way. Choose any neighborhood U of ξ in $\bar{R}$. In $\bar{R}-U$, which, as a closed subset of $\bar{R}$, is bicompact as a space, select any covering by a finite number of disjoined sets. Then U, together with this finite number of sets covering $\bar{R}-U$, is a locally finite decomposition [8]) of $\bar{R}$, and by omitting ξ, a locally finite decomposition of R. We form all possible decompositions obtainable by using all choices of $U(\xi)$ and, with each, all ways of decomposing $\bar{R}-U$ into a finite number of disjoined sets. Such a collection of decompositions forms a fundamental system for R.

Now let f be any cycle. According to a theorem of Kolmogoroff [9]) there exists a cycle f_1 homologous to f and constant in relation to each of its arguments on the elements of some decomposition Σ of any fundamental system. Let Σ_1 be the decomposition of the fundamental system just constructed on which f_1 is constant in relation to each of its arguments. In the $U(\xi)$ belonging to Σ_1, f_1 is 0 because it is skew-symmetric. As a bicompact space $\bar{R}$ is certainly regular. Hence there must be a neighborhood $U_1(\xi)$ whose closure is contained in $U(\xi)$. To each point of $\bar{R}-U_1$ let us select a neighborhood, requiring only that if a point lie in $U-U_1$, the neighborhood be interior to U, whereas if the point lie in $\bar{R}-U$, the neighborhood should not intersect $\bar{U}_1$. These neighborhoods, together with U_1, are a covering of $\bar{R}$. Hence we can select a finite number of them to cover $\bar{R}$. We define a function $\bar{f}_2$ to have the same value on any simplex lying within one of these neighborhoods that some definite function belonging to f_1 has. For other simplexes $\bar{f}_2$ is to have the value 0. $\bar{f}_2$ is equivalent in Kolmogoroff's sense to the functions belonging to f_1. Because f_1 is a cycle, the function Φ_2 which has the same values as $\bar{f}_2$ on the simplexes of $\bar{R}-U_1$ is an exact A-function on the bicompact subset $\bar{R}-U_1$ of R. Hence to each K-homology class there is at least one A-homology class. Moreover, if the K-class in the class of bounding cycles, the corresponding A-class is derived. Hence the isomorphism between the two groups is established.

[9]) loc. cit., p. 1326.

The Institute For Advanced Study
Princeton, N. J.

Boolesche Ringe mit geordneter Basis.

Von

Andrzej Mostowski und Alfred Tarski (Warszawa).

Die allgemeine Boolesche Algebra stellt bekanntlich ein formales Schema dar, das verschiedenartiger Realisierungen fähig ist. Im vorliegenden Aufsatz betrachten wir eine neue Art der Booleschen Algebra, die bisher nicht untersucht wurde und die eine ziemlich natürliche Verallgemeinerung der abzählbaren Realisierungen der Booleschen Algebra darstellt.

Die Boolesche Algebra kann entweder als eine selbständige mathematische Theorie oder als ein Kapitel der abstrakten Algebra oder auch der Mengenlehre betrachtet werden. Wir haben uns hier für den algebraischen Weg entschieden und kleiden alle unsere Theoreme in die Form von Sätzen über gewisse algebraische Ringe (nämlich sog. Boolesche Ringe). Nichtsdestoweniger lassen diese Ergebnisse eine einfache topologische und abstrakt-mengentheoretische Deutung zu.

In § 1 bringen wir die Definitionen der Booleschen Ringe, mit denen wir uns weiter befassen, und leiten einen Satz ab, der die Struktur der Elemente von solchen Ringen beschreibt. In § 2 befassen wir uns mit den Begriffen der Isomorphie und Homomorphie. In § 3 untersuchen wir näher eine spezielle Art der uns hier interessierenden Ringe, nämlich solche, die eine zerstreute Basis haben. In § 4 geben wir schließlich eine Charakterisierung der Primideale in den hier betrachteten Booleschen Ringen an.

Präzisere Ergebnisse lassen sich erreichen, wenn man sich auf Ringe mit einer wohlgeordneten Basis beschränkt. Es ist eine Fortsetzung der vorliegenden Arbeit beabsichtigt, wo diese Probleme nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der abzählbaren Booleschen Ringe besprochen werden sollen [1]).

[1]) Zur Auffassung der Booleschen Algebra als einer selbständigen Disziplin vgl. L. Couturat: *l'Algèbre de la Logique* (2. Aufl., Paris, 1914); das Buch be-

§ 1. Grundlegende Definitionen. Struktur der Ringe mit einer geordneten Basis.

Wir betrachten algebraische Ringe mit Grundoperationen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation). Das Nullelement eines Ringes R wird immer mit 0, das Einselement (falls es vorhanden ist) mit e bezeichnet.

Definition 1.1. [a]) *Ein Ring R heißt Boolescher Ring, wenn $a\cdot a=a$ für jedes $a\epsilon R$;* [b]) *sind $a,b\epsilon R$, so heißt das Element $a\vee b=a+b+a\cdot b$ die Vereinigung von a und b;* [c]) *man sagt, daß ein Element $a\epsilon R$ im Element $b\epsilon R$ enthalten ist (in Zeichen $a\subset b$), wenn es ein $c\epsilon R$ gibt, so daß $a=b\cdot c$.*

Zur Rechtfertigung der Terminologie ist zu sagen, daß wenn der zugrundegelegte Ring R ein Boolescher Ring ist, die Operation $\vee$ und die Relation $\subset$ denselben formalen Gesetzen gechorchen wie die mengentheoretische Vereinigungsbildung und Inklusion.

Definition 1.2. Für jede Teilmenge M eines Ringes R wird mit $[M]$ der kleinste Teilring von R bezeichnet, der M umfaßt; dabei wird M eine Basis des Ringes $[M]$ genannt, wenn $0 \text{ non } \epsilon M$.

Die Existenz des Ringes $[M]$ für jede Teilmenge M eines Booleschen Ringes R ergibt sich aus folgendem einfachem Satz:

Satz 1.3. Ist R ein Boolescher Ring und $M\subset R$, so bildet die Menge, die aus 0 sowie aus allen endlichen Produktsummen der Elemente von M besteht, den kleinsten Teilring von R, der M umfaßt.

richtet auch ausführlich über die formalen Regeln der Booleschen Algebra, die hier als bekannt vorausgesetzt sind. Zu den Grundlagen der Booleschen Algebra vgl. A. Tarski, Fund. Math. **24** (1935), S. 177 ff., wo man auch nähere Einzelheiten über die weiter unten behandelten Begriffe findet, die an den Begriff des Atomelementes anknüpfen. Zur algebraischen und mengentheoretischen Auffassung der Booleschen Algebra vgl. M. H. Stone, Trans. of the Amer. Math. Soc, **40** (1936), S. 37 ff. Die algebraische Terminologie, die in diesem Aufsatz verwendet wird, ist dem Buch von Van Der Waerden: *Moderne Algebra* (I. Teil, Berlin 1930) entnommen; auf dieses Buch verweisen wir auch den Leser, der einen genaueren Aufschluß über die weiter unten verwendeten algebraischen Begriffe (wie z.B. Ideal, Hauptideal, Primideal, Kongruenz, Restklassenring u. s. f.) erhalten möchte. Wir verwenden außerdem die in Fund. Math. übliche Bezeichnungsweise aus der Mengenlehre; zu den spezielleren mengentheoretischen Begriffen insbesondere aus der Theorie der geordneten Mengen (konfinale Mengen, zerstreute Ordnungstypen, Ausfüllung einer geordneten Menge) vgl. etwa F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre* (1. Aufl., Leipzig, 1914).

