Nach Voraussetzung ist A nicht leer. Daraus folgt auf Grund von (9):

(11) *es gibt mindestens zwei Restklassen von R mod I.*

Es seien $x, y \in R$ zwei Elemente, so daß x, y *non* $\in I$. Es gilt daher $x \neq 0 \neq y$ und folglich lassen sich x und y in der Form $a_1 + \ldots + a_n$ bzw. $b_1 + \ldots + b_m$ darstellen, wobei die Elemente $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ zu B gehören und den Bedingungen $a_1 \supset \ldots \supset a_n$, $a_1 \neq \ldots \neq a_n$, $b_1 \supset \ldots \supset b_m$, $b_1 \neq \ldots \neq b_m$ genügen. Im allgemeinen gehört eine bestimmte Anzahl, sagen wir p, der a_i zur Menge A. Wäre p eine gerade Zahl, so hätten wir nach (4) $x \in I$. Also ist p ungerade. Daraus schließen wir leicht, daß entweder $p = n$ und $x \equiv a_n$ (mod I) oder $p < n$, $x \equiv (a_p + a_{p+1})$ (mod I) und $a_p \in A$, $a_{p+1} \in B - A$ gilt. Ganz ähnlich zeigt man, daß entweder alle b_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ der Menge A angehören und $y \equiv b_m$ (mod I) ist, oder aber es eine Zahl $q < m$ gibt, so daß $y \equiv (b_q + b_{q+1})$ (mod I) und $b_q \in A$, $b_{q+1} \in B - A$. Demgemäß ist die Summe $x + y$ einem der folgenden vier Elemente modulo I kongruent: $a_n + b_m$, $a_n + b_q + b_{q+1}$, $a_p + a_{p+1} + b_m$, $a_p + a_{p+1} + b_q + b_{q+1}$, wobei $a_n, b_m, a_p, b_q \in A$, $a_{p+1}, b_{q+1} \in B - A$. Daraus folgt auf Grund von (4), daß $x + y \in I$, d. h. $x \equiv y$ (mod I). Zwei Elemente von R, die zu I nicht gehören, sind also immer kongruent modulo I, so daß es höchstens zwei Restklassen von R mod I gibt. Mit Rücksicht auf (11) folgt daraus:

(12) *I ist ein Primideal von R.*

Damit ist Satz 4.1[a]) bewiesen. Satz 4.1[b]) folgt unmittelbar aus [a]), (4), (10) und (12).

Korollar 4.2. Ist R ein Boolescher Ring mit einer geordneten Basis B, so ist die Menge aller Primideale von R mit der Ausfüllung von B gleichmächtig.

In der Theorie der geordneten Mengen beweist man, daß die Ausfüllung einer zerstreuten Menge mit dieser Menge selbst gleichmächtig ist. Aus Korollar 4.2 folgt also noch folgendes

Korollar 4.3. Ist R ein Boolescher Ring mit einer zerstreuten Basis B, so ist die Menge aller Primideale von R mit B gleichmächtig.

Über die Existenz von sogenannten Kollektiven.

Von

Willy Feller (Stockholm).

1. In Anschluss an die bekannte Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch von Mises wurden viele Versuche unternommen, die Existenz von gewissen Merkmal-(Zahlen-) folgen zu beweisen, die möglichst weitgehende „Regellosigkeitseigenschaften" besitzen [1]). Diese Untersuchungen sind z. T. Selbstzweck, doch dienen die meisten dem axiomatischen Nachweis der Widerspruchsfreiheit für Kollektivbegriffe, die aus dem ursprünglichen von Misesschen durch starke Einengung hervorgegangen sind. Umfassendere Existenzsätze haben jedoch erst Copeland [2]) und Wald erbracht mit dem Anspruch, damit eine Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben zu haben, bei der keine wesentlichen Eigenschaften der von Misesschen Theorie verloren gehen. Die Ansätze sind miteinander eng verwandt, doch sind die Copelandschen Ergebnisse bloss ein Spezialfall der Waldschen.

