Um nun zu zeigen, dass die Punktmenge B auch die Wertmenge einer Funktion C_n ist, werde die Punktmenge B', die man erhält, wenn man B am Nullpunkt spiegelt, betrachtet. B' ist eine Punktmenge P_{n+1}. Nach dem eben Bewiesenen gibt es eine Funktion $f'(x)$, die eine Funktion P_n und deren Wertmenge B' ist. Setzt man $f(x)=-f'(x)$, so ist $f(x)$ eine Funktion C_n, deren Wertmenge B ist.

Satz VIII. *Die Wertmenge einer endlichen Funktion B_n ist eine Menge P_n.*

Beweis. Sei $f(x)$ eine Funktion B_n. Die auf der rechten Seite der Formel (37) stehende Menge ist eine Menge B_n, daher ist ihr Komplement — die Menge $\underset{xy}{E}[f(x)=y]$ — ebenfalls eine Menge B_n. Die Wertmenge der Funktion $f(x)$ ist als Projektion einer Menge B_n eine Menge P_n.

Satz IX. *Jede nicht leere Menge B des R_1, die eine Menge P_n ist, ist die Wertmenge einer Funktion B_n.*

Beweis. Nach Satz VIII gibt es eine Funktion, die eine Funktion P_{n-1} und deren Wertmenge B ist. Da jede Funktion P_{n-1} eine Funktion B_n ist, ist Satz IX bewiesen.

Ideale in vollständigen Mengenkörpern. I.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

Ein additives und subtraktives (d. h. in Bezug auf die Addition und Subtraktion abgeschlossenes) Mengensystem heißt bekanntlich Mengenkörper oder einfach Körper; ein Körper, der aus allen Teilmengen einer gegebenen Menge besteht, wird hier vollständig genannt. Als Ideal in einem gegebenen Körper bezeichnen wir jedes nicht-leere, erbliche und additive Teilsystem dieses Körpers.

Auf wichtige Beispiele von Idealen stößt man sowohl in der allgemeinen Mengenlehre selbst als auch in verschiedenen ihrer Anwendungen, insbesondere in der Theorie des Maßes und in der Topologie. So z. B. kann in jedem Körper das Ideal aller endlichen bzw. höchstens abzählbaren Mengen dieses Körpers ausgezeichnet werden; die Mengen vom (Peano-Jordanschen oder Lebesgueschen) Maße 0 bilden ein Ideal in dem Körper der meßbaren Mengen; die nirgendsdichten Mengen bzw. die Mengen erster Kategorie eines topologischen Raumes bilden ein Ideal im vollständigen Körper, der aus allen Mengen dieses Raumes besteht.

Auch unabhängig von den Anwendungen drängt sich der Begriff des Ideals in den Vordergrund, wenn man die Theorie der Mengenkörper als eine Realisierung der formalen Booleschen Algebra betrachtet und diese letztere als einen Teil der allgemeinen abstrakten Algebra auffaßt [1]); die hervorragende Rolle des Begriffs des Ideals in den modernen algebraischen Untersuchungen ist ja eine wohl bekannte Tatsache.

---

[1]) Vgl. M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc. **40** (1936), S. 37 ff. (wo auch weitere Litteratur angegeben wird); A. Tarski, Ann. Soc. Pol. Math. **15** (1937), S. 186 ff.

In der vorliegenden Arbeit werden wir uns hauptsächlich mit den Idealen in vollständigen Körpern befassen (wenn wir auch wo möglich die erzielten Ergebnisse in einer allgemeineren Form darstellen und sie auf beliebige Körper beziehen). Wir betrachten einige wichtige Arten von Idealen, und zwar die Hauptideale, die $\mathfrak{m}$-additiven Ideale, die Primideale und die $\mathfrak{p}$-saturierten Ideale (der letztere Begriff, der eine Verallgemeinerung des Begriffs des Primideals ist, scheint hier zum ersten Mal erörtert zu werden); wir geben charakteristische Eigenschaften dieser Arten von Idealen an und untersuchen ihre gegenseitigen Beziehungen sowie die Methoden, die zu ihrer Konstruktion verwendet werden können [1]).