Wir werden oft mit Teilmengen eines Booleschen Ringes R zu tun haben, die durch die Relation der „echten Inklusion“:

$$(*) \qquad a\subset b \quad \text{und} \quad a\neq b$$

geordnet sind. Solche Mengen bezeichnen wir einfach als geordnete Mengen. Überhaupt wird an allen Stellen, wo Begriffe aus der Theorie der Ordnung ohne Angabe der ordnenden Relation vorkommen, immer die Ordnung nach der Relation $(*)$ gemeint. Im Einklang damit bezeichnet z.B. der Ausdruck: „eine geordnete (und insbesondere eine zerstreute oder eine dichte u. s. w.) Basis eines Booleschen Ringes R“ eine beliebige Menge $M\subset R$, die durch die Relation $(*)$ geordnet ist (und insbesondere nach einem zerstreuten oder dichten Typus) und den Bedingungen $0 \text{ non } \epsilon M$, $[M]=R$ genügt. Ein Boolescher Ring, der mindestens eine geordnete (zerstreute, dichte u. s. w.) Basis besitzt, wird kurz Ring mit einer geordneten (zerstreuten, dichten u. s. w.) Basis genannt.

Wir wollen nun die Struktur der Elemente von Booleschen Ringen mit einer geordneten Basis genau beschreiben:

Satz 1.4. Ist R ein Boolescher Ring mit einer geordneten Basis B, so läßt sich jedes Element $a\neq 0$ von R als die Summe einer endlichen Zahl von lauter verschiedenen Basiselementen darstellen. Diese Darstellung ist bis auf die Reihenfolge der Summanden eindeutig.

Beweis. Nach Satz 1.3 gibt es eine Darstellung

$$(1) \qquad a=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m_i} b_j^{(i)},$$

wo die $b_j^{(i)}$ Elemente von B sind. Da B geordnet ist, so ist jedes Produkt $b_1^{(i)}\cdot b_2^{(i)}\dots b_{m_i}^{(i)}$ einem von seinen Faktoren gleich. Formel (1) gibt also eine Darstellung von a als eine Summe von Basiselementen, von denen wir, wegen der für alle Booleschen Ringe gültigen Formel $x+x=0$, noch annehmen können, daß sie voneinander verschieden sind. Es bleibt also nur noch, die Eindeutigkeit dieser Darstellung nachzuweisen. Wir setzen zu diesem Zweck voraus, daß $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m$ Elemente von B sind, die den Bedingungen genügen:

$$(2) \qquad a_1\supset a_2\supset\dots\supset a_n\neq 0, \qquad a_1\neq a_2\neq\dots\neq a_n,$$

$$(3) \qquad b_1\supset b_2\supset\dots\supset b_m\neq 0, \qquad b_1\neq b_2\neq\dots\neq b_m,$$

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{j=1}^{m} b_j.$$

und zeigen, daß dann die Gleichungen

(5) $$m=n$$

(6) $$a_i=b_i \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

erfüllt sein müssen. Wir können etwa voraussetzen, daß

(7) $$n\leqslant m$$

ist.

Nehmen wir an, daß die Gleichungen (6) nicht alle gelten; es gibt dann eine kleinste Zahl $j\leqslant n$, so daß $a_j\neq b_j$ ist. Da $a_j, b_j\in B$, so gilt entweder $a_j\subset b_j$ oder $b_j\subset a_j$; aus Symmetriegründen können wir uns auf den Fall

(8) $$a_j\subset b_j, \qquad a_j\neq b_j$$

beschränken.

Aus (4) folgt

(9) $$\sum_{i=j}^{n} a_i=\sum_{i=j}^{m} b_i.$$

Ist $j=n$, so folgt aus (9)

(10) $$a_n=\sum_{i=n}^{m} b_i,$$

woraus sich nach (8) ergibt, daß $m>n$ ist. Multiplizieren wir (10) beiderseits mit b_n+b_{n+1}, so bekommen wir mit Rücksicht auf (3) $a_n\cdot(b_n+b_{n+1})=b_n+b_{n+1}$, wonach wegen (8)

(11) $$a_n+a_n\cdot b_{n+1}=b_n+b_{n+1}.$$

Aus (3) folgt, daß die rechte Seite von (11) nicht 0 ist, es ist also $a_n\cdot b_{n+1}\neq a_n$ und demnach $a_n\cdot b_{n+1}=b_{n+1}$. Aus (11) erhalten wir also $a_n=b_n$ im Widerspruch mit (8).

Ist $j<n$, so gilt $j<m$ wegen (7). Betrachten wir nun das Element

(12) $$s=b_j+(a_j\vee b_{j+1}).$$

Da $\sum_{i=j+1}^{m} b_i\subset a_j\vee b_{j+1}$ ist, so ist $s\cdot\sum_{i=j+1}^{m} b_i=0$ und folglich $s\cdot\sum_{i=j}^{m} b_i=s$, da $s\subset b_j$. Nach (9) ist also $s\cdot\sum_{i=j}^{n} a_i=s$. Da aber wegen (2) $\sum_{i=j}^{n} a_i\subset a_j$ gilt, so erhalten wir aus (12) $s\cdot\sum_{i=j}^{n} a_i=0$ d. i. $s=0$. Mit Rücksicht auf (12) schließen wir daraus, daß $b_j=a_j\vee b_{j+1}$ ist. Nun ist $a_j\vee b_{j+1}=a_j$ oder $a_j\vee b_{j+1}=b_{j+1}$, da $a_j, b_{j+1}\in B$. Es gilt also entweder $b_j=a_j$ oder $b_j=b_{j+1}$. Die erste Gleichung steht im Widerspruch zu (8), die zweite zu (3).

Somit ist unsere Annahme in allen Fällen widerlegt und (6) ist bewiesen.

Wäre nun (5) falsch, so würden wir aus (4) und (6) die Gleichung $\sum_{i=n+1}^{m} b_i=0$ erhalten, wobei $m>n+1$ sein müßte, da wir sonst $b_{n+1}=0$ hätten. Daraus würde sich ferner $b_{n+1}=\sum_{i=n+2}^{m} b_i$ ergeben. Wir können aber ganz ähnlich wie oben zeigen, daß diese Gleichung unmöglich ist, womit der Beweis zu Ende geführt ist.

Die Darstellung der Elemente eines Booleschen Ringes mit einer geordneten Basis, die im obigen Satz beschrieben wurde, nennen wir im folgenden kanonische Darstellung.