Diese Ansätze werden im Zusammenhang mit den sog. Grundlagenfragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung neuerdings viel besprochen und die Literatur über die Existenz sog. Kollektive scheint noch lange nicht abgeschlossen zu sein. Daher mag es nützlich sein, den eigentlichen Kern der erwähnten Existenzsätze klarer herauszupräparieren. Es zeigt sich nämlich, dass man die Waldschen (und daher a fortiori die Copelandschen) Sätze bloss in naturgemässer Weise mengentheoretisch zu interpretieren braucht; die

[1]) Vgl. die Literaturzusammenstellung am Ende der Arbeit.

[2]) Das uns interessierende allgemeinste Resultat von Copeland ist in [6] enthalten. Die in den übrigen (und auch in hier nicht zitierten) Arbeiten entwickelte Theorie der admissible numbers ist nur ein Spezialfall hiervon.

moderne Theorie liefert dann mühelos nicht nur einen äusserst einfachen und anschaulichen Beweis, sondern auch wesentliche Verschärfungen.

Eine Merkmalfolge ist nichts anderes als ein Punkt des unendlichen Produktraumes $\Pi=\pi\times\pi\times\pi\times\ldots$, wobei π der Merkmalraum (also im Prinzip ein beliebiger abstrakter Raum) ist. Macht man dann geeignete Regularitätsvoraussetzungen (nämlich absolute Additivität der Wahrscheinlichkeitsverteilung in π und Messbarkeit der zugelassenen „Auswahlfunktionen"), so erscheint der Waldsche Existenzsatz als eine weitgehende, aber für die modernen Hilfsmittel äusserst leichte Verallgemeinerung des Borelschen Satzes über die Existenz der normalen Zahlen; letzterer wurde auch bereits 1922 von Steinhaus [6] in ähnlicher Weise in einem unendlichen Produktraum gedeutet (Vgl. auch Łomnicki et Ulam [5]). Der Satz ordnet sich dann auch unmittelbar in die moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung, etwa in der von Kolmogoroff [4] gegebenen Axiomatik, ein. Wald macht allerdings nicht die erwähnten Einschränkungen, und damit wird das übliche Feld der Wahrscheinlichkeitsrechnung scheinbar gesprengt. Es zeigt sich aber, dass in diesem Zusammenhang die beiden Einschränkungen ganz unwesentlich sind, und dass man sich durch einen einfachen Kunstgriff von ihnen befreien kann.

Ihrem Wesen nach sind die folgenden Überlegungen eng verwandt auch mit einer Note von Doob [1], in welcher in eleganter Weise gezeigt wird, wie man die Behauptung über die Unmöglichkeit eines Spielsystems im unendlichdimensionalen Euklidischen Raume exakt deuten kann. Doob hat dort auch bereits bemerkt, dass man aus seinem (übrigens mit anderen Hilfsmitteln bewiesenen) Satz u.a. sehr leicht die Existenz der Copelandschen „admissible numbers" folgern kann.

N⁰ 2 bringt einige notwendige Vorbereitungen und eine Diskussion der Resultate; in N⁰ 3 wird der Beweis für den erwähnten Spezialfall erbracht, in N⁰ 4 werden die Einschränkungen liquidiert.

2. Es sei π eine beliebige, mehr als ein Element enthaltende Menge, die wir in Anschluss an die Wahrscheinlichkeitsrechnung als den „Merkmalraum" (= label space) bezeichnen wollen, ihre Elemente als Merkmale. Φ sei ein π enthaltender Körper von Untermengen von π, und $p(\gamma)$ eine auf Φ definierte nichtnegative, additive Mengenfunktion mit $p(\pi)=1$. Es wird im folgenden durchgehend vorausgesetzt, dass es abzählbar viele Mengen φ_k, $k=1,2,\ldots$, aus Φ gibt, derart dass für jedes $\gamma\in\Phi$

$$p(\gamma)=\operatorname{fin}\inf_{\varphi_i\supset\gamma} p(\varphi_i)=\operatorname{fin}\sup_{\varphi_i\subset\gamma} p(\varphi_i) \tag{1}$$

ist.

