La définition fonctionnelle des polynômes dans les groupes abéliens.

Par

G. Van der Lijn (Bruxelles).

1. Soient G et G' deux groupes abéliens abstraits. Les éléments du groupe G seront représentés par les lettres $x, y, \dots, \omega, \dots$; ceux du groupe G' par les lettres $f, g, \dots, \Delta, \dots$ La loi de composition de deux éléments est commutative; elle sera représentée par le symbole $+$ de l'addition. L'élément-unité est représenté par le symbole 0, et l'inverse d'un élément a de l'un ou l'autre groupe, par le symbole $-a$. Le symbole $n \times a$, où n désigne un nombre entier positif, représente la somme $a + a + \dots + a$ de n éléments égaux à a.

Nous supposerons que *le groupe G' ne contient pas d'élément d'ordre fini*, c'est à dire que l'équation $n \times f = 0$ n'est possible que pour $f = 0$.

Soit $f(x)$ un opérateur défini pour tout élément x du groupe G, et dont la valeur f est un élément du groupe G'. Suivant la notation habituelle du calcul des différences, posons, de proche en proche,

$$\Delta_\omega f(x) = f(x+\omega) - f(x), \quad \Delta_\omega^2 f(x) = \Delta_\omega \Delta_\omega f(x), \quad \dots, \quad \Delta_\omega^n f(x) = \Delta_\omega \Delta_\omega^{n-1} f(x).$$

On a la relation

$$\Delta_\omega^n f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} \times f(x + \overline{n-i} \times \omega)$$

où les coéfficients $\binom{n}{i}$ sont les coéfficients biniomiaux $\dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}$.

Nous poserons $\Delta_\omega^0 f(x) = f(x)$.

En désignant par $(k)_p^n$ le coéfficient de α^p dans le développement de $(1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^k)^n$, où α est une variable numérique, k un nombre entier positif, et p un nombre entier positif au plus égal à nk, nous avons l'identité

$$\Delta_{(k+1)\times\omega}^n f(x) = \sum_{i=0}^{i=nk} (k)_i^n \times \Delta_\omega^n f(x + i \times \omega). \tag{1}$$

Cette identité, dont nous ferons usage par la suite, a été obtenue par A. Marchaud [1]) dans le domaine des nombres réels. La démonstration de M. Marchaud s'étend sans difficulté au cas où les variables et les fonctions sont les éléments des groupes G et G'.

2. Nous appelerons *polynôme*, tout opérateur $f(x)$ vérifiant, quels que soient x et ω, l'équation fonctionnelle

$$\Delta_\omega^{n+1} f(x) = 0. \tag{2}$$

Le degré du polynôme est la plus petite valeur de n pour laquelle une équation de la forme (2) est identiquement vérifiée. Des polynômes définis d'une manière analogue ont été étudiés dans les espaces vectoriels, principalement par M. M. Fréchet [2]) et par MM. S. Mazur et W. Orlicz [3]).

Nous appelerons *monôme*, tout opérateur $f(x)$ vérifiant, quels que soient x et ω, l'équation fonctionnelle

$$\Delta_\omega^n f(x) = n! \times f(\omega). \tag{3}$$

On voit aisément que si $f(x)$ n'est pas identiquement nul, il ne peut exister qu'une seule valeur de n pour laquelle l'équation (3) soit vérifiée. Cette valeur s'appelle le *degré* du monôme, et il est évident qu'un monôme de degré n est aussi un polynôme de degré n.

3. ***Théorème I.*** *Si $f(x)$ est un polynôme de degré n, et si k est un nombre entier positif, nous avons, quels que soient x et ω,*

$$\Delta_{k\times\omega}^n f(x) = k^n \times \Delta_\omega^n f(x).$$

---

[1]) A. Marchaud, *Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles*, Journal de Mathématique **6** (1927), p. 337.

[2]) M. Fréchet, *Les polynômes abstraits*, Journal de Mathématique **8** (1929), p. 71.

[3]) S. Mazur und W. Orlicz, *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen*, Studia Mathematica **5** (1934), p. 50 et 179.