Hilfssatz 1.5. Es sei R ein Boolescher Ring und $\{a_\xi\}_{\xi<\alpha}$, $\{b_\xi\}_{\xi<\beta}$ zwei transfinite Folgen von Elementen von R, die folgenden Bedingungen genügen:

(i) $$a_\xi\subset a_\eta \quad \textit{und} \quad a_\xi\neq a_\eta \quad \textit{für} \quad \xi<\eta<\alpha,$$

(ii) $$b_\xi\subset b_\eta \quad \textit{und} \quad b_\xi\neq b_\eta \quad \textit{für} \quad \xi<\eta<\beta,$$

(iii) $$R=\sum_{\xi<\alpha}(a_\xi)=\sum_{\xi<\beta}(b_\xi).$$

Unter diesen Voraussetzungen sind die Folgen $\{a_\xi\}_{\xi<\alpha}$ und $\{b_\xi\}_{\xi<\beta}$ konfinal.

Zum Beweis genügt es zu bemerken, daß es wegen (iii) für jedes $\xi<\alpha$ (bzw. $\eta<\beta$) ein $\zeta<\beta$ (bzw. $\tau<\alpha$) mit $a_\xi\subset b_\zeta$ (bzw. $b_\eta\subset a_\tau$) gibt.

Satz 1.6. Es sei R ein Boolescher Ring mit einer geordneten Basis und bezeichnen wir für jede geordnete Basis B von R den Ordnungstypus von B mit $\varkappa(B)$ und die kleinste Ordnungszahl, die zu $\varkappa(B)$ konfinal ist, mit $\mu(B)$. Es sei ferner λ die kleinste Ordnungszahl, für die es eine aufsteigende Folge von Hauptidealen $\{(b_\xi)\}_{\xi<\lambda}$ vom Typus λ gibt, so daß $R=\sum_{\xi<\lambda}(b_\xi)$. Unter diesen Voraussetzungen gilt $\mu(B)=\lambda$ für jede geordnete Basis B von R. Der Ring R hat ein Einselement dann und nur dann, wenn $\lambda=1$ ist.

Beweis. Es sei B eine geordnete Basis von R; nach der Voraussetzung gibt es eine Folge $\{a_\xi\}_{\xi<\mu(B)}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $$a_\xi \,\epsilon\, B, \quad a_\xi \subset a_\zeta, \quad a_\xi \neq a_\zeta \quad \textit{für} \quad \xi<\zeta<\mu(B),$$

(2) $$\textit{ist } b \,\epsilon\, B, \textit{ so gibt es } \xi<\mu(B), \textit{ so daß } b\subset a_\xi.$$

Aus der Voraussetzung ergibt sich ferner die Existenz einer Folge $\{b_\xi\}_{\xi<\lambda}$, die folgende Bedingungen erfüllt:

(3) $$b_\xi \,\epsilon\, R, \quad b_\xi \subset b_\zeta, \quad b_\xi \neq b_\zeta \quad \textit{für} \quad \xi<\zeta<\lambda,$$

(4) $$R=\sum_{\xi<\lambda}(b_\xi).$$

Sind $b_1,\ldots,b_n$ Elemente von B, so folgt aus (1) und (2), daß es eine Ordnungszahl $\xi<\mu(B)$ gibt, so daß $b_1+\ldots+b_n\subset a_\xi$; denn aus $b_i\subset a_\xi$ $(i=1,2,\ldots,n)$ folgt $b_1+\ldots+b_n\subset a_\xi$. Wir erhalten daraus

(5) $$R=\sum_{\xi<\mu(B)}(a_\xi).$$

Nach (1), (3), (4), (5) und Hilfssatz 1.5 sind die Folgen $\{a_\xi\}_{\xi<\mu(B)}$ und $\{b_\xi\}_{\xi<\lambda}$ konfinal. Nun ist $\mu(B)$ die kleinste Zahl, die zu einem Typus $\varkappa(B)$ konfinal ist und muß daher eine reguläre Anfangszahl sein. Da nun λ zu $\mu(B)$ konfinal ist, muß also $\lambda=\mu(B)$ sein.

Ist $\lambda=1$, so gibt es ein $e\,\epsilon\,R$, so daß $R=(e)$, e ist daher das Einselement von R. Hat umgekehrt R ein Einselement e und ist B eine geordnete Basis von R, so ist offenbar $B'=B+\{e\}$ eine geordnete Basis von R (vom trivialen Fall $e=0$ sehen wir hier ab), die der Bedingung $\mu(B')=1$ genügt. Folglich gilt $\lambda=\mu(B')=1$, w. z. b. w.

Wir wollen zum Schluß dieses Paragraphen konkrete Beispiele von Ringen mit einer Basis vom vorgegebenen Typus angeben.

Satz 1.7. Ist $\prec$ eine Relation, die eine Menge M in einen Typus α ordnet, so bildet das Mengensystem, bestehend 1⁰) *aus der leeren Menge,* 2⁰) *aus allen Teilmengen von M von der Form*

$$\sum_{i=1}^{n} \underset{x}{E}[a_i=x \textit{ oder } a_i\prec x\prec b_i]$$

$(a_1,\ldots,a_n,\ b_1,\ldots,b_n\,\epsilon\,M,\ a_1\prec b_1\prec\ldots\prec a_n\prec b_n)$ *einen Booleschen Ring mit Basis vom Typus α, mit der Operation $X\cdot Y$ als Multiplikation und der Operation $X\oplus Y=(X-Y)+(Y-X)$ als Addition.*

§ 2. Isomorphie und Homomorphie der Ringe mit einer geordneten Basis.

Satz 2.1. Ist R ein Boolescher Ring mit einer geordneten Basis B vom Typus α, so ist ein Ring S dann und nur dann zu R isomorph, wenn S ein Boolescher Ring mit einer geordneten Basis C vom gleichen Typus α ist.

Beweis. Es sei S ein Ring, der zu R isomorph ist und sei f eine Funktion, die R auf S isomorph abbildet. Wegen 1. 1[a]) ist S ein Boolescher Ring und aus $[B]=R$ ergibt sich leicht $S=[f(B)]$. Weiter haben wir $0 \mathit{non}\,\epsilon\, f(B)$, da $f(0)=0$ ist und $0 \mathit{non}\,\epsilon\, B$. Es ist ferner klar, daß die Inklusionen $a\subset b$ und $f(a)\subset f(b)$ miteinander äquivalent sind, was beweist, daß die Menge $f(B)$ geordnet ist und zwar ähnlich wie B. $C=f(B)$ ist also eine geordnete Basis von S vom Typus α. Die im Satz angegebene Bedingung ist also notwendig. Um zu beweisen, daß sie auch hinreichend ist, zeigen wir, daß jede ordnungstreue Abbildung f der Basis B von R auf die Basis C von S sich zu einem Isomorphismus zwischen R und S erweitern läßt. Wir erweitern nämlich f durch die Festsetzung

(1) $$f(0)=0,$$

(2) $$f(a)=\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \qquad (a\,\epsilon\,R)$$

wo $a_1+\ldots+a_n$ die kanonische Darstellung des Elementes $a\neq 0$ ist. Aus Satz 1.4 folgt leicht, daß die so erklärte Funktion f den ganzen Ring R eindeutig auf den ganzen Ring S abbildet. Aus (1) und (2) schließen wir weiter, daß 0 das einzige Element von R ist, das auf die Null von S abgebildet wird. Es bleibt also nur übrig, zu zeigen, daß die beiden Isomorphieeigenschaften