Unter einer n-stelligen ($n\geqslant 1$) *Auswahlfunktion* wird mit Wald eine Funktion $f_n(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ verstanden, die jedem geordneten n-tupel $P_1,\ldots,P_n$ von Punkten aus π eine der Zahlen 0 oder 1 zuordnet. f_0 bedeutet stets 0 oder 1. Eine unendliche Folge $f_0, f_1(P_1),\ldots,f_n(P_1,\ldots,P_n),\ldots$ heisst eine *Auswahlvorschrift* A. Ist $P=\{P_1,P_2,\ldots\}$ eine beliebige Folge von Punkten aus π, so wird aus ihr nach der Auswahlvorschrift A eine neue Folge $P^*=\{P_{r_1},P_{r_2},\ldots\}$ gebildet, indem man alle die Punkte P_{r_k} mit $r_1<r_2<\ldots$ auswählt, für welche

$$f_{r_k-1}(P_1,\ldots,P_{r_k-1})=1 \tag{2}$$

ist. Die Folge r_k kann natürlich auch leer sein[3]).

Für eine Menge $\gamma\in\Phi$ bezeichne $a_N(\gamma;P,A)$ die Anzahl der Indizes r_k mit $k\leqslant N$, für welche $P_{r_k}\subset\gamma$. Die Folge $P=\{P_1,\ldots\}$ heisse *regulär gegenüber der Auswahlvorschrift* A, *wenn die Folge* r_k *entweder abbricht oder aber*

$$\lim\frac{1}{N}a_N(\gamma;P,A)=p(\gamma) \tag{3}$$

ist, für alle $\gamma\in\Phi$.

Ist schliesslich Σ irgend eine Menge von Auswahlvorschriften, so heisst P ein *Kollektiv bezüglich* Σ *und der auf* Φ *definierten Mengenfunktion* $p(\gamma)$, wenn es regulär ist bezüglich sämtlicher Auswahlvorschriften aus Σ. Das Waldsche Hauptergebnis[4]) lautet: *Unter den gemachten Voraussetzungen über* $p(\gamma)$ *und wenn* Σ *abzählbar ist, so gibt es kontinuum viele Kollektive*[5]).

---

[3]) Man denke etwa beim Würfeln an die Vorschrift: man „wählt" diejenigen Versuche, die auf eine Eins folgen.

[4]) Weitere Resultate Walds beziehen sich auf die effektive Konstruierbarkeit von Kollektiven und verwandte Fragen.

[5]) Die Resultate Copelands (vgl. Fussnote [2])) sind ein Spezialfall hiervon. Zunächst betrachtet er im wesentlichen bloss Euklidische und endliche Räume, und auch nur absolut additive $p(\gamma)$. Am wesentlichsten werden jedoch die zugelassenen Auswahlfunktionen eingeschränkt. Es kommen nämlich bloss folgende Verfahren in Betracht:

Wir wollen die Folgen $P=\{P_1,\ldots\}$ als Punkte des Produktraumes $\Pi=\pi\times\pi\times\pi\times\ldots$ interpretieren. Um zu einer Masstheorie in Π zu gelangen führen wir *vorläufig* für $p(\gamma)$ die Kontinuitätsvoraussetzung (Kolmogoroff [3]) ein: Wenn es eine monoton gegen die leere Menge abnehmende Folge $\gamma_1\supset\gamma_2\supset\ldots$ von Mengen aus Φ gibt, so gilt

$$\lim p(\gamma_i)=0. \tag{4}$$

Nach einem bekannten Erweiterungssatz von Banach (vgl. Kolmogoroff [4], S. 16) kann man dann $p(\gamma)$ erweitern zu einer absolut additiven Mengenfunktion, die auf einem σ-Körper $\bar{\Phi}$ definiert ist.

Sind $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, beliebige Mengen aus π, so nennen wir mit Kolmogoroff die Menge der Punkte $P=\{P_1,\ldots\}$ aus Π, für welche $P_i\subset\lambda_i$, $i=1,\ldots,n$, eine *Zylindermenge n-ter Stufe* und bezeichnen sie mit $\{\lambda_1\times\lambda_2\times\ldots\times\lambda_n\}$. Ist insbesondre $\lambda_i\in\bar{\Phi}$, so setzt man

$$|\{\lambda_1\times\lambda_2\times\ldots\times\lambda_n\}|=p(\lambda_1)\cdot p(\lambda_2)\cdot\ldots\cdot p(\lambda_n). \tag{5}$$

Wie Łomnicki und Ulam [5] sowie Kolmogoroff [4], III, § 4, gezeigt haben, kann man die so definierte Mengenfunktion zu einer absolut additiven Massfunktion in Π erweitern. Speziell wird $|\Pi|=1$.