In erster Linie aber werden uns hier die Mächtigkeitsprobleme interessieren, d. h. die Fragen von der Form: wieviel Ideale dieser oder jener Art es in dem gegebenen Körper gibt? Für die vollständigen Körper sind heute diese Probleme in einer fast erschöpfender Weise gelöst. Die grundlegenden Sätze über die Anzahl der beliebigen und der $\mathfrak{m}$-additiven Ideale habe ich bereits in meiner früheren Arbeit: *Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires*, Fund. Math. **16** (1930), S. 181 ff., aufgestellt, ohne dabei die algebraische Ausdrucksweise zu verwenden (weiter unten wird diese Arbeit als *Classes closes...* zitiert). Wir wollen hier die erwähnten Sätze noch einmal formulieren und daran neue Ergebnisse anschließen, die die Primideale und die $\mathfrak{p}$-saturierten Ideale betreffen.

Die Arbeit beginnt mit Hilfsbetrachtungen aus der Arithmetik der Kardinalzahlen. In den eigentlichen Untersuchungen über die Ideale stützen wir uns auf manche Sätze der Mengenlehre, die mit der Idealtheorie scheinbar nichts zu tun haben, z.B. auf die Sätze über die unabhängigen Mengensysteme [2]) sowie auf die Ergebnisse meiner Arbeit: *Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. **30** (1938), S. 132 ff. (weiter unten als *Überdeckungssätze...* zitiert). Zum Schluß werden einige Anwendungen auf das abstrakte Maßproblem und auf die allgemeine Topologie angegeben; es wird u. a. die Anzahl der endlich-additiven Maßfunktionen in einer beliebigen Menge berechnet, und es werden zu jeder unendlichen Kardinalzahl $\mathfrak{k}$ topologische 0-dimensionale Räume mit der Mächtigkeit $2^{2^{\mathfrak{k}}}$ konstruiert, die $\mathfrak{k}$ isolierte Punkte haben und in denen die Menge der isolierten Punkte dicht ist. [1])

[1]) Die Begriffe des $\mathfrak{m}$-additiven und des $\mathfrak{p}$-saturierten Ideals habe ich in meiner Mitteilung in C. R. Soc. Sc. Vars. **30** (1937), S. 160 ff. definiert; die dort formulierten Definitionen sind aber den hier angenommenen nicht ganz äquivalent. In der zitierten Mitteilung habe ich auch manche der weiter unten begründeten Ergebnisse ohne Beweis angegeben (und zwar sogar in einer etwas allgemeineren Form, da sie dort nicht auf die vollständigen, sondern auf die sog. $\mathfrak{m}$-additiven Körper bezogen werden).

[2]) Vgl. die unten angegebenen Hilfssätze 2.25 und 3.16 sowie die Bemerkung 3.17.

§1. Hilfsbegriffe und Hilfssätze aus der Arithmetik der Kardinalzahlen.

Definition 1.1. *Für jede Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ wird mit $\mathfrak{m}^+$ die kleinste Kardinalzahl $>\mathfrak{m}$ bezeichnet.*

Korollar 1.2. *Ist $\mathfrak{m}<\aleph_0$, so ist $\mathfrak{m}^+=\mathfrak{m}+1$; ist $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$, so ist $\mathfrak{m}^+=\aleph_{\alpha+1}$.* [Nach 1.1].

Definition 1.3. *Ist $\mathfrak{m}$ eine beliebige Kardinalzahl, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}^*$ die kleinste Kardinalzahl $\mathfrak{n}$, die folgender Bedingung genügt: $\mathfrak{m}$ kann in der Form $\mathfrak{m}=\sum_{n\in N}\mathfrak{x}_n$ dargestellt werden, wobei $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{x}_n<\mathfrak{m}$ für jedes $n\in N$ ist.*

Korollar 1.4. *Es ist stets $\mathfrak{m}^*\leqslant\mathfrak{m}$. Ist $\mathfrak{m}\leqslant 2$, so ist $\mathfrak{m}^*=\mathfrak{m}$; ist $2\leqslant\mathfrak{m}<\aleph_0$, so ist $\mathfrak{m}^*=2$; ist $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$, so ist $\mathfrak{m}^*=\aleph_{cf(\alpha)}$; ist insbesondere $\mathfrak{m}=\aleph_0$ oder $\mathfrak{m}=\aleph_{\alpha+1}$, so ist $\mathfrak{m}^*=\mathfrak{m}$.* [Nach 1.3].

$cf(\alpha)$ bezeichnet wie üblich den Index der kleinsten Anfangszahl, mit der ω_α konfinal ist; vgl. z.B. *Classes closes...*, S. 184 ff. (Definition 2, Lemmata 1—3).

Korollar 1.5. *Ist $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, so ist $(\mathfrak{m}^+)^*=\mathfrak{m}^+$.* [Nach 1.2, 1.4].