En effet, en remplaçant x par $x+\overline{i-1}\times\omega$ dans l'équation (2), nous avons

$$\Delta_\omega^{n+1} f(x+\overline{i-1}\times\omega)=0.$$

Mais nous avons par définition

$$\Delta_\omega^{n+1} f(x+\overline{i-1}\times\omega)=\Delta_\omega^{n} f(x+i\times\omega)-\Delta_\omega^{n} f(x+\overline{i-1}\times\omega).$$

Nous avons donc

$$\Delta_\omega^{n} f(x+i\times\omega)=\Delta_\omega^{n} f(x+\overline{i-1}\times\omega),$$

et cette relation étant vérifiée quel que soit le nombre entier positif i, nous avons, de proche en proche,

$$\Delta_\omega^{n} f(x+i\times\omega)=\Delta_\omega^{n} f(x+\overline{i-1}\times\omega)=\Delta_\omega^{n} f(x+\overline{i-2}\times\omega)=\ldots=\Delta_\omega^{n} f(x).$$

En remplaçant k par $k-1$ dans l'identité (1), nous avons donc

$$\Delta_{k\times\omega}^{n} f(x)=\Big[\sum_{i=0}^{n(k-1)}(k-1)_i^n\Big]\times\Delta_\omega^{n} f(x)=k^n\times\Delta_\omega^{n} f(x),$$

ce qui démontre le théorème.

Corollaire. *Si $f(x)$ est un monôme de degré n, on a identiquement*

$$f(k\times x)=k^n\times f(x).$$

En effet, en tenant compte de la relation (3), nous pouvons, dans la formule démontrée au théorème, remplacer $\Delta_{k\times\omega}^{n} f(x)$ par $n!\times f(k\times\omega)$ et $\Delta_\omega^{n} f(x)$ par $n!\times f(\omega)$. Nous obtenons ainsi

$$n!\times f(k\times\omega)=k^n\, n!\times f(\omega)$$

ou encore

$$n!\times[f(k\times\omega)-k^n\times f(\omega)]=0.$$

Le corollaire résulte de cette relation et du fait que le groupe G' ne contient pas d'élément d'ordre fini.

Théorème II. *Si la différence d'ordre n, $\Delta_\omega^n f(x)$, d'un opérateur $f(x)$ est un opérateur $\varphi(\omega)$ indépendant de x, l'opérateur $\varphi(\omega)$ est un monôme de degré n en ω.*

En effet, j étant un nombre entier au plus égal à n, remplaçons x par 0, et ω par $x+\overline{n-j}\times\omega$ dans la relation

$$\varphi(\omega)=\Delta_\omega^n f(x).$$

Nous obtenons ainsi l'équation

$$\varphi(x+\overline{n-j}\times\omega)=\sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i\binom{n}{i}\times f(\overline{n-i}\times[x+\overline{n-j}\times\omega]).$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $(-1)^j\binom{n}{j}$. Donnons à j successivement les valeurs $0,1,2,\ldots,n$, et additionnons membre à membre les $n+1$ équations ainsi obtenues. En groupant les termes où i a la même valeur, nous obtenons ainsi la relation

$$\Delta_\omega^n\varphi(x)=\sum_{i=0}^{i=n}\Big\{(-1)^i\binom{n}{i}\times\sum_{j=0}^{j=n}(-1)^j\binom{n}{j}\times f(\overline{n-i}\times[x+\overline{n-j}\times\omega])\Big\}.$$

En observant que l'on a

$$\overline{n-i}\times[x+\overline{n-j}\times\omega]=\overline{n-i}\times x+(n-j)\times\overline{n-i}\times\omega,$$

et que $\varphi(\overline{n-i}\times\omega)=\Delta_{\overline{n-i}\times\omega}^{n} f(\overline{n-i}\times x)$, cette relation devient

(4) $$\Delta_\omega^n\varphi(x)=\sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i\binom{n}{i}\times\varphi(\overline{n-i}\times\omega).$$

D'autre part, nous avons, quels que soient x et ω,

$$\Delta_\omega^{n+1} f(x)=\Delta_\omega^n f(x+\omega)-\Delta_\omega^n f(x)=\varphi(\omega)-\varphi(\omega)=0.$$

