

With each point T_i in the interval $[0,1]$ we associate a point t_i in I for which $x(t_i) = \bar{x}(T_i)$ and $y(t_i) = \bar{y}(T_i)$. Let t be an accumulation point of the t_i 's and let the properly chosen sub-sequence $t'_1, t'_2, \dots, t'_n, \dots$ of the t_i 's, associated with the sub-sequence $T'_1, T'_2, \dots, T'_n, \dots$ of the T_i 's, converge towards t . It is clear that $x(t) = \bar{x}(T)$ and $y(t) = \bar{y}(T)$. We have further:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{y}(T'_n) - \bar{y}(T)}{\bar{x}(T'_n) - \bar{x}(T)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{y}(T''_n) - \bar{y}(T)}{\bar{x}(T''_n) - \bar{x}(T)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y(t'_n) - y(t)}{x(t'_n) - x(t)} = 0.$$

Hence the sequence $\frac{\bar{y}(T_i) - \bar{y}(T)}{\bar{x}(T_i) - \bar{x}(T)}$, $i=1, 2, \dots, n, \dots$ always converges toward zero. As we have shown above, this conclusion conflicts with the assumption that C_1 is a simple curve. Hence $y(t)$ must be constant throughout I .

3. In conclusion we shall state without proof one more result related to the problem discussed in our lemma. We notice that the proper maxima of the function $x_1(z)$, introduced in the process of the proof, form a set dense in itself. It can be shown that, in general, whenever the proper maxima of a one-valued continuous function in a given interval form a set dense in itself the function must have at least one value repeated an infinite number of times in the interval.

Columbia University,
New York, N. Y. (U. S. A.).

Sur les courbes ε -déformables en arcs simples.

Par

Z. Waraszkiewicz (Varsovie).

Le but de cette Note est la caractérisation intrinsèque des courbes planes qui, pour tout $\varepsilon > 0$, se laissent ε -déformer en un arc simple. La famille de toutes ces courbes sera désignée par (A) ; je les appelle aussi *apparentées avec l'arc simple*.

Je démontre que la famille (A) coïncide avec celle des courbes planes K qui ne coupent pas le plan et qui jouissent en chacun de leurs points de la propriété suivante¹⁾:

(p₃) *pour chaque système de 3 sous-continus de K qui contiennent le point donné, l'un d'eux fait partie de la somme de deux autres.*

Termes et notations. Je désigne, pour chaque couple de points x, y d'un espace métrique R , par $\rho(x, y)$ la distance entre ces points et par \widehat{xy} un arc simple aux extrémités x et y , contenu dans R .

Étant donnés dans R deux ensembles quelconques A et B , je pose

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y);$$

le diamètre de A sera désigné par $d(A)$.

J'appelle *dendrite finie* une dendrite (c. à d. continu localement connexe ne contenant aucune courbe fermée) qui est somme d'un nombre fini d'arcs simples.

Une transformation continue f d'un ensemble $A \subset R$ en un autre $B \subset R$ est dite une *ε -déformation*, lorsqu'on a

$$\sup_{x \in A} \rho(x, f(x)) \leq \varepsilon.$$

Si une telle déformation existe pour tout $\varepsilon > 0$, A est dit *ε -déformable en B* .

¹⁾ L'équivalence en question a été signalée dans mon travail *O pokrewieństwie kontynuów*, Wiadomości Matematyczne **43** (1936), p. 1-57 (en polonais) qui en renferme une ébauche de la démonstration.

Théorème²⁾. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu appartienne à la classe (A) est qu'il ne coupe pas le plan et jouisse de la propriété (p₃) en chacun de ses points.

Démonstration. La nécessité est à peu près évidente. Soit, en effet K un continu appartenant à (A). Alors K ne coupe pas le plan, la coupure d'un espace étant une propriété invariante par rapport aux petites transformations. Pour montrer que K jouit de la propriété (p₃) en chacun de ses points, supposons par contre que K contienne 3 continus K_1, K_2, K_3 tels que:

$$K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \neq 0,$$

$$K_1 - (K_2 + K_3) \neq 0, \quad K_2 - (K_3 + K_1) \neq 0, \quad K_3 - (K_1 + K_2) \neq 0.$$

Il en résulte pour chaque ε -déformation f_ε de K avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit que:

$$f_\varepsilon(K_1) \cdot f_\varepsilon(K_2) \cdot f_\varepsilon(K_3) \neq 0, \quad f_\varepsilon(K_1) - [f_\varepsilon(K_2) + f_\varepsilon(K_3)] \neq 0,$$

$$f_\varepsilon(K_2) - [f_\varepsilon(K_3) + f_\varepsilon(K_1)] \neq 0, \quad f_\varepsilon(K_3) - [f_\varepsilon(K_1) + f_\varepsilon(K_2)] \neq 0.$$

Or, c'est impossible quand $f_\varepsilon(K)$ est un arc simple, qui jouit évidemment de la propriété (p₃) en chacun de ses points.