Bemerkung 1.6. Eine Zahl $\mathfrak{m}\neq 0$, die nicht von der Form $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}^+$ ist, kann **Limeszahl** genannt werden. Eine Zahl $\mathfrak{m}$ heißt **regulär** oder **singulär** je nachdem, ob $\mathfrak{m}^*=\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{m}^*<\mathfrak{m}$ ist.

Satz 1.7. *Ist $\mathfrak{m}\geqslant 2$, so ist $\mathfrak{m}<\mathfrak{m}^{\mathfrak{m}^*}$ und, allgemeiner, $\mathfrak{m}<\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ für jedes $\mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{m}^*$.*

Das ist ein bekannter Satz von Zermelo [2]).

Satz 1.8. *Ist $0<\mathfrak{n}<\mathfrak{m}^*$, so gilt $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}=\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}=\sum_{\mathfrak{x}<\mathfrak{m}}\mathfrak{x}^{\mathfrak{n}}$; ist dabei, $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, so gilt $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}=\mathfrak{m}\cdot\sum_{\mathfrak{x}<\mathfrak{m}}\mathfrak{x}^{\mathfrak{n}}$.*

[1]) Herr M. H. Stone hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß eng verwandte (wenn auch auf einem ganz verschiedenen Wege erzielte) topologische Ergebnisse in den Arbeiten von E. Čech, Ann. of Math. **38** (1937), S. 823 ff., und B. Pospišil, ibid., S. 845 f., enthalten sind.

[2]) S. z.B. A. Schoenflies, *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Leipzig und Berlin 1913, S. 66 ff.

Beweis. Der Satz ergibt sich leicht aus zwei bekannten Formeln:

$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}=\aleph_{\alpha+1}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ *für beliebige* α *und* β;

$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=\sum'_{\xi<\alpha}\aleph_\xi^{\aleph_\beta}$, *wenn* α *eine Limeszahl ist und* $\beta<cf(\alpha)$ [1]).

Definition 1.9. Sind $\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{n}$ *zwei Kardinalzahlen, so bezeichnen wir die Summe* $\sum_{\mathfrak{x}<\mathfrak{n}}\mathfrak{m}^{\mathfrak{x}}$ *mit* $\mathfrak{m}^{\underline{\mathfrak{n}}}$.

Verschiedene Eigenschaften der Operation $\mathfrak{m}^{\underline{\mathfrak{n}}}$ wurden in *Classes closes...* (S. 188 ff., Lemmata 5—9) angegeben. Für die vorliegenden Betrachtungen haben folgende Sätze eine gewisse Bedeutung:

Satz 1.10. $\mathfrak{m}^{\underline{0}}=0$, $\mathfrak{m}^{\underline{1}}=1$; *ist* $\mathfrak{n}\geqslant 2$, *so ist* $\mathfrak{m}^{\underline{\mathfrak{n}}}\geqslant\mathfrak{m}$; *ist* $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ *und* $2\leqslant\mathfrak{n}\leqslant\aleph_0$, *so ist* $\mathfrak{m}^{\underline{\mathfrak{n}}}=\mathfrak{m}$. [Nach 1.9].

Satz 1.11. Ist $\mathfrak{m}^{\underline{\mathfrak{n}}}=\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{n}^*<\mathfrak{n}$, *so ist* $\mathfrak{m}^{\underline{\mathfrak{n}^+}}=\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}=\mathfrak{m}$.

Dieser Satz wurde (in anderer Formulierung) bereits in *Classes closes...*, Lemma 4ᵇ, S. 187 f. bewiesen.

Satz 1.12. Ist $\mathfrak{n}>\mathfrak{m}^*$, *so ist* $\mathfrak{m}^{\underline{\mathfrak{n}}}>\mathfrak{m}$ [Nach 1.7, 1.9].

Satz 1.13. Ist $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, *so ist* $(2^{\underline{\mathfrak{m}}})^{\mathfrak{n}}=2^{\underline{\mathfrak{m}}}$ *für* $1\leqslant\mathfrak{n}<\mathfrak{m}^*$ *und* $(2^{\underline{\mathfrak{m}}})^{\underline{\mathfrak{n}}}=2^{\underline{\mathfrak{m}}}$ *für* $2\leqslant\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}^*$.

Zum Beweis vgl. *Classes closes...*, Lemmata 7ᵃ und 8ᵃ, S. 190 ff.