Eine Auswahlfunktion $f_n(P_1,\ldots,P_n)$ ist nun eine spezielle auf Π definierte zweiwertige Punktfunktion. Wir werden *zunächst* nur *messbare* Auswahlvorschriften betrachten. Obwohl diese Einschränkung insbesondere vom Standpunkt der praktischen Wahrscheinlichkeitsrechnung aus sehr natürlich ist, werden wir sie später gleichzeitig mit (4) eliminieren. Wir werden zeigen:

Unter den gemachten Voraussetzungen über $p(\gamma)$ sind fast alle Punkte von Π regulär gegenüber jeder beliebigen aber festen messbaren Auswahlvorschrift $A=\{f_0,f_1(P_1),\ldots\}$. Da bei Wald und Copeland bloss abzählbar viele Auswahlvorschriften zugelassen werden, sind ihre Existenzsätze darin enthalten.

a) Gegeben eine *feste* Zahlenfolge $s_1<s_2<\ldots$; aus der Folge $P_1,P_2,\ldots$ wird dann die Teilfolge $P_{s_1},P_{s_2},\ldots$ ausgewählt. Hier handelt es sich somit um Auswahlfunktionen f_n, die von den P_i unabhängig sind.

b) Es wird ausserdem gefordert, dass für jedes N-tupel von Mengen $\gamma_1,\ldots,\gamma_N$ aus Φ die relative Häufigkeit derjenigen Abschnitte $P_{nN+1},P_{nN+2},\ldots,P_{(n+1)N}$, in welchen $P_{nN+r}\subset\gamma_r$ ist, gegen den Grenzwert $p(\gamma_1)p(\gamma_2)\ldots p(\gamma_N)$ strebt. Zusammengenommen sind also, wie man sieht, die Copelandschen Forderungen schwächer als die Waldschen, selbst wenn man bei diesen nur soche Auswahlvorschriften zulässt, die bloss von einer beschränkten Anzahl von P_i abhängen.

Es sei A_0 die Auswahlvorschrift, für welche identisch $f_n\equiv 1$, die also Π identisch auf sich abbildet. Die gegenüber A_0 regulären Punkte (in denen also jede Menge $\gamma\in\Phi$ die totale Häufigkeit $p(\gamma)$ hat) sind das Analogon der normalen Zahlen von Borel; letztere erhält man, wenn π bloss aus endlich vielen Punkten besteht (Steinhaus [6]). In diesem Spezialfall ist der Satz natürlich bloss die masstheoretische Deutung des „starken Gesetztes der grossen Zahlen".

Dies zeigt zugleich, in welcher Richtung der Satz trivial zu verschärfen ist. Hierzu braucht man nämlich bloss die Forderung der Normalität durch eine schärfere zu ersetzen, die ebenso „fast sicher" erfüllt ist. Beispielsweise gibt es unter den zugelassenen Kollektiven auch solche, bei denen die relative Häufigkeit einer Menge $\gamma\in\Phi$ zwar gegen $p(\gamma)$ strebt, aber dauernd etwa $\geqslant p(\gamma)$ bleibt. Man weiss aber, dass für fast alle Punkte von Π die entsprechenden Abweichungen um 0 herumschwanken, und hat auch genauere Abschätzungen hierfür. Ersetzt man die Forderung der Normalität durch eine in dieser Richtung verschärfte, so kann man immer noch den folgenden Beweis mühelos übertragen, und damit den Kollektivbegriff Beliebig weiter „verschärfen" oder „präzisieren". Es ist natürlich eine reine Geschmacksfrage, wie starke Forderungen man an die Kollektive stellen will, bzw. für die Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung für „unbedingt erforderlich" hält [6]). Ich werde im folgenden nicht weiter darauf eingehen, weil mir das Interesse solcher Betrachtungen für die Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mehr als zweifelhaft erscheint [7]).