Passons à la suffisance. En vertu d'un théorème de M. P. Alexandroff³⁾, on peut faire correspondre à chaque courbe K qui ne coupe pas le plan une suite de dendrites finies $\{\vartheta_k\}$ (situées dans le plan de K) et une autre des transformations $\{f_k\}$ de K en ϑ_k respectivement, telles que pour tout $k=1, 2, \dots$

(i) f_k est une $1/2^k$ -déformation,

(ii) il existe une $1/2^k$ -déformation φ_{k+1} de ϑ_{k+1} en ϑ_k telle que $\varphi_{k+1}[f_{k+1}(\xi)] = f_k(\xi)$ pour tout point $\xi \in K$.

Pour notre but, il suffit de montrer, dans l'hypothèse que K jouit partout de la propriété (p₃), que si petit que soit $\lambda > 0$, toutes les dendrites ϑ_i à partir d'un $i=i(\lambda)$ se laissent λ -déformer en un arc simple.

Soit donné un $\varepsilon > 0$ et soit k_0 un indice pour lequel on a

²⁾ Ce théorème se laisse étendre sans difficulté aux courbes de l'espace à 3 dimensions, en remplaçant la condition de ne pas couper le plan par celle d'avoir le premier nombre de Betti égal à zéro.

³⁾ P. Alexandroff, *Gestalt und Lage*, Ann. of Math. **30** (1930), p. 32, Th. II.

$$(1) \quad 1/2^{k_0} < \varepsilon/16.$$

Posons pour tout $j=1, 2, \dots$

$$\mathcal{V}_j^*(\xi) = \varphi_{k_0+1} \left(\varphi_{k_0+2} \left(\dots \left(\varphi_{k_0+j}(\xi) \right) \dots \right) \right) \quad \text{pour tout } \xi \in \vartheta_{k_0+j}.$$

D'après (i), (ii) et (1), \mathcal{V}_j^* est pour tout $j=1, 2, \dots$ une $\varepsilon/8$ -déformation de ϑ_{k_0+j} en ϑ_{k_0} . Remarquons encore que

(I) Si une suite $\widehat{\xi_{i_s} \xi_{i_s}}$ d'arcs contenus respectivement dans $\vartheta_{k_0+i_s}$ est convergente et telle que

$$\mathcal{V}_{i_s}^*(\widehat{\xi_{i_s} \xi_{i_s}}) = \widehat{\alpha\beta} \quad \text{pour } s=1, 2, \dots,$$

alors on a

$$f_{k_0}(\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \widehat{\xi_{i_s} \xi_{i_s}}) = \widehat{\alpha\beta}.$$

Nous allons introduire maintenant quelques notions auxiliaires.

Soit A une décomposition de ϑ_{k_0} en un nombre fini de segments de diamètre ne dépassant pas λ de façon que chaque point de ramification⁴⁾ de ϑ_{k_0} soit une extrémité de tous les segments de la décomposition qui le contiennent. Si λ est suffisamment petit ($\lambda < \varepsilon/8$), chaque transformation \mathcal{V}_j^* peut être modifiée de façon qu'elle reste une $\varepsilon/4$ -déformation de ϑ_{k_0+j} en ϑ_{k_0} et transforme chaque arc partiel $\widehat{aa'}$ de ϑ_{k_0+j} , tel que $\mathcal{V}_j^*(a), \mathcal{V}_j^*(a')$ sont des extrémités des segments en question, en la somme de ces segments. La transformation ainsi modifiée sera désignée par \mathcal{V}_j .

Appelons chaîne toute suite des segments de A de la forme

$$(2) \quad \widehat{a_1 a_2}, \widehat{a_2 a_3}, \dots, \widehat{a_{l-1} a_l},$$

un segment pouvant y figurer plusieurs fois. Les segments (2) seront dits éléments de la chaîne, les éléments $\widehat{a_1 a_2}$ et $\widehat{a_{l-1} a_l}$ ses éléments extrêmes. Nous n'allons pas faire distinction entre la chaîne (2) et celle ordonnée inversement

$$\widehat{a_l a_{l-1}}, \widehat{a_{l-1} a_{l-2}}, \dots, \widehat{a_2 a_1}.$$

C désignant une chaîne (2), je pose

$$\bar{C} = \sum_{s=2}^l \widehat{a_{s-1} a_s}.$$

⁴⁾ c. à d. le point où se rencontrent au moins 3 arcs qui n'ont deux à deux que ce point en commun.

A une chaîne (2) on peut faire correspondre une autre

$$(2') \quad \widehat{a_1 a_2}, \widehat{a_2 a_3}, \dots, \widehat{a_{h-1} a_h}, \widehat{a_h a_{h+1}}, \dots, \widehat{a_{j-1} a_j}, \widehat{a_j a_{j-1}}, \widehat{a_{j-1} a_{j-2}}, \dots$$

$$\dots, \widehat{a_h a_{h-1}}, \widehat{a_{h-1} a_h}, \widehat{a_h a_{h+1}}, \dots, \widehat{a_{i-1} a_i},$$

où $h < j < i$, en intercalant entre les éléments $\widehat{a_{h-1} a_h}$ et $\widehat{a_h a_{h+1}}$ ceux de la chaîne

$$\widehat{a_h a_{h+1}}, \dots, \widehat{a_{j-1} a_j}, \widehat{a_j a_{j-1}}, \dots, \widehat{a_{h+2} a_{h+1}}, \widehat{a_{h+1} a_h}.$$

Le passage de (2) à (2') sera appelé *opération élémentaire* effectuée sur la chaîne (2). Chaque chaîne qui s'obtient de la chaîne donnée par une ou plusieurs opérations élémentaires s'appellera sa *chaîne dérivée*.