Satz 1.14. Ist $\mathfrak{m}\neq 2$, *so gilt dann und nur dann* (i) $2^{\underline{\mathfrak{m}}}=\mathfrak{m}$, *wenn* (ii) *es keine Zahl* $\mathfrak{n}$ *gibt, für die* $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}<2^{\mathfrak{n}}$. *Jede der Bedingungen* (i) *und* (ii) *hat zur Folge, daß* (iii) *die Formeln* $\mathfrak{n}>\mathfrak{m}^*$ *und* $\mathfrak{m}^{\underline{\mathfrak{n}}}>\mathfrak{m}$ *für jedes* $\mathfrak{n}$ *äquivalent sind.*

Beweis. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, da sonst der Beweis trivial ist. Die Äquivalenz von (i) und (ii) kann dann leicht auf Grund von 1.9 erwiesen werden. Die Gültigkeit von (i) vorausgesetzt, erhalten wir aus 1.10 und 1.13: $\mathfrak{m}^{\underline{\mathfrak{n}}}\leqslant\mathfrak{m}$ für jedes $\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}^*$. Hieraus durch Kontraposition: ist $\mathfrak{m}^{\underline{\mathfrak{n}}}>\mathfrak{m}$, so ist $\mathfrak{n}>\mathfrak{m}^*$; da die inverse Implikation in 1.12 aufgestellt wurde, so sind die Formeln: $\mathfrak{n}>\mathfrak{m}^*$ und $\mathfrak{m}^{\underline{\mathfrak{n}}}>\mathfrak{m}$ für jedes $\mathfrak{n}$ äquivalent. Damit ist der Beweis zu Ende geführt.

Bemerkung 1.15. Man kann zeigen, daß die Bedingungen (i)—(iii) aus 1.14 äquivalent sind, wenn nur $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ keine Limeszahl ist. Hieraus schließt man leicht auf die Äquivalenz der drei Behauptungen:

Es gilt (i), *bzw.* (ii), *bzw.* (iii) *für jede Kardinalzahl* $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$.

Jede dieser drei Behauptungen stellt eine äquivalente Umformung der Cantorschen Alefhypothese dar:

$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$ *für jede Ordnungszahl* α.

---

[1]) Die erste dieser Formeln stammt von Hausdorff, die zweite vom Verfasser; vgl. A. Tarski, Fund. Math. 7 (1925), S. 1 ff.

Auch ohne die Cantorsche Hypothese vorauszusetzen, kann man übrigens zeigen, daß es Limeszahlen $\mathfrak{m}$ gibt, die den Bedingungen (i)—(iii) aus 1.14 genügen; die kleinste unter ihnen ist $\aleph_0$, die nächste ist $\aleph_0+2^{\aleph_0}+2^{2^{\aleph_0}}+\ldots$
Vgl. hiezu *Classes closes...*, S. 193 f. und 286.

Satz 1.16. Ist M *eine Menge mit der Mächtigkeit* $\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}^+$, *so ist die Mächtigkeit des Systems* $\underset{X}{E}[X\subset M$ *und* $\overline{\overline{X}}<\mathfrak{n}]$ *gleich* $\sum'_{\mathfrak{x}<\mathfrak{n}}\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{x}}$ *oder gleich* $\mathfrak{m}^{\underline{\mathfrak{n}}}$, *je nachdem ob* $\mathfrak{m}<\aleph_0$ *oder* $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ *ist.*

Zum Beweis s. *Classes closes...*, S. 195 f., Lemma 10ᵇ.

Das Symbol $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{x}}$ bezeichnet wie üblich den $(\mathfrak{x}+1)$-ten Koeffizienten in der binomischen Entwicklung von $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{\mathfrak{m}}$. Mit $\underset{x}{E}[B(x)]$ bezeichnen wir die Menge aller Dinge x, die der Bedingung $B(x)$ genügen. Wir werden auch das allgemeinere Symbol $\underset{f(x)}{E}[B(x)]$ verwenden, und zwar zur Bezeichnung der Menge der Funktionswerte $f(x)$, die denjenigen Argumentwerten x zugeordnet sind, welche die Bedingung $B(x)$ erfüllen.

Definition 1.17. Wir wollen sagen, daß die Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ *von der Kardinalzahl* $\mathfrak{m}$ *aus stark, bzw. schwach, erreichbar ist, wenn* $\mathfrak{n}$ *zu jedem System* $\mathfrak{K}$ *von Kardinalzahlen gehört, das folgende Bedingungen* (i)—(iii) *und* (iv), *bzw.* (i)—(iii) *und* (v), *erfüllt:* (i) $\mathfrak{m}\in\mathfrak{K}$; (ii) *ist* $\mathfrak{p}\in\mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{q}$, *so ist auch* $\mathfrak{q}\in\mathfrak{K}$; (iii) *ist* $\overline{\overline{P}}=\mathfrak{p}\in\mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{x}_p\in\mathfrak{K}$ *für jedes* $p\in P$, *so ist auch* $\sum_{p\in P}\mathfrak{x}_p\in\mathfrak{K}$; (iv) *ist* $\mathfrak{p}\in\mathfrak{K}$, *so ist auch* $\mathfrak{p}^+\in\mathfrak{K}$; (v) *ist* $\mathfrak{p},\mathfrak{q}\in\mathfrak{K}$, *so ist auch* $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}}\in\mathfrak{K}$.