[6]) Es wurde häufig, insbesondere von Fréchet [2], hervorgehoben, dass mit dem von Misesschen Kollektivbegriff nur *gewisse* Ereignisse der Wahrscheinlichkeit Null aus der Betrachtung von vornherein willkürlich ausgeschlossen werden. Immerhin geschieht bei von Mises diese Abgrenzung in natürlicher Weise, da ja sein Ausgangspunkt eine Beschreibung der elementarsten Erfahrung, nämlich des ausgeschlossenen Spielsystems ist. Bei Wald und Copeland wird jedoch das System der Auswahlvorschriften vollkommen relativiert, und es ist gar nicht gesagt, welche Ereignisse eigentlich aus der Theorie ausgeschlossen werden sollen. Mir scheint daher, dass sich diese Theorien auch inhaltlich nur sehr lose an den von Misesschen Aufbau anschliessen.

[7]) Es mag in diesem Zusammenhang auf die wichtigen und viel trieferen Regellosigkeitsbetrachtungen verwiesen werden, die mit den Ergodensätzen der statistischen Mechanik zusammenhängen; vgl. E. Hopf [3].

In der erwähnten Fassung liegt unser Satz natürlich wesentlich an der einschränkenden Voraussetzung (4) sowie an der Beschränkung auf messbare Auswahlfunktionen. Mit nichtmessbaren Funktionen ist es leicht Beispiele zu konstruieren, bei denen das äussere Mass der Punkte von Π, die in bezug auf eine Auswahlvorschrift nicht regulär sind, gleich 1 wird. In der heute üblichen Behandlung wahrscheinlichkeitstheoretischen Fragen werden derartige Fälle a priori aus der Betrachtung ausgeschlossen. In dem uns beschäftigenden Spezialfall zeigt es sich jedoch, dass man die Massfunktion in Π derart abändern kann, dass sämtliche asymptotischen Eigenschaften erhalten bleiben und *alle* Auswahlfunktionen messbar werden. *Mit dieser* (übrigens ziemlich willkürlichen) *Massfunktion bleibt unser Satz auch im allgemeinsten Fall erhalten* (d. h. auch ohne die Kontinuitätsvoraussetzung (4)).

3. Dem Gesagten gemäss setzen wir in dieser Nummer die Kontinuitätsbedingung (4) voraus, so dass uns (5) eindeutig eine Masstheorie in Π liefert. Es sei dann $A=\{f_0, f_1(P_1), f_2(P_1,P_2),\ldots\}$ eine feste Auswahlvorschrift, wobei die f_n in Π messbare Punktfunktionen sind.

Um zu zeigen, dass $P=\{P_1,P_2,\ldots\}$ regulär ist bezüglich A, genügt es wegen (1) zu zeigen, dass (3) erfüllt ist, wenn γ irgend eine der Basismengen φ_i von Φ ist. Es genügt uns somit zu beweisen: *Für jede feste Menge $\gamma\in\Phi$ (und die gegebene Auswahlvorschrift A) gilt* (3) *für fast alle Punkte P von Π.*

Bei der Anwendung von A auf P möge sich die Folge $P_{r_1}, P_{r_2},\ldots$ ergeben (vgl. (2)). Es sei dann $\alpha_{n,k}$ die Menge der Punkte von Π, für welche die Folge r_i mindestens n Glieder enthält und unter den Punkten $P_{r_1},\ldots,P_{r_n}$ genau k der Menge γ angehören (für $k<0$ und $n<k$ ist $\alpha_{n,k}$ natürlich als leere Menge zu interpretieren, und ähnlich im folgenden). Es soll dann gezeigt werden, dass [8])

$$|\alpha_{n,k}|\leqslant\binom{n}{k}\{p(\gamma)\}^k\{1-p(\gamma)\}^{n-k} \tag{6}$$

ist.

[8]) Für $A=A_0$ (vgl. **2**) gilt in (6) natürlich das Gleichheitszeichen. Im allgemeinem kann es schon wegen der Punkte nicht gelten, für welche die Folge r_i abbricht. Das Binomialgesetz (6) gibt jedoch im allgemein nicht einmal die relative Grössenordnung der $|\alpha_{n,k}|$ untereinander an, und die einzelne Auswahlvorschrift kann sehr wohl spezielle Mengen stark begünstigen.