L'opérateur $f(x)$ est donc un polynôme de degré n au plus, et nous avons, en vertu du théorème I,

$$\varphi(\overline{n-i}\times\omega)=\overline{n-i}^n\times\varphi(\omega).$$

En tenant compte de cette formule, la relation (4) devient

$$\Delta_\omega^n\varphi(x)=\Big[\sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^n\Big]\times\varphi(\omega)=[\Delta_1^n\alpha^n]\times\varphi(\omega)$$

où α désigne une variable numérique. Nous avons donc

$$\Delta_\omega^n\varphi(x)=n!\times\varphi(\omega),$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème III. *Si $f(x)$ est un polynôme de degré n, la différence $\Delta_\omega^n f(x)$ est indépendante de x.*

En effet, soient x_0 et x_1 deux éléments quelconques du groupe G. Posons $x_1 - x_0 = \xi$, et soient $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i = x_0 + i \times \xi, \dots, x_{k+1}$ $n+2$ éléments du groupe G, en progression arithmétique de raison ξ.

Soient j et p deux nombres entiers non négatifs. Dans l'équation (2), remplaçons x par $x_{n+1} + \overline{n+1+p} \times j \times \omega$, et ω par $-(\xi + j \times \omega)$. Nous obtenons, en développant,

$$\sum_{i=0}^{i=n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} \times f(x_i + \overline{i+p} \cdot j \times \omega) = 0.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $(-1)^j \binom{n}{j}$. Donnons à j successivement les valeurs $0, 1, 2, \dots n$ et additionnons membre à membre les équations ainsi obtenues. En groupant les termes où i a la même valeur, nous obtenons la relation

$$\sum_{i=0}^{i=n+1} \left\{ (-1)^i \binom{n+1}{i} \times \Delta^n_{(i+p)\times\omega} f(x_i) \right\} = 0,$$

ou encore, en tenant compte du théorème I,

$$\sum_{i=0}^{i=n+1} \left\{ (-1)^i \binom{n+1}{i} (i+p)^n \times \Delta^n_\omega f(x_i) \right\} = 0.$$

En développant $(i+p)^n$ suivant la formule du binôme, et en groupant les termes contenant une même puissance k de p, la dernière équation peut s'écrire

$$\sum_{k=0}^{k=n} \left\{ \binom{n}{k} p^k \times \sum_{i=0}^{i=k+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} i^{n-k} \times \Delta^n_\omega f(x_i) \right\} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est un polynôme, au sens élémentaire du terme, de degré n en p, les coéfficients de ce polynôme étant des éléments du groupe G'. Il est facile de voir qu'un tel polynôme ne peut être nul pour $n+1$ valeurs distinctes de p que si ses coéfficients sont tous nuls. Le polynôme étant nul pour toutes les valeurs entières et positives de p, nous avons donc les $n+1$ équations

$$\sum_{i=0}^{i=n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} i^{n-k} \times \Delta^n_\omega f(x_i) = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Considérons ces équations comme formant un système de $n+1$ équations linéaires et non homogènes, définissant les $n+1$ inconnues $\Delta^n_\omega f(x_1)$, $\Delta^n_\omega f(x_2)$, ..., $\Delta^n_\omega f(x_{n+1})$ en fonction de $\Delta^n_\omega f(x_0)$. Le déterminant de ce système est égal à un déterminant de Vandermonde multiplié par le produit $\pm \binom{n+1}{1} \binom{n+1}{2} \dots \binom{n+1}{n+1}$. Il est donc différent de 0 et le système admet une solution *unique*. On vérifie aisément que la solution est

$$\Delta^n_\omega f(x_1) = \Delta^n_\omega f(x_2) = \dots = \Delta^n_\omega f(x_{n+1}) = \Delta^n_\omega f(x_0),$$

puisque, en portant en valeurs dans les équations, celles-ci deviennent

$$[\Delta_1^{n+1} a^{n-k}] \times \Delta^n_\omega f(x_0) = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots, n),$$

où a est une variable numérique.

Nous avons donc en particulier $\Delta^n_\omega f(x_1) = \Delta^n_\omega f(x_0)$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. *Si $f(x)$ est un polynôme de degré n, la différence mêlée d'ordre k,*

$$\Delta_{\omega_k} \Delta_{\omega_{k-1}} \dots \Delta_{\omega_1} f(x)$$

est un polynôme de degré $n-k$ en x.