Zu dieser Definition und zur Frage der gegenseitigen Beziehung zwischen den stark und schwach erreichbaren Zahlen s. *Überdeckungssätze...*, S. 132 f.

Satz 1.18. Ist $\mathfrak{m}$ *eine beliebige Kardinalzahl, so genügt das System* $\mathfrak{K}$ *der von* $\mathfrak{m}$ *aus stark, bzw. schwach, erreichbaren Zahlen den Bedingungen* (i)—(iii) *und* (iv), *bzw.* (i)—(iii) *und* (v), *aus der Definition 1.17.* [Nach 1.17].

Satz 1.19. Ist $\mathfrak{m}<\aleph_0$ *und ist* $\mathfrak{n}$ *von* $\mathfrak{m}$ *aus stark (oder schwach) erreichbar, so ist auch* $\mathfrak{n}<\aleph_0$.

Beweis. Es genügt zu bemerken, daß das System $\mathfrak{K}$ der endlichen Kardinalzahlen die Bedingungen (i)—(v) erfüllt.

Satz 1.20. Ist $\mathfrak{n}$ *von* $\mathfrak{m}$ *aus stark erreichbar, ist ferner* $\mathfrak{n}>\mathfrak{m}$ *und gibt es keine Zahl* $\mathfrak{p}$, *für die* $\mathfrak{n}=\mathfrak{p}^+$, *so ist* $\mathfrak{n}^*<\mathfrak{n}$.

Beweis. Nehmen wir an, daß $\mathfrak{n}^*=\mathfrak{n}$; $\mathfrak{n}$ ist also eine reguläre Limeszahl $>\mathfrak{m}$ (vgl. 1.6). Es gibt dann eine kleinste reguläre Limeszahl $\mathfrak{n}_0>\mathfrak{m}$. $\mathfrak{K}$ sei das System der Zahlen $\mathfrak{p}<\mathfrak{n}_0$. Mit Hilfe von 1.1 und 1.3 zeigt man leicht, daß $\mathfrak{K}$ den Bedingungen (i)—(iv) aus 1.17 genügt. Demnach ist $\mathfrak{n}\in\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{n}<\mathfrak{n}_0$, unserer Annahme (und der Definition von $\mathfrak{n}_0$) entgegen. Man hat folglich $\mathfrak{n}^*\neq\mathfrak{n}$, wonach wegen 1.4 $\mathfrak{n}^*<\mathfrak{n}$, w. z. b. w.

§ 2. Ideale, insbesondere Hauptideale und $\mathfrak{m}$-additive Ideale.

Ist $\boldsymbol{M}$ ein beliebiges Mengensystem, so bezeichnen wir mit $\sum(\boldsymbol{M})$ die Summe und mit $\prod(\boldsymbol{M})$ den Durchschnitt aller Mengen dieses Systems. Daneben werden auch die allgemeineren Symbole: $\sum\limits_{x\in X} F(x)$ und $\prod\limits_{x\in X} F(x)$ in ihrer üblichen Bedeutung verwendet.

Definition 2.1. Ein nicht-leeres Mengensystem $\boldsymbol{K}$ wird Mengenkörper oder einfach Körper genannt, wenn es mit zwei beliebigen Mengen X und Y zugleich deren Summe $X+Y$ und Differenz $X-Y$ als Elemente enthält.

Ein Mengenkörper $\boldsymbol{K}$ heißt vollständig, wenn er aus allen Teilmengen einer Menge $\boldsymbol{M}$ besteht.

Definition 2.2. Ist $\boldsymbol{K}$ ein Körper, so heißt eine nicht-leere Menge $X \epsilon \boldsymbol{K}$ Atom (oder Atommenge) von $\boldsymbol{K}$, in Zeichen $X \epsilon \boldsymbol{At}(\boldsymbol{K})$, wenn es keine von 0 und X verschiedene Menge $Y \subset X$ gibt, die zu $\boldsymbol{K}$ gehört.