(3) $$f(a+b)=f(a)+f(b)$$

(4) $$f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$$

für beliebige $a,b\,\epsilon\,R$ erfüllt sind. Nach (1) gelten diese Formeln sicher, wenn eines der Elemente a,b gleich 0 ist. Wir setzen also voraus, daß weder a noch b gleich 0 ist. Ist $b\,\epsilon\,B$ und ist $a_1+\ldots+a_n$ die kanonische Darstellung von a, so lautet die kanonische Darstellung von $a+b$

entweder $b+a_1+\ldots+a_n$ oder $a_1+\ldots+a_{i-1}+a_{i+1}+\ldots+a_n$, je nachdem ob b keinem a_j $(j=1,2,\ldots,n)$ gleich ist oder $b=a_l$ ist. Mit Rücksicht auf (2) folgt daraus die Richtigkeit von (3) für $b\,\epsilon\,B$; und eine einfache induktive Betrachtung lehrt, daß dies auch dann zutrifft, wenn b die Gestalt $b_1+\ldots+b_n$ $(b_1,\ldots,b_n\,\epsilon\,B)$ hat. Dem Satz 1.4 gemäß, ist also (3) für beliebige $a,b\,\epsilon\,R$ gültig.

Da B geordnet ist, gilt für beliebige $x,y\,\epsilon\,B$ entweder $x\subset y$ oder $y\subset x$ und jede von diesen Inklusionen zieht die Inklusion $f(x)\subset f(y)$ oder $f(y)\subset f(x)$ nach sich. Daraus ergibt sich die Richtigkeit von (4) für $a,b\,\epsilon\,B$. Sind nun a,b beliebige Elemente von R und $a_1+\ldots+a_n$ bzw. $b_1+\ldots+b_m$ ihre kanonischen Darstellungen, so haben wir wegen (3) $f(a\cdot b)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(a_i\cdot b_j)$; da (4) für die Basiselemente gilt, schließen wir weiter

$$f(a\cdot b)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(a_i)\cdot f(b_j)=[\sum_{i=1}^{n} f(a_i)]\cdot[\sum_{j=1}^{m} f(b_j)]=f(a)\cdot f(b),$$

w. z. b. w.

Satz 2.2. Ist ein Ring S zu einem Booleschen Ring R mit geordneter Basis B homomorph, so gibt es eine Menge $C\subset B$ derart, daß die Ringe S und $[C]$ isomorph sind.

Beweis. Es sei f eine Funktion, die R auf S homomorph abbildet. Wir setzen

(1) $$K(a)=B\cdot \underset{b}{E}[f(a)=f(b)] \quad \text{für} \quad a\,\epsilon\,B$$

und greifen mit Hilfe des Auswahlaxioms aus jeder Menge $K(a)$ ein bestimmtes Element a^* heraus:

(2) $$a^*\,\epsilon\,K(a) \quad \text{für} \quad a\,\epsilon\,B.$$

Da $0\ non\,\epsilon\,B$, so schließen wir aus (1) und (2), daß 0 der geordneten Teilmenge C von B

(3) $$C=\underset{a^*}{E}[a\,\epsilon\,B]$$

nicht angehört. Folglich ist C eine geordnete Basis des Ringes $[C]$. Sind $x=f(a)$, $y=f(b)$ Elemente von $f(B)$ $(a,b\,\epsilon\,B)$, derart daß $x\subset y$ und $x\neq y$, so gilt auch $a^*\subset b^*$ und $a^*\neq b^*$. Andernfalls wäre nämlich $b^*\subset a^*$, da C geordnet ist, und wir würden aus (1) und (2) die Inklusion $y=f(b)=f(b^*)\subset f(a^*)=f(a)=x$ erhalten. Da S ein Boolescher Ring ist, so würde daraus $x=y$ folgen. Gilt nun $a^*\subset b^*$ und $a^*\neq b^*$, so gilt nach (1), (2) $x=f(a)=f(a^*)\subset f(b^*)=f(b)=y$ und $x\neq y$, was beweist, daß die Inklusionen $x=f(a)\subset f(b)=y$ und $a^*\subset b^*$ äquivalent sind. Wie leicht zu zeigen, folgt daraus, daß die Mengen C und $f(B)$ ähnlich geordnet sind; folglich sind die Ringe $[C]$ und $[f(B)]$ isomorph. Der Beweis wird also zu Ende geführt sein, wenn wir zeigen, daß $[f(B)]=S$ ist. Nun ist die Inklusion $[f(B)]\subset S$ evident. Ist a ein Element von S, so gilt $a\,\epsilon\,[f(B)]$ sicher dann, wenn $a=0$ ist. Ist $a\neq 0$, so setzen wir $a=f(b)$, wo $b\neq 0$ und $b\,\epsilon\,R$; nach Satz 1.4 haben wir $b=b_1+\ldots+b_n$ für gewisse $b_1,\ldots,b_n\,\epsilon\,B$ und demnach $a=f(b)=f(b_1)+\ldots+f(b_n)\,\epsilon\,[f(B)]$. Dies beweist, daß $S\subset[f(B)]$. Satz 2.2 ist hiermit bewiesen.

Bemerkung 2.3. Eine genauere Analyse des Beweises von 2.2 zeigt, daß in Booleschen Ringen mit einer geordneten Basis das s. g. Repräsentationsproblem für jedes Ideal lösbar ist [1]).

§ 3. Erblich atomare Ringe und Ringe mit einer zerstreuten Basis.

Wir schicken der Diskussion der Ringe, die eine zerstreute Basis haben, einige Hilfssätze voraus, die sich auf allgemeinere Arten von Booleschen Ringen beziehen.

Definition 3.1. [a]) *Ein Element a eines Booleschen Ringes R heißt ein Atomelement von R, in Zeichen $a\,\epsilon\,At(R)$, wenn 0 das einzige Element von R ist, das in a enthalten und von a verschieden ist.*

[b]) *Ein Boolescher Ring R heißt atomar, wenn es zu jedem Element $a\neq 0$ von R ein Element $b\,\epsilon\,At(R)$ gibt, für welches $b\subset a$.*

[c]) *Ein Boolescher Ring heißt erblich atomar, wenn jeder zu R homomorphe Ring atomar ist.*

[d]) *Ein Boolescher Ring R heißt atomfrei, wenn R mindestens zwei Elemente enthält und $At(R)=0$ ist.*

Wir werden nun notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufstellen, daß ein Boolescher Ring erblich atomar ist. Zu diesem Zweck beweisen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz 3.2. [a]) *Jeder erblich atomare Ring ist atomar;* [b]) *kein atomarer Ring ist atomfrei;* [c]) *jeder Ring, der zu einem erblich atomaren Ring homomorph ist, ist erblich atomar.*

---

[1]) Zu diesem Problem vgl. J. v. Neumann und M. H. Stone, Fund. Math., **25** (1935), S. 353 ff.