En effet, il résulte du théorème que $\Delta^n_\omega f(x)$ est indépendant de x. Nous avons donc $\Delta^n_\omega f(x + \omega_1) = \Delta^n_\omega f(x)$, et par conséquent

$$\Delta^n_\omega \Delta_{\omega_1} f(x) = \Delta^n_\omega [f(x + \omega_1) - f(x)] = 0.$$

Cette relation étant vérifiée quels que soient ω et x, la différence $\Delta_{\omega_1} f(x)$, où ω_1 est constant mais arbitraire, est un polynôme de degré $n-1$ en x.

En répétant le même raisonnement sur le polynôme $\Delta_{\omega_1} f(x)$, on montrera que $\Delta_{\omega_2} \Delta_{\omega_1} f(x)$ est un polynôme de degré $n-2$, et en continuant ainsi de proche en proche, au montrera que $\Delta_{\omega_3} \Delta_{\omega_2} \Delta_{\omega_1} f(x)$, ..., $\Delta_{\omega_k} \Delta_{\omega_{k-1}} \dots \Delta_{\omega_1} f(x)$ sont respectivement des polynômes de degré $n-3, \dots, n-k$ en x, ce qui démontre le corollaire.

En particulier, nous avons $\Delta_{\omega_{n+1}} \Delta_{\omega_n} \Delta_{\omega_{n-1}} \dots \Delta_{\omega_1} f(x) = 0$, quels que soient $\omega_{n+1}, \omega_n, \dots, \omega_1$ et x. Cette dernière propriété a été prise par Mr. Fréchet pour sa définition des polynômes abstraits.

Théorème IV. *Le produit d'un polynôme de degré n par le nombre entier $v_n = n!(n-1)!(n-2)!\dots 2!1!$ est une somme de monômes de degrés au plus égaux à n. La formule de décomposition est unique, les termes de même degré étant supposés groupés en un seul.*

Soit $f(x)$ un polynôme de degré n. En vertu du théorème III, la différence $\Delta_\omega^n f(x)$ est indépendante de x. En posant $\varphi_n(\omega) = \Delta_\omega^n f(x)$, il résulte donc du théorème II que l'opérateur $\varphi_n(x)$ est un monôme de degré n. Posons

$$n! \times f(x) = \varphi_n(x) + \psi_{n-1}(x). \tag{5}$$

Nous avons, par suite de la relation (3),

$$\Delta_\omega^n \varphi_n(x) = n! \times \varphi_n(\omega),$$

d'où, par suite de la définition même de $\varphi_n(\omega)$,

$$\Delta_\omega^n \varphi_n(x) = n! \times \Delta_\omega^n f(x).$$

Nous avons donc $\Delta_\omega^n [n! \times f(x) - \varphi_n(x)] = 0$ ou encore

$$\Delta_\omega^n \psi_{n-1}(x) = 0.$$

Cette relation étant vérifiée quels que soient x et ω, l'opérateur $\psi_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $n-1$. En raisonnant sur le polynôme $\psi_{n-1}(x)$ comme nous l'avons fait sur le polynôme $f(x)$, et en répétant le raisonnement de proche en proche, nous obtiendrons les formules de décomposition

$$\begin{aligned} (n-1)! \times \psi_{n-1}(x) &= \varphi_{n-1}(x) + \psi_{n-2}(x), \\ (n-2)! \times \psi_{n-2}(x) &= \varphi_{n-2}(x) + \psi_{n-3}(x), \\ &\dots\dots\dots \\ 2! \times \psi_2(x) &= \varphi_2(x) + \psi_1(x), \\ \psi_1(x) &= \varphi_1(x) + \psi_0(x), \end{aligned} \tag{6}$$

où les opérateurs $\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \dots, \varphi_2, \varphi_1$ et $\psi_{n-1}, \psi_{n-2}, \dots, \psi_2, \psi_1$, sont respectivement des monômes et des polynômes de degré $n-1, n-2, \dots, 2, 1$, et où $\psi_0(x)$ est un polynôme de degré 0, c'est à dire une constante. Multiplions les deux membres de l'équation (5) par le nombre v_{n-1}, et ceux des équations (6) par les nombres $v_{n-2}, v_{n-3}, \dots, v_1$ et $v_0 = 1$. Additionnons membre à membre les équations ainsi obtenues; nous avons alors la relation

$$v_n \times f(x) = v_{n-1} \times \varphi_n(x) + v_{n-2} \times \varphi_{n-1}(x) + \dots + v_0 \times \varphi_1(x) + \psi_0(x), \tag{7}$$

qui est la formule de décomposition annoncée.