$\boldsymbol{At}(\boldsymbol{K})$ bezeichnet somit das System aller Atome von $\boldsymbol{K}$.

Korollar 2.3. Ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper, so ist

$$\boldsymbol{K}=\underset{X}{E}[X\subset\sum(\boldsymbol{K})] \quad \text{und} \quad \boldsymbol{At}(\boldsymbol{K})=\underset{\{x\}}{E}[x\epsilon\sum(\boldsymbol{K})].$$

[Nach 2.1, 2.2].

Definition 2.4. Ist $\boldsymbol{K}$ ein Körper, so wird ein nicht-leeres System $\boldsymbol{I}\subset\boldsymbol{K}$ als Ideal (in $\boldsymbol{K}$) bezeichnet, in Zeichen: $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$, wenn es mit zwei beliebigen Mengen X und Y zugleich deren Summe $X+Y$ und mit jeder Menge X zugleich jede Menge $Y\subset X$, die zu $\boldsymbol{K}$ gehört, als Element enthält.

Korollar 2.5. Ist $\boldsymbol{K}$ ein Körper und $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$, so ist $\sum(\boldsymbol{X})\epsilon\boldsymbol{I}$ für jedes endliche System $\boldsymbol{X}\subset\boldsymbol{I}$; insbesondere ist $0\epsilon\boldsymbol{I}$. [Nach 2.1, 2.4].

Korollar 2.6. Ist $\boldsymbol{K}$ ein Körper, so ist $\boldsymbol{K}\epsilon\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$; ist dabei $\boldsymbol{K}$ vollständig (oder, allgemeiner, ist $\sum(\boldsymbol{K})\epsilon\boldsymbol{K}$), so ist $\boldsymbol{K}$ das einzige Ideal $\boldsymbol{I}$, für das $\sum(\boldsymbol{K})\epsilon\boldsymbol{I}$. [Nach 2.1, 2.4].

Satz 2.7. Es sei $\boldsymbol{K}$ ein Körper, $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{I}$ des System der Mengen $X\epsilon\boldsymbol{K}$, für die es ein endliches System $\boldsymbol{Y}\subset\boldsymbol{S}$ gibt, so daß $X\subset\sum(\boldsymbol{Y})$. Dann ist $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$, und zwar ist $\boldsymbol{I}$ das kleinste Ideal $\supset\boldsymbol{S}$. [Nach 2.1, 2.4].

Definition 2.8. Ist $\boldsymbol{K}$ ein Körper, so wird ein Ideal $\boldsymbol{I}$ Hauptideal (in $\boldsymbol{K}$) genannt, in Zeichen: $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$, wenn $\boldsymbol{I}$ aus allen Mengen $X\epsilon\boldsymbol{K}$ besteht, die in einer Menge $M\epsilon\boldsymbol{K}$ enthalten sind.

Korollar 2.9. Für jeden Körper $\boldsymbol{K}$ sind folgende Bedingungen äquivalent: (i) $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$; (ii) $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$ *und* $\sum(\boldsymbol{I})\epsilon\boldsymbol{I}$; (iii) $\boldsymbol{I}=\underset{X}{E}[X\epsilon\boldsymbol{K}$ *und* $X\subset\sum(\boldsymbol{I})]$, *wobei* $\sum(\boldsymbol{I})\epsilon\boldsymbol{K}$. [Nach 2.4, 2.8].

Die Hauptaufgabe der vorliegenden Untersuchungen kann nun folgendermaßen präzisiert werden: die Mächtigkeit des Systems $\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$ und gewisser ausgezeichneter Teilsysteme von $\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$, z. B. $\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$, zu bestimmen, vorausgesetzt, daß die Mächtigkeit des Körpers $\boldsymbol{K}$ und der Menge $\sum(\boldsymbol{K})$ bekannt ist (in vollständigen Körpern genügt es übrigens die Mächtigkeit von $\sum(\boldsymbol{K})$ zu berücksichtigen, da offenbar $\overline{\overline{\boldsymbol{K}}}=2^{\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}}$ gilt). Wenn es sich um ganz beliebige Körper handelt, so lassen sich für die in Frage kommenden Mächtigkeiten nur gewisse triviale Beschränkungen angeben:

Satz 2.10. Ist $\boldsymbol{K}$ ein Körper, $\overline{\overline{\boldsymbol{K}}}=\mathfrak{q}$ und $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}$, so ist $\overline{\overline{\mathcal{H}(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{q}\leqslant 2^{\mathfrak{k}}$ und $\mathfrak{q}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{J}(\boldsymbol{K})}}\leqslant 2^{\mathfrak{q}}\leqslant 2^{2^{\mathfrak{k}}}$. [Nach 2.4, 2.9]