Der Beweis geschieht durch Induktion. Für $n=1$ sei β_1^t die Menge der Punkte, für welche $r_1=t$ ist, $\alpha_{1,1}^t$ die Teilmenge von β_1^t, für welche $P_t=P_{r_1}\subset\gamma$ ist. Dann ist β_1^t der Durchschnitt der $(t-1)$ Mengen, auf welchen $f=0$ ist für $i=1,2,\ldots,t-2$, und derjenigen mit $f_{t-1}=1$, so dass β_1^t messbar ist. Wenn $Q=\{Q_1,Q_2,\ldots\}$ in β_1^t enthalten ist, so enthält β_1^t auch sämtliche Punkte der Form $\{Q_1,\ldots,Q_{t-1},X_1,X_2,\ldots\}$, und man sieht, dass $\alpha_{1,1}^t$ der Durchschnitt ist von β_1^t mit der Zylindermenge t-ter Stufe $\{\pi\times\pi\times\ldots\times\pi\times\gamma\}$. Man hat daher $|\alpha_{1,1}^t|=|\beta_1^t|\cdot p(\gamma)$ und somit

$$|\alpha_{1,1}|=\sum_t|\alpha_{1,1}^t|=p(\gamma)\sum_t|\beta_1^t|\leqslant p(\gamma).$$

Aus Symmetriegründen ist natürlich ebenso $|\alpha_{1,0}|\leqslant 1-p(\gamma)$.

Allgemein sei $\beta_{n,k}^t$ die Menge der Punkte P von Π, für welche $r_n=t$ ist und unter den Punkten $P_{r_1},\ldots,P_{r_{n-1}}$ genau k der Menge γ angehören. Bei festen n und k sind diese Mengen paarweise fremd, und es ist

$$\sum_t\beta_{n,k}^t\subset\alpha_{n-1,k}. \tag{7}$$

$\alpha_{n,k}^t$ und $\overline{\alpha}_{n,k}^t$ seien die Teilmengen von $\beta_{n,k}^t$ mit $P_{r_n}\subset\gamma$ bzw. $P_{r_n}\not\subset\gamma$. Wiederum wird $|\alpha_{n,k}^t|=p(\gamma)\cdot|\beta_{n,k}^t|$ und $|\overline{\alpha}_{n,k}^t|=\{1-p(\gamma)\}\cdot|\beta_{n,k}^t|$. Da aber

$$\alpha_{n,k}=\sum_t\alpha_{n,k-1}^t+\sum_t\overline{\alpha}_{n,k}^t$$

ist, so folgt vermöge (7) durch Induktion

$$\begin{aligned}|\alpha_{n,k}|&\leqslant p(\gamma)|\alpha_{n-1,k-1}|+\{1-p(\gamma)\}|\alpha_{n-1,k}|\\&\leqslant\left\{\binom{k-1}{n-1}+\binom{k}{n-1}\right\}\{p(\gamma)\}^k\{1-p(\gamma)\}^{n-k},\end{aligned}$$ w. z. b. w.

Aus (6) folgt nun vermöge einer bekannten Abschätzung der Binomialkoeffizienten — dem von Cantelli entdeckten *starken* Gesetz der grossen Zahlen — dass für jedes feste $\varepsilon>0$ das Mass der Menge

$$\sum_{n=N}^{\infty}\sum_{\left|\frac{k}{n}-p(\gamma)\right|>\varepsilon}\alpha_{n,k}$$

mit $N\to\infty$ gegen 0 strebt. Das Mass der Punkte, für welche der obere oder der untere Grenzwert von $\frac{1}{N}a_N(\gamma;P,A)$ um mehr als ε von $p(\gamma)$ abweicht, ist also gleich 0, und damit ist die Behauptung bewiesen.