Hilfssatz 3.3. Es sei R ein Boolescher Ring, $0 \epsilon A \subset R$ und es sei F eine Funktion, die jedem Paar x, y von Elementen von A, für die $x \subset y$, $x \neq y$ ist, ein Element $F(x,y)$ zuordnet derart, daß $x \subset F(x,y) \subset y$, $x \neq F(x,y) \neq y$. Unter diesen Voraussetzungen gibt es eine Menge $B \subset A$ vom Typus η, vorausgesetzt, daß A mindestens zwei Elemente enthält.

Der Beweis ist einleuchtend.

Hilfssatz 3.4. Ist kein Teilring eines Booleschen Ringes R atomfrei, so enthält keiner der Ringe (a), wo $a \epsilon R$, eine Menge vom Typus η.

Beweis. Aus der Existenz eines Teiles von (a) vom Typus η folgt offenbar die Existenz eines atomfreien Teilringes von R.

Hilfssatz 3.5. Ist R ein Boolescher Ring und enthält keiner der Ringe (a), wo $a \epsilon R$, eine Menge vom Typus η, so ist jeder Teilring von R atomar.

Beweis. Wir nehmen an, daß die Behauptung des Satzes nicht erfüllt ist. Im Einklang mit Definition 3.1 b) gibt es dann einen Teilring S von R und ein $a \epsilon S$, so daß der Ring $S \cdot (a)$ kein Atomelement von S enthält. Wir schließen daraus mit Hilfe des Auswahlaxioms, daß es eine Funktion f gibt, die jedem von 0 verschiedenen Element $b \epsilon (a) \cdot S$ ein Element $f(b)$ zuordnet derart, daß $f(b) \subset b$, $0 \neq f(b) \neq b$. Setzt man also $A = S \cdot (a)$ und $F(x,y) = x \vee f(x+y)$ für $x, y \epsilon A$, $x \subset y$, $x \neq y$, so werden alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 3.3 erfüllt; folglich gibt es eine Menge $B \subset (a) \cdot S \subset (a)$ vom Typus η, w. z. b. w.

Hilfssatz 3.6. Ist kein Teilring eines Booleschen Ringes R atomfrei, so ist R erblich atomar.

Beweis. Wir setzen voraus, daß R nicht erblich atomar ist. Es gibt dann ein Ideal I in R sowie ein Element a des Restklassenringes R/I, das kein Atomelement von R/I enthält. Folglich gibt es eine Funktion f, die jedem von 0 verschiedenen Element $b \subset a$ von R/I ein Element $f(b) \epsilon R/I$ zuordnet derart, daß $f(b) \subset b$, $0 \neq f(b) \neq b$. Wir greifen nun aus jeder Restklasse b mod I ein Element $g(b)$ heraus, wobei wir die Auswahl so treffen können, daß $g(0) = 0$ ist. Wir setzen weiter

(1) $$A = \underset{g(b)}{E}[b \epsilon R/I,\ b \subset a].$$

Es gilt dann

(2) $$A \subset R, \qquad 0 \epsilon A, \qquad \overline{\overline{A}} \geqslant 2.$$

Nun sei

(3) $$x, y \epsilon A, \qquad x \subset y, \qquad x \neq y$$

und seien x^*, y^* die Restklassen mod I der Elemente x, y. Wir setzen

(4) $$F(x,y) = x + g(f(x^* + y^*)) \cdot (x + y).$$

Aus (3) und (4) folgt

(5) $$x \subset F(x,y) \subset y.$$

Aus (3) und (1) folgern wir, daß $x^* \subset y^*$, $x^* \neq y^*$ ist. Folglich ist $x^* + y^* \neq 0$ d. h.

(6) $$0 \neq f(x^* + y^*) \neq x^* + y^*, \qquad f(x^* + y^*) \subset x^* + y^*.$$

Wäre nun $F(x,y) = x$, so würde $g(f(x^* + y^*)) \cdot (x+y) = 0$ sein, woraus durch Übergang zu den Restklassen $f(x^* + y^*) \cdot (x^* + y^*) = 0$ d. h. nach (6) $f(x^* + y^*) = 0$ folgen würde; nach (6) ist also

(7) $$F(x,y) \neq x.$$

Wäre $F(x,y) = y$, so hätten wir $x + y = g(f(x^* + y^*)) \cdot (x + y)$, woraus durch Übergang zu den Restklassen die Gleichheit $x^* + y^* = f(x^* + y^*) \cdot (x^* + y^*)$ d. i. $x^* + y^* \subset f(x^* + y^*)$ folgen würde. Da dies im Widerspruch zu (6) steht, so gilt

(8) $$F(x,y) \neq y.$$

Aus (2), (5), (7), (8) folgt nach Hilfssatz 3.3, daß es eine Menge $B \subset R$ vom Typus η gibt. Jeder Ring (b), wo $b \epsilon B$, enthält also eine Teilmenge vom Typus η, was nach Hilfssatz 3.4 beweist, daß mindestens ein Teilring von R nicht atomfrei ist, w. z. b. w.

Um die nächsten Hilfssätze auszudrücken, brauchen wir folgende Definition:

Definition 3.7. Wir setzen für jeden Booleschen Ring R

a) $At_0(R) = At(R)$;

b) *$At_\xi(R)$ ist die Menge derjenigen Elemente von R, welche der Homomorphismus $R \to R/(\sum_{\zeta<\xi} At_\zeta(R))$ in ein Atomelement des Bildringes überführt;*

c) $A_\xi(R) = (\sum_{\zeta<\xi} At_\zeta(R))$;

d) *$\varkappa(R)$ ist die kleinste Ordnungszahl λ, für welche $At_\lambda(R) = 0$*[1].

---

[1]) Definition 3.7 läßt eine übersichtliche Deutung zu, wenn man auf die Ergebnisse Stone's (Trans. of the Amer. Math. Soc., **41** (1937), S. 375 ff.) Bezug nimmt und jeden Booleschen Ring R als einen Ring der Mengen auffaßt, die in einem gewissen topologischen Raum $S = S(R)$ bikompakt und zugleich offen und abgeschlossen sind. Die Zahl $\varkappa(R)$ läßt sich dann z. B. als die Ordnung der letzten Ableitung des Raumes S charakterisieren u. s. w.

Bemerkung 3.8. Die Existenz der Zahl $\varkappa(R)$ stellt man folgendermaßen fest: ist R ein Boolescher Ring, $\xi<\zeta$ zwei Ordnungszahlen und $a \epsilon At_\xi(R)$, so führt der Homomorphismus $R \to R/A_\zeta(R)$ das Element a in 0 über. Dagegen führt derselbe Homomorphismus kein Element von $At_\zeta(R)$ in 0 über, was beweist, daß $At_\xi(R) \cdot At_\zeta(R) = 0$ für $\xi \neq \zeta$ ist. Mit Hilfe des Wohlordnungssatzes folgt daraus, daß mindestens eines der $At_\xi(R)$ leer sein muß.