Une chaîne qui ne contient aucune „portion“ de la forme

$$\widehat{a_h a_{h+1}}, \dots, \widehat{a_{j-1} a_j}, \widehat{a_j a_{j-1}}, \dots, \widehat{a_h a_{h-1}}, \widehat{a_{h-1} a_h}, \widehat{a_h a_{h+1}}, \dots, \widehat{a_{j-1} a_j},$$

sera dite *simple*. Evidemment

(II) *A chaque chaîne C on peut faire correspondre une chaîne simple C₁ telle que C soit une dérivée de C₁.*

Etant donné un $\mu > 0$, j'entendrai par μ -*modification* d'une chaîne (2) l'opération d'intercaler entre deux éléments consécutifs de (2)

$$\widehat{a_{h_1-1} a_{h_1}} \text{ et } \widehat{a_{h_1} a_{h_1+1}}, \quad \widehat{a_{h_2-1} a_{h_2}} \text{ et } \widehat{a_{h_2} a_{h_2+1}}, \dots, \text{ etc.}$$

respectivement les chaînes de la forme

$$\widehat{a_{h_s} a_{h_s+1}}, \widehat{a_{h_s+1} a_{h_s+2}}, \dots, \widehat{a_{h_s} a_{h_s}} \quad (s=1, 2, \dots),$$

où $\widehat{a_r a_{r+1}}$ sont les segments de Δ tels que

$$d \left(\sum_{r=2}^{p_s-2} \widehat{a_r a_{r+1}} + \widehat{a_1 a_{h_s}} \right) \leq \mu,$$

ainsi que l'opération d'en retrancher des chaînes de cette forme.

Lorsque, pour un couple de chaînes C et C₁, la partie commune de \bar{C} et \bar{C}_1 correspond à une „portion“ commune de certaines dérivées de ces chaînes et contient deux éléments extrêmes parmi les quatre de C et C₁, alors on peut définir la *somme*

$$C + C_1$$

comme la chaîne composée d'éléments des deux chaînes ordonnés comme il suit: parmi deux éléments $\widehat{a\beta}$ et $\widehat{a'\beta'}$ de C (ou de C₁) le premier précèdera le second dans C + C₁ s'il le précède dans la chaîne C (ou C₁); lorsque $\widehat{a\beta}$ appartient à C et $\widehat{a'\beta'}$ à C₁, alors $\widehat{a\beta}$ précèdera $\widehat{a'\beta'}$.

Lorsque la chaîne C peut être $\varepsilon/4$ -modifiée en une chaîne susceptible de former une somme avec C₁, je dirai que les chaînes C et C₁ sont *conjuguées*; en symboles:

$$C \sim C_1.$$

Remarquons que si C se laisse $\varepsilon/4$ -modifier en une chaîne C' telle que l'on puisse former la somme C' + C₁, alors, réciproquement, il existe une $\varepsilon/4$ -modification de C₁ en C'₁ telle que C'₁ + C a le sens défini. Les relations C ~ C₁ et C₁ ~ C sont donc équivalentes.

A chaque arc partiel $\widehat{\xi\eta}$ d'un ϑ_{h_0+i} (où $i=1, 2, \dots$) et à chaque $\varepsilon/4$ -déformation Ψ_l de cet arc en un arc partiel ou une dendrite finie partielle de ϑ_{h_0} (et telle que les points $\Psi_l(\xi)$ et $\Psi_l(\eta)$ sont des extrémités des segments de la décomposition Δ), on peut faire correspondre une chaîne $C[\Psi_l(\widehat{\xi\eta})]$ en décomposant $\widehat{\xi\eta}$ en arcs partiels $\widehat{\xi\xi_2} = \widehat{\xi_1\xi_2}, \widehat{\xi_2\xi_3}, \dots, \widehat{\xi_{k-1}\xi_k} = \widehat{\xi_{k-1}\eta}$ tels que chaque ensemble $\Psi_l(\widehat{\xi_s\xi_{s+1}})$ soit un segment de la décomposition Δ de ϑ_{h_0} et en désignant par $C[\Psi_l(\widehat{\xi\eta})]$ la chaîne

$$\widehat{\Psi_l(\xi_1)\Psi_l(\xi_2)}, \widehat{\Psi_l(\xi_2)\Psi_l(\xi_3)}, \dots, \widehat{\Psi_l(\xi_{k-1})\Psi_l(\xi_k)}.$$

(III) *A chaque $\varepsilon/4$ -modification de $C[\Psi_l(\widehat{\xi\eta})]$ en C' correspond une $\varepsilon/2$ -déformation Ψ_l de $\widehat{\xi\eta}$ en \bar{C}' .*

En effet, le passage de $\bar{C}[\Psi_l(\widehat{\xi\eta})] = \Psi_l(\widehat{\xi\eta})$ en \bar{C}' peut être interprété comme une $\varepsilon/4$ -déformation φ_ε de $\Psi_l(\widehat{\xi\eta})$ en \bar{C}' ; la transformation $\varphi_\varepsilon(\Psi_l(\widehat{\xi\eta}))$ est la $\varepsilon/2$ -déformation en question.