4. Wir gehen zu dem Fall beliebiger Auswahlfunktionen über, und lassen gleichzeitig auch die Voraussetzung (4) fallen. Wir wollen dann zunächst eine Massfunktion in Π konstruieren, für welche *alle* Auswahlfunktionen messbar werden. Zu diesem Zwecke konstruieren wir zu jedem naturlichen n eine auf *sämtlichen* Untermengen von π definierte absolut additive und nicht negative Mengenfunktion $p_n(\gamma)$ mit

$$(8) \qquad p_n(\varphi_i)=p(\varphi_i) \quad \text{für} \quad i=1,2,\dots,n \quad \text{und} \quad p_n(\pi)=1.$$

Solche Funktionen gibt es immer. Am einfachsten kann man sie vielleicht folgendermassen konstruieren. Mit Hilfe der Durchschnitte $\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\dots\varphi_{i_s}$ findet man leicht höchstens 2^n paarweise fremde Mengen $\psi_1,\dots,\psi_N$, $(N\leqslant 2^n)$, derart, dass sich sämtliche φ_i mit $i\leqslant n$ als Vereinigungsmenge gewisser ψ_j darstellen lassen. Die ψ_j gehören wegen der Körpereigenschaft wieder zu Φ. Man wähle für jedes $i\leqslant N$ einen Punkt $Q_i\subset\psi_i$ und setze

$$p_n(Q_i)=p(\psi_i);$$

für alle Teilmengen $\gamma\subset\pi-Q_1-Q_2-\dots-Q_N$ setze man schliesslich $p_n(\gamma)=0$. Wegen der Additivität von $p(\gamma)$ erfüllt $p_n(\gamma)$ offenbar die gestellten Forderungen.

Zur Konstruktion der Masstheorie in Π setze man dann für die Zylindermenge $\{\lambda_1\times\lambda_2\times\dots\times\lambda_N\}$ (vgl. N⁰ 2, S. 90)

$$|\{\lambda_1\times\lambda_2\times\dots\times\lambda_n\}|=p_1(\lambda_1)\cdot p_2(\lambda_2)\dots p_n(\lambda_n).$$

Nach der Kolmogoroffschen Masstheorie für unendlichdimensionale Räume ([4], III, § 4) kann man diese Mengenfunktion eindeutig zu einer Massfunktion in Π erweitern. In der Zylindermenge n-ter Stufe $\{\pi\times\pi\times\dots\times\pi\}$ gibt es dann höchstens $2\times 2^2\times 2^3\times\dots\times 2^n$ Punkte, deren Vereinigungsmenge das Mass 1 hat, so dass alle Untermengen dieser Zylindermenge messbar werden. Alle Auswahlfunktionen sind daher messbar.

Nun lässt sich leicht zeigen: Ist γ irgend eine der Mengen φ_i und A eine feste Auswahlfunktion, so gilt (3) für fast alle Punkte von Π. Wenn man nämlich beachtet, dass für $n\geqslant i$ stets $p_n(\varphi_i)=p(\varphi_i)$ ist, so sieht man, dass sich der Beweis aus N⁰ 3 fast wörtlich überträgt, sofern man nur überall die Indizes $r_k<i$ ausser Acht lässt, was aber für (3) keine Rolle spielt. Wegen (1) folgt daraus aber unmittelbar, dass mit unserer Massbestimmung in Π fast alle Punkte regulär sind bezüglich jeder festen Auswahlfunktion. Darin ist der allgemeine Existenzsatz von Wald enthalten.

Literatur.

a) Für die Konstruktion von Kollektiven u. Ä.[9]).

A. H. Copeland[2]):

[1] Admissible numbers in the theory of probability. Amer. Journ. Math. **50** (1928).

[2] Admissible numbers in the theory of geometrical probability. Ibid. **53** (1931). S. 153-162.

[3] The theory of probability from the point of view of admissible numbers. Ann. Mathem. Statistics, **3**, (1932), S. 143-156.

[4] Point set theory applied to the random selection of the digits of an adssible number. Amer. Journ. Math. **58** (1936), S. 181-192.

[5] Admissible numbers. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, **1** (1936), S. 52-57.

[6] Consistency of the conditions determining Kollektivs. Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1937), S. 333-357.

K. Dörge:

[7] Zu der von R. v. Mises gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Zeitsch. **32** (1930), S. 232-258.