Hilfssatz 3.9. Wenn R ein Boolescher Ring und ξ eine Ordnungszahl >0 ist, so gibt es für jedes $a \epsilon A_\xi(R)$, $a \neq 0$ eine Ordnungszahl $\tau<\xi$ und Elemente $b_1, \ldots, b_p \epsilon At_\tau(R)$, $c_1, \ldots, c_q \epsilon \sum_{\zeta<\tau} At_\zeta(R)$, so daß $a=\sum_{i=1}^{p} b_i + \sum_{i=1}^{q} c_i$. Die Zahlen τ und p sind dabei durch a eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir zeigen durch Induktion, daß jedes Element $a \neq 0$ von $A_\xi(R)$ sich als eine Summe

$$(1) \qquad a=\sum_{i=1}^{n} z_i$$

darstellen läßt, wo $z_i \epsilon \sum_{\zeta<\xi} At_\zeta(R)$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Dies ist offenbar richtig für $\xi=1$. Wir setzen also die Gültigkeit unserer Behauptung für alle Zahlen $<\xi$ voraus $(\xi>1)$ und betrachten ein von 0 verschiedenes Element $a \epsilon A_\xi(R)$. Nach Definition 3.7 c) und bekannten algebraischen Sätzen läßt sich a als eine Summe von lauter nichtverschwindenden Summanden darstellen:

$$(2) \qquad a=\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot r_i + \sum_{i=1}^{l} n_i \cdot y_i,$$

wo $x_i, y_j \epsilon \sum_{\zeta<\xi} At_\zeta(R)$ $(i=1,2,\ldots,k,\ j=1,2,\ldots,l)$, $r_i \epsilon R$ $(i=1,2,\ldots,k)$ und die n_j $(j=1,2,\ldots,l)$ natürliche Zahlen sind. Da $y_j+y_j=0$ ist $(j=1,2,\ldots,l)$, so können wir annehmen, daß alle $n_j=1$ sind. Ist $\zeta<\xi$, $x_i \epsilon At_\zeta(R)$, so führt der Homomorphismus $R \to R/A_\zeta(R)$ das Element x_i in ein Atomelement über. Das Bild von $x_i \cdot r_i$ ist also entweder gleich 0 oder mit dem Bild von x_i identisch. Im ersten Fall gilt $x_i \cdot r_i \epsilon A_\zeta(R)$, also läßt sich $x_i \cdot r_i$ nach der induktiven Annahme als eine Summe von Elementen der Menge $\sum_{\tau<\zeta} At_\tau(R)$ darstellen. Im zweiten Fall ist $x_i \cdot r_i \epsilon At_\zeta(R)$. Jedenfalls läßt also $x_i \cdot r_i$ eine Darstellung von der Form (1) zu und wir schließen aus (2), daß auch a in dieser Form dargestellt werden kann. Es sei nun τ die größte Ordnungszahl, für die es ein Element

$$(3) \qquad z_i \epsilon At_\tau(R)$$

gibt, wobei z_i in (1) vorkommt. Wir bezeichnen diejenigen z_i, welche (3) erfüllen mit $b_1, \ldots, b_p$, die übrigen z_i bezeichnen wir mit $c_1, \ldots, c_q$. Also können wir schreiben

$$a=\sum_{i=1}^{p} b_i + \sum_{i=1}^{q} c_i.$$

Die Zahl τ ist durch das Element a allein bestimmt und von der Darstellung (1) unabhängig, da die Zahl $\tau+1$ sich als die kleinste Ordnungszahl λ charakterisieren läßt, für die der Homomorphismus $R \to R/A_\lambda(R)$ a in 0 überführt. Der Homomorphismus $R \to R/A_\tau(R)$ führt a in die Summe $b_1^*+b_2^*+\ldots+b_p^*$ über, wo $b_1^*, \ldots, b_p^*$ die Restklassen mod $A_\tau(R)$ von $b_1, \ldots, b_p$ d. h. Atome des Ringes $R/A_\tau(R)$ sind. Nach bekannten Eigenschaften der Atomelemente schließen wir daraus, daß p durch a eindeutig bestimmt ist.

Hilfssatz 3.10. Ist R ein Boolescher Ring und ξ eine Ordnungszahl, so ist jeder Teilring von $A_\xi(R)$ atomar.

Beweis. Wir nehmen an, daß die Behauptung falsch ist. Es gibt dann einen Booleschen Ring R und eine kleinste Ordnungszahl $\xi>0$, so daß $A_\xi(R)$ einen nichtatomaren Teilring enthält. Nach Hilfssatz 3.5 gibt es dann ein Element

$$(1) \qquad a \epsilon A_\xi(R),$$

für das der Ring (a) eine Menge B vom Typus η enthält. Daraus folgt leicht, daß es Elemente $a_1, a_2 \epsilon A_\xi(R)$ gibt, für die die Formeln gelten:

$$(2) \qquad a_1 \cdot a_2 = 0 \qquad a_1 \vee a_2 = a_1 + a_2 = a,$$

(3) *die Ringe (a_1), (a_2) enthalten Teilmengen vom Typus η.*

Aus (1) und Hilfssatz 3.9 folgt, daß bei einem geeigneten $\tau<\xi$ a in der Form

$$(4) \qquad a=b_1+\ldots+b_p+c_1+\ldots+c_q$$

dargestellt werden kann, wo

$$(5) \qquad b_1, \ldots, b_p \epsilon At_\tau(R), \qquad c_1, \ldots, c_q \epsilon \sum_{\zeta<\tau} At_\zeta(R).$$

Es ist $\tau=\xi-1$, da wir ξ möglichst klein gewählt haben. Mit Rücksicht auf Hilfssatz 3.9 können wir dabei annehmen, daß auch das Element a so gewählt wurde, daß die Zahl p möglichst klein ist.

Wir bezeichnen allgemein mit x^* die Restklasse von x mod $A_\tau(R)$. Aus (2), (4), (5) folgt

(6) $$a_1^* \vee a_2^* = b_1^* + \ldots + b_p^*, \qquad b_1^*, \ldots, b_p^* \in At(R/A_\tau(R)).$$

Nach bekannten Eigenschaften der Atomelemente folgern wir aus (6), daß eines der Elemente a_1^*, a_2^* z. B. a_1^* als die Summe von weniger als p Summanden b_i^* darstellbar ist (oder eventuell gleich 0 ist). Mit Rücksicht auf Hilfssatz 3.9 schließen wir nun, daß a_1 sich in der Form
$$a_1 = d_1 + \ldots + d_r + e_1 + \ldots + e_s$$
darstellen läßt, wo $d_1, \ldots, d_r \in At_\tau(R)$, $e_1, \ldots, e_s \in \sum_{\xi<\tau} At_\xi(R)$ und $r<p$ ist. Dies ist aber wegen (3) mit den Minimumeigenschaften der Zahlen p, ξ unvereinbar.

Hilfssatz 3.11. Wenn R ein Boolescher Ring ist, zu welchem es keinen homomorphen atomfreien Ring gibt, so ist jeder Teilring von R atomar.

Beweis. Im Einklang mit Definition 3.7 [d]) enthält $R/A_{\varkappa(R)}(R)$ keine Atomelemente und wir schließen auf Grund von Definition 3.1[d]), daß $R/A_{\varkappa(R)}(R)$ entweder atomfrei ist oder aus einem einzigen Element besteht. Wenn also kein zu R homomorpher Ring atomfrei ist, so ist $R = A_{\varkappa(R)}(R)$ und folglich, nach Hilfssatz 3.10, jeder Teilring von R atomar, w. z. b. w.