Supposons qu'il existe une autre décomposition analogue, à savoir une relation de la forme

$$v_n \times f(x) = \Phi_n(x) + \Phi_{n-1}(x) + \dots + \Phi_1(x) + \Phi_0(x) \tag{8}$$

où les opérateurs $\Phi_n, \Phi_{n-1}, \dots, \Phi_1, \Phi_0$ sont des monômes de degré $n, n-1, \dots, 1, 0$ respectivement.

En égalant les seconds membres des relations (7) et (8), et en remplaçant x par $k \times x$, où k est un nombre entier positif, nous avons la relation

$$\sum_{i=0}^{i=n} v_{i-1} \times \varphi_i(k \times x) = \sum_{i=0}^{i=n} \Phi_i(k \times x),$$

ou, en faisant usage du corollaire du théorème I,

$$\sum_{i=0}^{i=n} k^i v_{i-1} \times \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^{i=n} k^i \times \Phi_i(x).$$

Cette relation n'est possible pour $n+1$ valeurs distinctes de k, que si l'on a identiquement, quel que soit $i = 0, 1, \dots, n$,

$$v_{i-1} \times \varphi_i(x) = \Phi_i(x).$$

L'unicité de la formule de décomposition se trouve ainsi démontrée.

4[4]**.** Supposons à présent que la variable x ainsi que la fonction $f(x)$ varient dans le domaine des nombres réels. Dans ce cas, *pour que la différence $\Delta_\omega^n f(x)$ soit identiquement nulle dans un intervalle $\langle a, b \rangle$, il suffit que la différence divisée $\frac{1}{\omega^n} \Delta_\omega^n f(x)$ tende uniformément vers 0 avec ω dans cet intervalle.*

En effet, quels que soient ω et $\varepsilon > 0$, il existe dans ce cas un entier k suffisamment grand pour que l'on ait $\left| \left(\frac{k+1}{\omega} \right)^n \Delta^n_{\frac{\omega}{k+1}} f(x) \right| < \varepsilon$, pourvu que les points $x + i \frac{\omega}{k+1}$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ soient dans l'intervalle $\langle a, b \rangle$.

[4]) Ce paragraphe est le fruit de la suggestion, que je dois à M. Saks, de généraliser un théorème de M. Iyerengay.

L'identité

$$\Delta_\omega^n f(x) = \sum_{i=0}^{nk}{}' (k)_i^n \frac{\Delta_\omega^n}{k+1} f\left(x + i\frac{\omega}{k+1}\right),$$

divisée par $\left(\frac{\omega}{k+1}\right)^n$, nous donne donc

$$\left|\left(\frac{k+1}{\omega}\right)^n \Delta_\omega^n f(x)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{nk}{}' (k)_i^n = (k+1)^n \varepsilon,$$

d'où $|\Delta_\omega^n f(x)| \leqslant \varepsilon |\omega|^n$ et par suite, ε étant arbitraire, $\Delta_\omega^n f(x) = 0$.

La fonction $f(x)$ est donc un polynôme suivant la définition donnée p. 43. Cependant, si l'on n'impose aucune condition supplémentaire à cette fonction, celle-ci n'est pas, en général, un polynôme au sens classique du terme, ainsi que le montre l'exemple bien connu, donné par G. Hamel, d'une solution discontinue de l'équation $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Il en sera pourtant ainsi lorsque la fonction $f(x)$ possède la propriété de Baire[5]) ou bien est bornée ou mesurable[6]). On arrivera encore au même résultat en supposant seulement que le module de la fonction $f(x)$ est majoré par une fonction mesurable $\varphi(x)$. En effet, la démonstration de T. Popoviciu[6]) conduit à une inégalité de la forme $|f(\xi+\gamma\omega)| > A$. On aura donc, dans les mêmes conditions, $\varphi(\xi+\gamma\omega) > A$ et, la fonction $\varphi(x)$ étant mesurable, la démonstration se poursuivra comme dans le texte de M. Popoviciu, en y remplaçant $f(x)$ par $\varphi(x)$.