(IV) $\widehat{a_1 a_2}, \widehat{a_2 a_3}, \dots, \widehat{a_{h-1} a_h}$ étant une chaîne simple dont $C[\Psi_l(\widehat{a\beta})]$ est une dérivée, la transformation Ψ_l de $\widehat{a\beta}$ en $\bar{C}[\Psi_l(\widehat{a\beta})]$ peut être interprétée comme une transformation de $\widehat{a\beta}$ en l'ensemble $\sum_{i=1}^{h-1} \widehat{a_i a_{i+1}}$, telle que les arcs $\Psi_l^{-1}(a_{i-1} a_i)$ sont, abstraction faite des extrémités, disjoints de ceux de l'ensemble $\Psi_l^{-1}(\widehat{a_{i-1} a_i})$ où $i \neq s$.

(V) Il existe un $\eta > 0$ tel que, pour chaque couple d'arcs simples $\widehat{\alpha\beta}$ et $\widehat{\gamma\delta}$ d'un ϑ_{h_0+i} ,

$$C[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta})] \text{ non } \sim C[\Psi_i(\widehat{\gamma\delta})]$$

entraînée

$$\text{Min}\{\varrho_1(\widehat{\alpha\beta}, \widehat{\gamma\delta}), \varrho_1(\widehat{\gamma\delta}, \widehat{\alpha\beta})\} > \eta$$

où $\varrho_1(A, B) = \text{Sup}_{x \in A} \varrho(x, B)$.

En effet, supposons par contre que pour chaque $k=1, 2, \dots$ il existe un couple d'arcs simples $\widehat{\alpha^{(k)}\beta^{(k)}}$, $\widehat{\gamma^{(k)}\delta^{(k)}}$ d'un $\vartheta_{h_0+i_k}$ tels que:

$$(3) \quad C[\Psi_{i_k}(\widehat{\alpha^{(k)}\beta^{(k)}})] \text{ non } \sim C[\Psi_{i_k}(\widehat{\gamma^{(k)}\delta^{(k)}})],$$

$$(4) \quad \varrho_1(\widehat{\gamma^{(k)}\delta^{(k)}}, \widehat{\alpha^{(k)}\beta^{(k)}}) < 1/k.$$

A chaque portion de $C[\Psi_{i_k}(\widehat{\alpha^{(k)}\beta^{(k)}})]$ (ou $C[\Psi_{i_k}(\widehat{\gamma^{(k)}\delta^{(k)}})]$) correspond un arc $\widehat{\alpha^{(k)}\beta^{(k)}}$ tel que cette portion coïncide avec la chaîne $C[\Psi_{i_k}(\widehat{\alpha^{(k)}\beta^{(k)}})]$. D'autre part, chaque suite de portions tirées de $C[\Psi_{i_k}(\widehat{\alpha^{(k)}\beta^{(k)}})]$ (ou bien de $C[\Psi_{i_k}(\widehat{\gamma^{(k)}\delta^{(k)}})]$) où $k=1, 2, \dots$ et composée d'un nombre fixe d'éléments ne contient qu'un nombre fini de chaînes différentes. Ceci étant, il résulte de (3) et (4) l'existence, pour une suite croissante d'entiers $\{k_s\}$, d'un arc partiel $\widehat{\alpha(s)\beta(s)} \subset \widehat{\alpha^{(k_s)}\beta^{(k_s)}}$, d'un arc $\widehat{\gamma(s)\delta(s)} \subset \widehat{\gamma^{(k_s)}\delta^{(k_s)}}$, des points $\beta_1(s) \in \widehat{\alpha(s)\beta(s)}$, $\delta_1(s) \in \widehat{\gamma(s)\delta(s)}$ et d'une suite convergente de transformations $\Psi_{i_{k_s}}$, tels que pour $s=1, 2, \dots$:

$$1^0 \quad \text{Max}\{\varrho_1(\widehat{\gamma(s)\delta_1(s)}, \widehat{\alpha(s)\beta_1(s)}), \varrho(\alpha(s), \gamma(s)), \varrho(\beta_1(s), \delta_1(s))\} < 1/s,$$

2⁰ les chaînes $C[\Psi_{i_{k_s}}(\widehat{\alpha(s)\beta(s)})]$ et $C[\Psi_{i_{k_s}}(\widehat{\gamma(s)\delta(s)})]$ sont respectivement des dérivées de deux chaînes simples:

$$\begin{aligned} & \widehat{\alpha_1\alpha_2}, \widehat{\alpha_2\alpha_3}, \dots, \widehat{\alpha_{m-1}\alpha_m}, \widehat{\alpha_m\alpha_{m+1}}, \dots, \widehat{\alpha_{n-1}\alpha_n}, \widehat{\alpha_n\alpha_{n-1}}, \dots \\ & \dots, \widehat{\alpha_{m+1}\alpha_m}, \widehat{\alpha_m\alpha'_{p+1}}, \widehat{\alpha'_{p+1}\alpha'_{p+2}}, \dots, \widehat{\alpha'_{r-1}\alpha'_r}, \\ & \widehat{\alpha_1\alpha_2}, \widehat{\alpha_2\alpha_3}, \dots, \widehat{\alpha_{m-1}\alpha_m}, \widehat{\alpha_m\alpha_{m+1}}, \dots, \widehat{\alpha_{n'-1}\alpha_{n'}}, \widehat{\alpha_{n'}\alpha_{n'-1}}, \dots \\ & \dots, \widehat{\alpha_{m+1}\alpha_m}, \widehat{\alpha_m\alpha''_{p'+1}}, \widehat{\alpha''_{p'+1}\alpha''_{p'+2}}, \dots, \widehat{\alpha''_{r'-1}\alpha''_{r'}}, \end{aligned}$$

où $n' < n$.