Satz 3.12. Für jeden Booleschen Ring R sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) *R ist erblich atomar;*
(ii) *kein zu R homomorpher Ring ist atomfrei;*
(iii) *jeder Teilring von R ist atomar;*
(iv) *kein Teilring von R ist atomfrei.*

Beweis. Die Implikation (i)→(ii) folgt aus Hilfssatz 3.2. Die Implikation (ii)→(iii) wurde im Hilfssatz 3.11 bewiesen. Die Implikation (iii)→(iv) folgt aus Hilfssatz 3.2 [b]) und die Implikation (iv)→(i) wurde im Hilfssatz 3.6 bewiesen.

Korollar 3.13. Jeder Teilring eines erblich atomaren Booleschen Ringes ist erblich atomar.

Satz 3.14. Jeder Boolesche Ring R mit einer zerstreuten Basis B ist erblich atomar.

Beweis. Es sei T ein beliebiger zu R homomorpher Ring, der mindestens zwei Elemente besitzt. Nach Satz 2.2 gibt es eine Menge $C \subset B$, so daß $[C]$ mit T isomorph ist:

(1) $$[C] \sim T.$$

Ist $\overline{\overline{C}} = 1$, so ist $At(T) \neq 0$. Sei nun $\overline{\overline{C}} \geqslant 2$.

Da B eine zerstreute Menge ist, so ist auch C zerstreut und es folgt aus $\overline{\overline{C}} \geqslant 2$, daß es mindestens einen Sprung in der Menge C gibt. Es seien a, b $(a \subset b)$ die Elemente von C, die diesen Sprung bestimmen. Wir haben also

(2) $$a+b \neq 0, \qquad a+b \in [C].$$

Es sei

(3) $$c \in [C], \qquad c \subset a+b, \qquad c \neq 0$$

und es sei

(4) $$c = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

die kanonische Darstellung des Elementes c. Die c_i gehören, sowie auch a, b, der geordneten Menge C an; da dabei kein c_i zwischen a und b liegen kann, so gelten Inklusionsbeziehungen etwa von der Form

(5) $$c_1 \supset c_2 \supset \ldots \supset c_p \supset b \supset a \supset c_{p+1} \supset \ldots \supset c_n.$$

Aus (3) ergibt sich $c \cdot a + c \cdot b = c$, d. h. wegen (4) und (5)
$$p \cdot a + c_{p+1} + \ldots + c_n + p \cdot b + c_{p+1} + \ldots + c_n = c_1 + \ldots + c_n$$
oder $p \cdot (a+b) = c$. Mit Rücksicht auf (3) folgern wir daraus, daß p ungerade ist, es ist also $p \cdot (a+b) = a+b$, somit $a+b = c$. Jedes von 0 verschiedene Element von $[C]$, das zu $a+b$ in der Beziehung der Inklusion steht, ist also mit $a+b$ identisch, d. h. $a+b$ ist nach (2) und Definition 3.1[a]) ein Atomelement von $[C]$. Nach (1) haben wir also $At(T) \neq 0$. Kein zu R homomorpher Ring ist also atomfrei, was auf Grund von Satz 3.12 beweist, daß R erblich atomar ist, w. z. b. w.

Satz 3.15. Ist R ein Boolescher Ring mit einer geordneten Basis, so sind folgende Bedingungen miteinander äquivalent:

(i) *R hat eine zerstreute Basis;*
(ii) *R ist erblich atomar;*
(iii) *jede geordnete Basis von R ist zerstreut.*

Beweis. Die Bedingung (i) impliziert nach Satz 3.14 die Bedingung (ii). Wenn die Bedingung (iii) nicht erfüllt ist, so gibt es eine geordnete Basis B von R, die nicht zerstreut ist, d. h. eine dichte Teilmenge und folglich eine Teilmenge C vom Typus η enthält. Wenn also $a \epsilon C$, so enthält der Ring (a) Mengen vom Typus η, was nach Sätzen 3.4 und 3.12 beweist, daß R nicht erblich atomar ist. Die Bedingung (ii) impliziert somit die Bedingung (iii). Schließlich folgt (i) direkt aus (iii) und der Voraussetzung, daß R mindestens eine geordnete Basis hat.

§ 4. Primideale in Ringen mit geordneter Basis.

Wir erinnern vor allem, daß es für jede Teilmenge M eines Booleschen Ringes R ein kleinstes Ideal in R gibt, das M umfaßt. Dieses Ideal, das wie üblich mit (M) bezeichnet wird, besteht nämlich aus den Elementen von R, die in der Vereinigung von endlich vielen Elementen von M enthalten sind. Nun lassen sich alle Primideale eines Booleschen Ringes mit geordneter Basis wie folgt charakterisieren:

Satz 4.1. Es sei R ein Boolescher Ring mit einer geordneten Basis B. [a]) *Die Funktion $F(I)=B-I$ stellt eine eineindeutige Abbildung der Menge der Primideale von R auf die Menge der Endstücke*[1]) *von B her.* [b]) *Ist A ein Endstück von B, so ist dasjenige Primideal I, das der Bedingung $F(I)=A$ genügt, durch die Formel $I=(B-A+\underset{a+b}{E}[a,b \epsilon A])$ bestimmt.*

Beweis. [a]) Ist I ein Primideal von R, so ist $B-I \neq 0$, da wir sonst $I \supset B$, also $I=R$ hätten. Ist nun $x,y \epsilon B$, $x \subset y$ und $x \epsilon B-I$, so ist auch $y \epsilon B-I$. Sonst hätten wir nämlich $y \epsilon I$, also $y \equiv 0 \pmod{I}$, wonach $x = x \cdot y \equiv 0 \pmod{I}$ wäre. Dies widerspricht aber der Formel x *non* ϵI. Daraus folgt:

(1) *ist I ein Primideal von R, so ist $B-I$ ein Endstück von B.*

Es seien I_1, I_2 zwei verschiedene Primideale. Es gibt daher ein $a \neq 0$, so daß

(2) $$a \epsilon I_1, \quad a \text{ non } \epsilon I_2.$$

Es sei $a_1 + \ldots + a_n$ die kanonische Darstellung von a. Wir können annehmen, daß die Nummerierung der a_i so gewählt wurde,

[1]) Als Endstück einer geordneten Menge B bezeichnen wir eine nichtleere Menge $C \subset B$, die mit jedem Element $x \epsilon C$ zugleich jedes Element y enthält, dem x in B vorangeht.

daß $a_1 \supset a_2 \supset \ldots \supset a_n$. Wir bezeichnen mit p_j die größte der Zahlen $i \leqslant n$, für welche $a_i \epsilon B - I_j$ $(j=1,2)$. Nach (2) erhalten wir, indem wir zu den Restklassen mod I_1 bzw. mod I_2 übergehen und mit e_1 bzw. e_2 die Einselemente der Ringe R/I_1 bzw. R/I_2 bezeichnen, die Gleichungen