En particulier, pour $n=2$, nous retrouvons le théorème suivant, récemment obtenu par M. Iyerengay[7]): *si le module de la fonction $f(x)$ est majoré par une fonction mesurable, et si le rapport $\frac{1}{\omega^2}[f(x+\omega) - 2f(x) + f(x-\omega)]$ tend uniformément vers 0 avec ω dans un intervalle $\langle a, b\rangle$, la fonction $f(x)$ est de la forme $Ax+B$, où A et B sont des constantes.*

---

[5]) S. Mazur et W. Orlicz, loc. cit., p. 182.

[6]) T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica **8** (Cluj 1934), p. 56.

[7]) K. S. K. Iyerengay, *A note on the symmetric first and second mean derivates of a continuous function*, C. R. Soc. Sci. Varsovie **31** (1938), p. 108.

Ideale in vollständigen Mengenkörpern. II.

Von

Alfred Tarski (Warszawa)[1]).

§ 4. $\mathfrak{p}$-saturierte Ideale[2]).

Der Begriff des $\mathfrak{p}$-saturierten Ideals stellt eine Verallgemeinerung des Begriffs des Primideals dar.

Definition 4.1. Ein Ideal $\boldsymbol{I}$ in einem Körper $\boldsymbol{K}$ wird $\mathfrak{p}$-saturiert genannt, in Zeichen $\boldsymbol{I} \in \mathcal{S}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{K})$, wenn jedes System $S \subset \boldsymbol{K} - \boldsymbol{I}$, derart, daß der Durchschnitt $X \cdot Y$ zweier verschiedener Mengen $X, Y \in S$ immer zu $\boldsymbol{I}$ gehört, eine Mächtigkeit $< \mathfrak{p}$ hat.

Wir geben hier einige Sätze über $\mathfrak{p}$-saturierte Ideale, ohne sie genau zu beweisen.

Korollar 4.2. Für jeden Körper $\boldsymbol{K}$ ist $\mathcal{S}_0(\boldsymbol{K}) = 0$, $\mathcal{S}_1(\boldsymbol{K}) = \{\boldsymbol{K}\}$ und $\mathcal{S}_2(\boldsymbol{K}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{K}) + \{\boldsymbol{K}\}$; ist $\mathfrak{p} \geqslant 2$, so ist $\mathcal{P}(\boldsymbol{K}) \subset \mathcal{S}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{K}) \subset \mathcal{J}(\boldsymbol{K})$; ist $\mathfrak{p} > \overline{\overline{\boldsymbol{K}}}$, so ist $\mathcal{S}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{K}) = \mathcal{J}(\boldsymbol{K})$. [Nach 3.1, 4.1].

Satz 4.3. Ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper, $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}} = \mathfrak{k} \geqslant \aleph_0$ und $\mathfrak{p} \geqslant 2$, so ist $\overline{\overline{\mathcal{S}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{K})}} = 2^{2^\mathfrak{k}}$. [Nach 2.29, 3.19, 4.2].

Satz 4.4. Ist $\boldsymbol{K}$ ein beliebiger Körper und $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{q}$, so ist $\mathcal{S}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{K}) \subset \mathcal{S}_\mathfrak{q}(\boldsymbol{K})$. [Nach 4.1].

Satz 4.5. Es sei $\mathfrak{p} = \aleph_0$ oder $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{p}^* < \mathfrak{p}$. Zu jedem Körper $\boldsymbol{K}$ und jedem Ideal $\boldsymbol{I} \in \mathcal{S}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{K})$ gibt es dann eine Zahl $\mathfrak{q} < \mathfrak{p}$, so daß $\boldsymbol{I} \in \mathcal{S}_\mathfrak{q}(\boldsymbol{K})$.

---

[1]) Der I. Teil dieser Arbeit, d. i. §§ 1–3, ist in Fund. Math. **32** (1938), SS. 45–63, erschienen; dort sind also insbesondere die unten zitierten Sätze zu finden, deren Nummern mit 1, 2 oder 3 beginnen (z. B. 3.1 oder 2.29).

[2]) Vgl. den I. Teil dieser Arbeit, S. 46, Anm. 1.