Definition 2.11. Ist $\boldsymbol{K}$ ein Körper und $\mathfrak{m}$ eine beliebige Kardinalzahl, so wird ein Ideal $\boldsymbol{I}$ in $\boldsymbol{K}$ $\mathfrak{m}$-additiv genannt, in Zeichen $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})$, wenn $\boldsymbol{I}$ mit allen Mengen eines Systems $\boldsymbol{X}$ von der Mächtigkeit $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}<\mathfrak{m}$ zugleich deren Summe $\sum(\boldsymbol{X})$ als Element enthält.

Korollar 2.12. Ist $\boldsymbol{K}$ ein Körper, so ist $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\subset\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$ für beliebiges $\mathfrak{m}$ und $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})=\mathcal{J}(\boldsymbol{K})$ für $\mathfrak{m}\leqslant\aleph_0$; ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper, so ist $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\supset\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$ für beliebiges $\mathfrak{m}$ und $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})=\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$ für $\mathfrak{m}>\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}$.

Beweis. Der Satz ergibt sich leicht aus 2.5, 2.8 und 2.11; nur die Ableitung der Inklusion $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\subset\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$ für $\mathfrak{m}>\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}$ (im zweiten Teil des Satzes) könnte einige Schwierigkeit bieten. Es sei also $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper, $\mathfrak{m}>\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}$ und $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})$. Jedem Element $x\epsilon\sum(\boldsymbol{I})$ kann offenbar eine Menge $F(x)$ zugeordnet werden, so daß $x\epsilon F(x)\epsilon\boldsymbol{I}$. Setzen wir $\boldsymbol{X}=\underset{F(x)}{E}[x\epsilon\sum(\boldsymbol{I})]$. Man hat offensichtlich $\sum(\boldsymbol{X})=\sum(\boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{X}\subset\boldsymbol{I}$ und $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}\leqslant\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{I})}}\leqslant\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}<\mathfrak{m}$. Laut Definition 2.11 ist also $\sum(\boldsymbol{X})=\sum(\boldsymbol{I})\epsilon\boldsymbol{I}$; hienach auf Grund von 2.9 $\boldsymbol{I}\epsilon\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$, w. z. b. w.

Satz 2.13. Ist K ein endlicher Körper, so ist $\mathscr{I}(K)=\mathscr{H}(K)=\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)$ für jede Zahl $\mathfrak{m}$. [Nach 2.4, 2.5, 2.9, 2.12].

Satz 2.14. Ist K ein Körper und $\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{n}$, so ist $\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)\subset\mathscr{C}_\mathfrak{n}(K)$. [Nach 2.11].

Satz 2.15. Es sei K ein Körper und $\mathfrak{m}$ eine Zahl, die nicht von der Form $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}^+$ ist. Ist dann $I\in\mathscr{C}_\mathfrak{n}(K)$ für jedes $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$, so ist auch $I\in\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)$. [Nach 1.1, 2.11].

Satz 2.16. Es sei K ein beliebiger Körper, $\mathfrak{m}=\sum_{n\in N}'\mathfrak{x}_n$ und $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}$. Ist dann sowohl $I\in\mathscr{C}_{\mathfrak{n}^+}(K)$, als auch $I\in\mathscr{C}_{\mathfrak{x}_n^+}(K)$ für jedes $n\in N$, so ist auch $I\in\mathscr{C}_{\mathfrak{m}^+}(K)$ [Nach 1.1, 2.11].

Korollar 2.17. Ist K ein beliebiger Körper und $\mathfrak{m}^*<\mathfrak{m}$, so ist $\mathscr{C}_{\mathfrak{m}^+}(K)=\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)$. [Nach 1.1, 1.3, 2.14, 2.16].

Der nächste Satz ist eine Verallgemeinerung von 2.7:

Satz 2.18. Es sei K ein Körper, $\mathfrak{m}^*=\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, $S\subset K$ und I das System derjenigen Mengen $X\in K$, für die es ein System $Y\subset S$ mit $\overline{\overline{Y}}<\mathfrak{m}$ gibt, so daß $X\subset\sum(Y)$. Dann ist $I\in\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)$, und zwar ist I das kleinste $\mathfrak{m}$-additive Ideal $\supset S$.

Der Beweis bietet keine Schwierigkeiten; vgl. z. B. den Beweis von Hilfssatz 10 in *Überdeckungssätze...*, S. 143.