$$3^0 \quad \sum_{l=1}^m \widehat{\alpha_l\alpha_{l+1}} = \widehat{\alpha_1\alpha_m}, \quad \sum_{l=m}^{n-1} \widehat{\alpha_l\alpha_{l+1}} = \widehat{\alpha_m\alpha_n}, \quad \widehat{\alpha_m\alpha'_{p+1}} + \sum_{l=p+1}^{r-1} \widehat{\alpha'_l\alpha'_{l+1}} = \widehat{\alpha_m\alpha'_r},$$

$$\text{où } \widehat{\alpha_1\alpha_m} \cdot \widehat{\alpha_m\alpha_n} = \widehat{\alpha_m\alpha_n} \cdot \widehat{\alpha_m\alpha'_r} = \widehat{\alpha_m\alpha'_r} \cdot \widehat{\alpha_1\alpha_m} = \widehat{\alpha_m},$$

$$4^0 \quad \sum_{l=1}^{n'-1} \widehat{\alpha_l\alpha_{l+1}} = \widehat{\alpha_m\alpha_{n'}}, \quad \sum_{l=p'+1}^{r'-1} \widehat{\alpha'_l\alpha'_{l+1}} + \widehat{\alpha_m\alpha''_{p'+1}} = \widehat{\alpha_m\alpha''_{r'}},$$

$$\text{où } \widehat{\alpha_1\alpha_m} \cdot \widehat{\alpha_m\alpha_{n'}} = \widehat{\alpha_m\alpha_{n'}} \cdot \widehat{\alpha_m\alpha''_{r'}} = \widehat{\alpha_m\alpha''_{r'}} \cdot \widehat{\alpha_1\alpha_m} = \widehat{\alpha_m},$$

$$5^0 \quad \Psi_{i_{k_s}}(\alpha(s)) = \Psi_{i_{k_s}}(\gamma(s)) = \alpha_1, \quad \Psi_{i_{k_s}}(\beta_1(s)) = \Psi_{i_{k_s}}(\delta_1(s)) = \alpha_m,$$

$$\Psi_{i_{k_s}}(\beta(s)) = \alpha'_r, \quad \Psi_{i_{k_s}}(\delta(s)) = \alpha''_{r'},$$

$$\Psi_{i_{k_s}}(\xi) = \alpha \quad \text{pour tout point } \xi \in \widehat{\beta_1(s)\beta(s)} - \beta_1(s),$$

$$\Psi_{i_{k_s}}(\zeta) = \alpha \quad \text{pour tout point } \zeta \in \widehat{\delta_1(s)\delta(s)} - \delta_1(s).$$

Soient maintenant, pour tout $s=1, 2, \dots$

$\xi(s)$ le premier point de l'arc $\widehat{\alpha(s)\beta(s)}$ tel que $\Psi_{i_{k_s}}(\xi(s)) = \alpha_n$ et

$\zeta(s)$ celui de l'arc $\widehat{\gamma(s)\delta(s)}$ tel que $\Psi_{i_{k_s}}(\zeta(s)) = \alpha_{n'}$.

On a évidemment pour tout $s=1, 2, \dots$

$$(5) \quad \Psi_{i_{k_s}}(\widehat{\beta_1(s)\xi(s)}) = \widehat{\alpha_m\alpha_n}, \quad \Psi_{i_{k_s}}(\widehat{\delta_1(s)\zeta(s)}) = \widehat{\alpha_m\alpha_{n'}}.$$

Admettons maintenant que chacune des suites

$$\{\widehat{\alpha(s) \xi(s)}\}, \{\widehat{\gamma(s) \zeta(s)}\}, \{\widehat{\alpha(s) \beta_1(s)}\}, \dots, \{\alpha(s)\}, \dots$$

est convergente, ce qui revient à prendre au besoin des suites partielles, et posons:

$$\text{Lim} \widehat{\alpha(s) \beta_1(s)} = L, \quad \text{Lim} \widehat{\gamma(s) \delta_1(s)} = M.$$

Je dis que

$$(6) \quad M \subset L.$$

En effet, supposons par contre que $M - L \neq 0$. Il existerait donc une suite convergente des points $\gamma^*(s) \in \widehat{\gamma(s) \delta_1(s)}$ telle que

$$\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \gamma^*(s) \text{ non } \in L.$$

Or, comme, $\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) + \text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \delta_1(s) \subset L$ d'après 1^o, il existerait un sous-continu M_1 de M tel que la partie commune de M_1 et L n'est pas connexe, de sorte que le continu $M_1 + L$ couperait le plan⁵⁾, contrairement à l'hypothèse que le continu K , qui contient $M_1 + L$, ne coupe pas le plan.

