline{Is(R_1)}}=\mathfrak{k}_1$, $\overline{\overline{Is(R_2)}}=\mathfrak{k}_2$, $\overline{\overline{R}}_1=2^{2^{\mathfrak{k}_1}}$ und $\overline{\overline{R}}_2=2^{2^{\mathfrak{k}_2}}$ ist. Da $2^{2^{\mathfrak{k}_1}}=2^{2^{\mathfrak{k}_2}}$, so sind R_1 und R_2 gleichmächtig; nach (i) sind sie also homöomorph. Mit Rücksicht auf 6.14 hat man folglich $\mathfrak{k}_1=\mathfrak{k}_2$; dadurch ist (ii) gewonnen. In ganz analoger Weise wird (ii) aus (i) abgeleitet.