(3) $$0 = p_1 \cdot e_1 \qquad 0 \neq p_2 \cdot e_2.$$

Aus (3) erhellt, daß p_1 gerade und p_2 ungerade ist. Folglich haben wir $p_1 \neq p_2$, woraus wir schließen, daß $B-I_1 \neq B-I_2$. Die Funktion $B-I$ ist daher eineindeutig. Es bleibt also nur übrig, zu beweisen, daß $B-I$ alle Endstücke von B durchläuft, wenn I alle Primideale von R durchläuft. Es sei also ein Endstück A von B gegeben. Wir setzen

(4) $$I = (B - A + \underset{a+b}{E}[a, b \epsilon A]).$$

Es sei a irgendein Element von A. Wäre nun $a \epsilon I$, so würden Elemente

(5) $$b_1, \ldots, b_m \epsilon B - A$$

(6) $$c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{2n} \epsilon A$$

existieren, derart daß

(7) $$a \subset b_1 \vee \ldots \vee b_m \vee (c_1 + c_{n+1}) \vee \ldots \vee (c_n + c_{2n}).$$

Wir wollen zeigen, daß dies unmöglich ist. Da nämlich B geordnet ist, so gibt es unter den Elementen (6) eines, das in allen übrigen enthalten ist. Ist c_j dieses Element, so folgt aus (7) durch Multiplikation mit c_j

(8) $$a \cdot c_j \subset b_1 \vee \ldots \vee b_m,$$

da $b_k \subset c_j$ $(k=1,2,\ldots,m)$ nach (5) und (6) gilt. Unter den Elementen (5) gibt es eines, das alle anderen enthält. Ist b_k dieses Element, so haben wir aus (8) $a \cdot c_j \subset b_k$. Diese Inklusion ist aber unmöglich, denn $a \cdot c_j \epsilon A$, $b_k \epsilon B-A$ und jedes Element von $B-A$ geht jedem Element von A voran. Wir haben also Folgendes bewiesen:

(9) $$\textit{ist} \quad a \epsilon A, \quad \textit{so ist} \quad a \textit{ non } \epsilon I.$$

Ist nun $a \epsilon B-I$, so gilt nach (4) $a \epsilon A$ und wir erhalten mit Rücksicht auf (9)

(10) $$B - I = A.$$

Nach Voraussetzung ist A nicht leer. Daraus folgt auf Grund von (9):

(11) *es gibt mindestens zwei Restklassen von R mod I.*

Es seien $x, y \epsilon R$ zwei Elemente, so daß x, y *non* ϵI. Es gilt daher $x \neq 0 \neq y$ und folglich lassen sich x und y in der Form $a_1 + \ldots + a_n$ bzw. $b_1 + \ldots + b_m$ darstellen, wobei die Elemente $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ zu B gehören und den Bedingungen $a_1 \supset \ldots \supset a_n$, $a_1 \neq \ldots \neq a_n$, $b_1 \supset \ldots \supset b_m$, $b_1 \neq \ldots \neq b_m$ genügen. Im allgemeinen gehört eine bestimmte Anzahl, sagen wir p, der a_i zur Menge A. Wäre p eine gerade Zahl, so hätten wir nach (4) $x \epsilon I$. Also ist p ungerade. Daraus schließen wir leicht, daß entweder $p = n$ und $x \equiv a_n$ (mod I) oder $p < n$, $x \equiv (a_p + a_{p+1})$ (mod I) und $a_p \epsilon A$, $a_{p+1} \epsilon B - A$ gilt. Ganz ähnlich zeigt man, daß entweder alle b_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ der Menge A angehören und $y \equiv b_m$ (mod I) ist, oder aber es eine Zahl $q < m$ gibt, so daß $y \equiv (b_q + b_{q+1})$ (mod I) und $b_q \epsilon A$, $b_{q+1} \epsilon B - A$. Demgemäß ist die Summe $x + y$ einem der folgenden vier Elemente modulo I kongruent: $a_n + b_m$, $a_n + b_q + b_{q+1}$, $a_p + a_{p+1} + b_m$, $a_p + a_{p+1} + b_q + b_{q+1}$, wobei $a_n, b_m, a_p, b_q \epsilon A$, $a_{p+1}, b_{q+1} \epsilon B - A$. Daraus folgt auf Grund von (4), daß $x + y \epsilon I$, d. h. $x \equiv y$ (mod I). Zwei Elemente von R, die zu I nicht gehören, sind also immer kongruent modulo I, so daß es höchstens zwei Restklassen von R mod I gibt. Mit Rücksicht auf (11) folgt daraus:

(12) *I ist ein Primideal von R.*

Damit ist Satz 4.1[a]) bewiesen. Satz 4.1[b]) folgt unmittelbar aus [a]), (4), (10) und (12).

Korollar 4.2. Ist R ein Boolescher Ring mit einer geordneten Basis B, so ist die Menge aller Primideale von R mit der Ausfüllung von B gleichmächtig.

In der Theorie der geordneten Mengen beweist man, daß die Ausfüllung einer zerstreuten Menge mit dieser Menge selbst gleichmächtig ist. Aus Korollar 4.2 folgt also noch folgendes

Korollar 4.3. Ist R ein Boolescher Ring mit einer zerstreuten Basis B, so ist die Menge aller Primideale von R mit B gleichmächtig.

Über die Existenz von sogenannten Kollektiven.

Von

Willy Feller (Stockholm).

1. In Anschluss an die bekannte Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch von Mises wurden viele Versuche unternommen, die Existenz von gewissen Merkmal-(Zahlen-) folgen zu beweisen, die möglichst weitgehende „Regellosigkeitseigenschaften" besitzen [1]). Diese Untersuchungen sind z. T. Selbstzweck, doch dienen die meisten dem axiomatischen Nachweis der Widerspruchsfreiheit für Kollektivbegriffe, die aus dem ursprünglichen von Misesschen durch starke Einengung hervorgegangen sind. Umfassendere Existenzsätze haben jedoch erst Copeland [2]) und Wald erbracht mit dem Anspruch, damit eine Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben zu haben, bei der keine wesentlichen Eigenschaften der von Misesschen Theorie verloren gehen. Die Ansätze sind miteinander eng verwandt, doch sind die Copelandschen Ergebnisse bloss ein Spezialfall der Waldschen.

Diese Ansätze werden im Zusammenhang mit den sog. Grundlagenfragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung neuerdings viel besprochen und die Literatur über die Existenz sog. Kollektive scheint noch lange nicht abgeschlossen zu sein. Daher mag es nützlich sein, den eigentlichen Kern der erwähnten Existenzsätze klarer herauszupräparieren. Es zeigt sich nämlich, dass man die Waldschen (und daher a fortiori die Copelandschen) Sätze bloss in naturgemässer Weise mengentheoretisch zu interpretieren braucht; die

[1]) Vgl. die Literaturzusammenstellung am Ende der Arbeit.

[2]) Das uns interessierende allgemeinste Resultat von Copeland ist in [6] enthalten. Die in den übrigen (und auch in hier nicht zitierten) Arbeiten entwickelte Theorie der admissible numbers ist nur ein Spezialfall hiervon.