L'inclusion (6), ainsi démontrée, prouve que l'on peut trouver sur les arcs $\widehat{\alpha(s) \xi(s)}$ et $\widehat{\beta_1(s) \xi(s)}$ respectivement des points $\zeta'(s)$ et $\zeta''(s)$ pour lesquels

$$\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \zeta'(s) = \text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \zeta''(s) = \text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \zeta(s).$$

En effet, comme $\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \widehat{\alpha(s) \xi(s)} + \text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \widehat{\beta_1(s) \xi(s)} = L$ et $\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \zeta(s) \in M \subset L$, la chose est possible pour l'une des deux suites $\{\widehat{\alpha(s) \xi(s)}\}$ et $\{\widehat{\beta_1(s) \xi(s)}\}$, p. ex. pour la première. Or, si l'on avait $\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \xi(s) \text{ non } \in \text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \widehat{\xi(s) \beta_1(s)}$, on parviendrait, par un raisonnement analogue à celui de la démonstration de (6) (en se basant sur l'égalité $\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \beta_1(s) = \text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \delta_1(s)$), à une contradiction avec l'hypothèse que K ne coupe pas le plan.

⁵⁾ en vertu du théorème suivant de Z. Janiszewski: lorsque la partie commune de deux continus plans n'est pas connexe, leur somme coupe le plan. Cf. Sur les coupures du plan..., Prace Matem.-Fizyczne 26 (1913), p. 11-63.

Les points $\zeta'(s)$ et $\zeta''(s)$ peuvent être choisis de façon que l'on ait pour $s=1, 2, \dots$:

$$(7) \quad \begin{aligned} \Psi_{i_{k_s}}^* [\widehat{\alpha(s) \zeta'(s)}] &= \Psi_{i_{k_s}} [\widehat{\alpha(s) \zeta'(s)}] = \widehat{\alpha_1 \alpha_{n'}}, \\ \Psi_{i_{k_s}}^* [\widehat{\beta(s) \zeta''(s)}] &= \Psi_{i_{k_s}} [\widehat{\beta(s) \zeta''(s)}] = \widehat{\alpha_{n'} \alpha_r}, \end{aligned}$$

et que les suites $\{\widehat{\alpha(s) \zeta'(s)}\}$ et $\{\widehat{\beta(s) \zeta''(s)}\}$ soient convergentes. On obtient ainsi d'après (I) les égalités:

$$(8) \quad f^{(h_n)}(L') = \widehat{\alpha_1 \alpha_{n'}},$$

$$(9) \quad f^{(h_n)}(L'') = \widehat{\alpha_{n'} \alpha_r},$$

où L' et L'' désignent respectivement les limites des suites $\{\widehat{\alpha(s) \zeta'(s)}\}$ et $\{\widehat{\beta(s) \zeta''(s)}\}$.

Enfin, il est clair d'après (5) et (7) que l'on peut trouver pour tout $s=1, 2, \dots$ deux points $\zeta'(s)$ et $\zeta''(s)$ situés respectivement sur $\widehat{\alpha(s) \xi(s)}$ et $\widehat{\beta_1(s) \xi(s)}$ et tels que la suite $\{\widehat{\zeta'(s) \zeta''(s)}\}$ soit convergente et que l'on ait en outre:

$$(10) \quad \text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \zeta'(s) = \text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \zeta''(s) = \text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \zeta(s),$$

$$(11) \quad \Psi_{i_{k_s}}^* (\widehat{\zeta'(s) \zeta''(s)}) = \Psi_{i_{k_s}} (\widehat{\zeta'(s) \zeta''(s)}) = \widehat{\alpha_{n'} \alpha_n}.$$

Posons

$$\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \widehat{\zeta'(s) \zeta''(s)} = N.$$

L'égalité (11) entraîne d'après (I) la suivante:

$$(12) \quad f^{(h_n)}(N) = \widehat{\alpha_{n'} \alpha_n}.$$

Les trois continus N , L' et L'' sont situés dans K et ont le point $\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \zeta(s)$ en commun; cependant les formules (8), (9) et (12), rapprochées de celles de 3^o et 4^o, prouvent qu'aucun d'eux n'est contenu dans la somme de deux autres. Or, ceci contredit l'hypothèse que K jouit de la propriété (p₃) au point $\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} \zeta(s)$. La proposition (V) est ainsi établie.

(VI) Lorsqu'on a pour deux arcs partiels $\widehat{\alpha\beta}$ et $\widehat{\gamma\delta}$ d'un ϑ_{k_0+i}

$$C[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta})] \sim C[\Psi_i(\widehat{\gamma\delta})],$$

il existe pour tout $\omega > 0$ deux $\frac{3}{4}\varepsilon$ -déformations de l'ensemble $\widehat{\alpha\beta} + \widehat{\gamma\delta}$ en deux arcs simples $\widehat{\xi\eta}$ et $\widehat{\xi'\eta'}$:

$$\chi(\widehat{\alpha\beta} + \widehat{\gamma\delta}) = \widehat{\xi\eta}, \quad \chi'(\widehat{\alpha\beta} + \widehat{\gamma\delta}) = \widehat{\xi'\eta'},$$

telles que l'on a

$$\text{Max} \left\{ \sup_{x \in \widehat{\alpha\beta}} \rho(\Psi_i(x), \chi(x)), \sup_{x \in \widehat{\gamma\delta}} \rho(\Psi_i(x), \chi'(x)) \right\} < \omega.$$

En effet, en vertu de la relation $C[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta})] \sim C[\Psi_i(\widehat{\gamma\delta})]$, il existe d'une part une $\varepsilon/4$ -modification de $C[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta})]$ en une chaîne C' comportant l'existence de la chaîne $C' + C[\Psi_i(\widehat{\gamma\delta})]$ et d'autre part une $\varepsilon/4$ -modification de $C[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta})]$ en une chaîne C'' dont on peut former $C'' + C[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta})]$. Par raison de symétrie, il suffit de considérer le premier cas.