R. Iglisch:

[8] Zum Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. **107** (1933), S. 471-484.

R. v. Mises:

[9] Über Zahlenfolgen, die ein kollektiv-ähnliches Verhalten zeigen. Math. Ann. **108** (1933), S. 757-772.

H. Reichenbach:

[10] Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Zeitschr. **34** (1932), S. 568-619.

E. Tornier:

[11] Bemerkungen zu der Arbeit von Herrn Iglisch: Zum Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. **108** (1933), S. 319-320.

J. A. Ville:

[12] Sur la notion de collectif. C. R. Acad. Sci. Paris, **203** (1936), S. 26-27.

---

[9]) Für den ursprünglichen Ansatz bei von Mises (in welchem mengentheoretische Existenzfragen keinen Raum haben) vgl. etwa von Mises: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig und Wien, 1931.

Mit dem Kollektivbegriff zusammenhängend, aber doch wesentlich anderer Natur ist die Torniersche Deutung der Wahrscheinlichkeiten durch Häufigkeiten in Matrizen. Hierfür E. Tornier: Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrationstheorie. Leipzig und Berlin 1936, oder E. Kamke: Wahrscheinlichkeitstheorie, Leipzig 1932.

A. Wald [10]):

[13] Sur la notion de collectif dans le calcul des probabilités. C. R. Acad. Sci. Paris, **202** (1936), S. 180-183.

[14] Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebn. math. Kolloqu. **8**, (1937), S. 38-72.

b) Sonst zitierte Literatur.

J. L. Doob:

[1] Note on Probability. Ann. of Math. **37** (1936), S. 363-367.

M. Fréchet:

[2] Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. (in Borels Traité **1**, Fasc. 3), livre 1, Paris 1937.

E. Hopf:

[3] On causality, statistics and probability. Journ. Math. Phys. of Massachusetts Inst. Techn. **13** (1934), S. 50-102.

A. Kolmogoroff:

[4] Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebn. Math. **2**, 3. Berlin 1933.

Z. Łomnicki et S. Ulam:

[5] Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités I. Fund. Math. **23** (1934), S. 237-278.

H. Steinhaus:

[6] Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure. Fund. Math. **4** (1923), S. 286-310.

[10]) Ein im Rahmen des von der Universität Genf 1937 veranstalteten Kolloquiums über Wahrscheinlichkeitsrechnung gehaltener Vortrag über den Kollektivbegriff soll demnachst in den *Actualités Scientifiques*, Hermann, Paris, erscheinen.

A generalized theorem on oscillating functions.

By

Eli Gourin (New York).

A one-valued continuous function of a real variable which oscillates everywhere in a given interval I, repeats, according to Koenig [1]), at least one of its values an infinite number of times in I. We generalize this theorem by showing that it suffices to assume that the function oscillates everywhere in any perfect subset K or I [2]) in order to reach the same conclusion about the existence of infinitely many times repeated functional values in I.

The application of this result enables us to offer a straightforward treatment, based on elementary point set theory, of the following problem: Let $x(t)$ and $y(t)$ be one-valued continuous functions in a given interval in which the derivative of $y(t)$ with respect to $x(t)$ vanishes everywhere in the interval; in other words, let $\lim \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}=0$ whenever t tends toward t_0 by a sequence of values other than those for which $y(t)-y(t_0)=x(t)-x(t_0)=0$. It is required to show that $y(t)$ is constant throughout the interval [3]).

1. *Lemma.* *Let $x(t)$ be a one-valued continuous function in a closed interval I and let $x(t)$ oscillate everywhere in a perfect subset K of I. Then $x(t)$ repeats at least one of its values an infinite number of times in I.*

[1]) See A. Schoenflies, *Bericht über der Mengenlehre*, 1900; p. 160.

[2]) In other words, there exists no open interval of I, having points in common with K, in which the functional values of K never increase or never decrease.

[3]) See K. Petrovsky, *Rec. Math. Soc. Math. Moscou* **41** (1934), 48-58. Also S. Saks, *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne **7** (1937), p. 275, and R. Caccioppoli, *Sul lemma fondamentale del calcolo integrale*, Atti Mem. Accad. Sci. Padova **50** (1934), 93-98.