Désignons par C la chaîne simple

$$\widehat{a_1 a_2}, \widehat{a_2 a_3}, \dots, \widehat{a_{m-1} a_m}$$

qui correspond en vertu de (II) à la chaîne $C' + C[\Psi_i(\widehat{\gamma\delta})]$.

Supposons que de deux chaînes C' et $C[\Psi_i(\widehat{\gamma\delta})]$ c'est la première qui possède un élément extrême, soit $\widehat{a_1 a_2}$, n'appartenant pas à l'autre. Soit

$$\widehat{a_1 a_2}, \dots, \widehat{a_{n-1} a_n} \quad (n < m)$$

la chaîne partielle de C qui correspond à C' et

$$\widehat{a_{p-1} a_p}, \dots, \widehat{a_{r-1} a_r} \quad (n < p < r \leq m)$$

celle qui correspond à $C[\Psi_i(\widehat{\gamma\delta})]$.

Pour tout $\omega_1 > 0$, on peut évidemment construire dans le plan de K un arc simple

$$\widehat{\xi\xi_m} = \widehat{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{m-1} \widehat{\xi_i \xi_{i+1}},$$

somme de $m-1$ arcs partiels $\widehat{\xi_i \xi_{i+1}}$ tels que, pour tout $i=1, 2, \dots, m-1$, il existe une ω_1 -déformation biunivoque de $\widehat{a_i a_{i+1}}$ en l'arc $\widehat{\xi_i \xi_{i+1}}$ qui transforme le point a_i en ξ_i .

La transformation Ψ_i $\varepsilon/4$ -déforme l'arc $\widehat{\gamma\delta}$ en l'ensemble $\Psi_i(\widehat{\gamma\delta}) = \overline{C}[\Psi_i(\widehat{\gamma\delta})]$, donc, d'après (IV), en l'ensemble $\widehat{\alpha_{p-1} \alpha_p} + \dots + \widehat{\alpha_{r-1} \alpha_r}$. Il en vient que l'on peut définir une $(\varepsilon/4 + \omega_1)$ -déformation χ de l'arc $\widehat{\gamma\delta}$ en l'arc $\widehat{\xi_{p-1} \xi_p} + \dots + \widehat{\xi_{r-1} \xi_r}$. De même, à la $\varepsilon/4$ -modification C' de la chaîne $C[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta})]$ correspond d'après (III) une $\varepsilon/2$ -déformation Ψ_i^* de $\widehat{\alpha\beta}$ en l'ensemble \overline{C}' , donc aussi en l'ensemble $\widehat{a_1 a_2} + \dots + \widehat{a_{n-1} a_n}$. Il en résulte l'existence d'une $(\varepsilon/2 + \omega_1)$ -déformation χ de $\widehat{\alpha\beta}$ en $\widehat{\xi_1 \xi_2} + \dots + \widehat{\xi_{n-1} \xi_n}$. En vertu de la définition de la somme de deux chaînes, si les arcs $\widehat{\alpha\beta}$ et $\widehat{\gamma\delta}$ ont un point en commun, on peut définir les déformations χ de façon qu'elles coïncident sur leur partie commune. Il suffit maintenant de poser $\omega_1 = \text{Min}\{\varepsilon/4, \omega\}$ pour obtenir la première partie de (VI); la seconde est symétrique.

Les propositions (V) et (VI) permettent d'achever la démonstration du théorème. En vertu de (V) toutes les dendrites finies ϑ_{k_0+i} jouissent à partir d'un i de la propriété suivante:

(p): Si $\widehat{\alpha\beta} + \widehat{\alpha\gamma} + \widehat{\alpha\delta} \in \vartheta_{k_0+i}$, on a soit $C[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta})] \sim C[\Psi_i(\widehat{\alpha\gamma} + \widehat{\alpha\delta})]$, soit $C[\Psi_i(\widehat{\alpha\gamma})] \sim C[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta} + \widehat{\alpha\delta})]$, soit $C[\Psi_i(\widehat{\alpha\delta})] \sim C[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta} + \widehat{\alpha\gamma})]$.

En effet, dans le cas contraire, il existerait une suite infinie de triodes

$$\widehat{a_i \beta_i} + \widehat{a_i \gamma_i} + \widehat{a_i \delta_i} \subset \vartheta_{k_0+i}$$

satisfaisant pour tout $i=1, 2, \dots$ à l'inégalité

$$\text{Min} \left\{ \rho_1(\widehat{a_i \beta_i}, \widehat{a_i \gamma_i} + \widehat{a_i \delta_i}), \rho_1(\widehat{a_i \gamma_i}, \widehat{a_i \delta_i} + \widehat{a_i \beta_i}), \rho_1(\widehat{a_i \delta_i}, \widehat{a_i \beta_i} + \widehat{a_i \gamma_i}) \right\} > \eta.$$

En considérant des suites partielles $\{\widehat{a_{i_k} \beta_{i_k}}\}$, $\{\widehat{a_{i_k} \gamma_{i_k}}\}$, $\{\widehat{a_{i_k} \delta_{i_k}}\}$, convergentes respectivement vers B , C et D , on aurait donc

$$\text{Min} \left\{ \rho_1(B, C+D), \rho_1(C, D+B), \rho_1(D, C+B) \right\} > \eta,$$

ce qui donne

$$B - (C+D) \neq 0 \neq C - (D+B) \neq 0 \neq D - (C+B).$$

Or, comme $B \cdot C \cdot D \neq 0$, ces inégalités contredisent l'hypothèse que $K \supset B + C + D$ jouit de la propriété (p₃) en chacun de ses points.

Ceci établi, soit ϑ_{k_0+i} la première dendrite de la suite $\{\vartheta_{k_0+i}\}$ qui jouit de la propriété (p). Nous pouvons évidemment supposer que ϑ_{k_0+i} est de la forme

$$\widehat{\alpha\beta_1} + \widehat{\alpha\beta_2} + \dots + \widehat{\alpha\beta_N}$$

avec le seul point de ramification α . On a donc, pour chaque système de 3 indices distincts k_1, k_2, k_3 , l'une des 3 relations:

$$O[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta_{k_1}})] \sim O[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta_{k_2}} + \widehat{\alpha\beta_{k_3}})],$$

$$O[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta_{k_2}})] \sim O[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta_{k_1}} + \widehat{\alpha\beta_{k_3}})],$$

$$O[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta_{k_3}})] \sim O[\Psi_i(\widehat{\alpha\beta_{k_1}} + \widehat{\alpha\beta_{k_2}})],$$

p.ex. la première. Elle entraîne en vertu de (VI), en y posant $\omega = \varepsilon/8N$, l'existence de deux $\frac{\varepsilon}{8}$ -déformations χ et χ' de la dendrite $\widehat{\alpha\beta_{k_1}} + \widehat{\alpha\beta_{k_2}} + \widehat{\alpha\beta_{k_3}}$ en deux arcs simples respectivement, de façon que

$$\text{Max} \left\{ \sup_{x \in \widehat{\alpha\beta_{k_1}}} \varrho(\Psi_i(x), \chi(x)), \sup_{x \in \widehat{\alpha\beta_{k_2}} + \widehat{\alpha\beta_{k_3}}} \varrho(\Psi_i(x), \chi'(x)) \right\} < \varepsilon/8N.$$

Il en résulte immédiatement par induction la possibilité de transformer la dendrite ϑ_{k_0+i} toute entière en un arc simple au moyen d'une $\left(\frac{3}{4}\varepsilon + \frac{\varepsilon(N-1)}{8N}\right)$ -déformation, soit une $7\varepsilon/8$ -déformation. Comme d'autre part ϑ_{k_0+i} est d'après (i) et (1) une $\varepsilon/16$ -déformation du continu K , ce continu se laisse ε -déformer en un arc simple, c. q. f. d.

Quelques inégalités pour les opérations linéaires.

Par

J. Marcinkiewicz et A. Zygmund (Wilno).

1. Nous entendons par $L^r(a, b)$, où $r > 0$, la classe des fonctions (réelles) définies dans l'intervalle $a \leq x \leq b$ et intégrables en puissance r . Si une opération linéaire $\varphi = T[f]$ transforme toute fonction $f \in L^r(a, b)$ en une fonction $\varphi \in L^q(a, \beta)$, nous disons que T appartient à la classe $L^{r,q}(a, b; \alpha, \beta)$ et nous écrivons $T \in L^{r,q}(a, b; \alpha, \beta)$. Le plus petit nombre M tel que

$$(1) \quad \left\{ \int_a^\beta |\varphi(\xi)|^q d\xi \right\}^{1/q} \leq M \left\{ \int_a^b |f(x)|^r dx \right\}^{1/r}$$

est nommé la *norme* de l'opération T .

En utilisant un raisonnement de M. Paley, on peut démontrer que si $T \in L^{r,r}(a, b; \alpha, \beta)$ et si M est la norme de T , alors pour toute suite $\{f_n\}$ finie ou infinie de fonctions de la classe $L^r(a, b)$ on a l'inégalité

$$(2) \quad \left\{ \int_a^\beta \left(\sum_n \varphi_n^2 \right)^{\frac{1}{2}r} d\xi \right\}^{1/r} \leq M C_r \left\{ \int_a^b \left(\sum_n f_n^2 \right)^{\frac{1}{2}r} dx \right\}^{1/r},$$

où $\varphi_n = T[f_n]$, le coefficient C_r ne dépendant que de r ¹⁾.

1) Cf. R. E. A. C. Paley, *A remarkable series of orthogonal functions, I*, Proc. London Math. Soc. **34** (1932), pp. 241-264; en particulier la démonstration du lemme 5, p. 250. L'inégalité (2) n'y est pas formulée explicitement, mais sa démonstration est analogue à celle du lemme 5.