Bemerkung 2.19. Aus 1.5 und 2.17 erhellt, daß Satz 2.18 gültig bleibt, wenn man in ihm die Formel $\mathfrak{m}^*=\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{m}^*<\mathfrak{m}$ und zugleich $\overline{\overline{Y}}<\mathfrak{m}$ durch $\overline{\overline{Y}}\leqslant\mathfrak{m}$ ersetzt.

Um für einen vollständigen Körper K die Mächtigkeit des Systems $\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)$ zu bestimmen muß man drei Fälle unterscheiden: $\mathfrak{m}>\mathfrak{k}=\overline{\overline{\sum(K)}}$, $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{k}<\mathfrak{k}^{\underline{\mathfrak{m}}}$ und $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}^{\underline{\mathfrak{m}}}$ (nach 1.10 kann $\mathfrak{k}>\mathfrak{k}^{\underline{\mathfrak{m}}}$ nur dann gelten, wenn $\mathfrak{m}\leqslant 1$; von diesem trivialen Fall wird mit Rücksicht auf 2.12 abgesehen). Im ersten und unter einer zusätzlichen Voraussetzung auch im zweiten Fall ist die Mächtigkeit von $\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)$ „klein", und zwar ist sie gleich der Mächtigkeit von K (Sätze 2.20 und 2.23); das gilt auch dann, wenn K endlich und $\mathfrak{m}$ beliebig ist (2.21). Im dritten Fall, die Unendlichkeit von K vorausgesetzt, ist die betrachtete Mächtigkeit „groß": $\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)$ ist mit dem System aller Teilsystemen von K gleichmächtig; das betrifft auch das System $\mathscr{I}(K)$ (Sätze 2.28, 2.29).

Satz 2.20. Ist K ein vollständiger Körper, $\overline{\overline{\sum(K)}}=\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{m}>\mathfrak{k}$, so ist $\overline{\overline{\mathscr{H}(K)}}=\overline{\overline{\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)}}=2^\mathfrak{k}$. [Nach 2.10, 2.12].

Korollar 2.21. Ist K ein vollständiger Körper $\overline{\overline{\sum(K)}}=\mathfrak{k}<\aleph_0$, und $\mathfrak{m}$ beliebig, so ist $\overline{\overline{\mathscr{I}(K)}}=\overline{\overline{\mathscr{H}(K)}}=\overline{\overline{\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)}}=2^\mathfrak{k}$. [Nach 2.13, 2.20].

Satz 2.22. Ist K ein vollständiger Körper, $\overline{\overline{\sum(K)}}=\mathfrak{k}\geqslant\aleph_0$ und $\mathfrak{m}>\mathfrak{k}^*$, so ist $2^\mathfrak{k}\leqslant\overline{\overline{\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)}}\leqslant 2^{2^{\underline{\mathfrak{k}}}}$.

Der etwas komplizierte Beweis dieses Satzes ist in *Classes closes...*, S. 277–283 (Theorem 70") zu finden.

Korollar 2.23. Ist K ein vollständiger Körper, $\overline{\overline{\sum(K)}}=\mathfrak{k}=2^{\underline{\mathfrak{k}}}\geqslant\aleph_0$ und $\mathfrak{k}^{\underline{\mathfrak{m}}}>\mathfrak{k}$ (bzw. $\mathfrak{m}>\mathfrak{k}^*$), so ist $\overline{\overline{\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)}}=2^\mathfrak{k}$. [Nach 1.14, 2.22].

Bemerkung 2.24. Aus 2.22 und 2.23 ersieht man folgendes: setzt man die Gültigkeit der Cantorschen Alefhypothese voraus oder nimmt man zumindest an, daß die Zahl $\mathfrak{k}=\overline{\overline{\sum(K)}}$ dieser Hypothese nicht widerspricht (d. h. daß $2^{\underline{\mathfrak{k}}}=\mathfrak{k}$ ist), so kann man im Fall $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{k}<\mathfrak{k}^{\underline{\mathfrak{m}}}$ die Mächtigkeit des Systems $\mathscr{C}_\mathfrak{m}(K)$ genau bestimmen; sonst vermag man nur gewisse Schranken anzugeben und man muß dabei die Formel $\mathfrak{k}<\mathfrak{k}^{\underline{\mathfrak{m}}}$ durch die logisch stärkere Formel $\mathfrak{m}>\mathfrak{k}^*$ ersetzen (vgl. 1.12, 1.14 und 1.15). Die Möglichkeit, die bisherigen Ergebnisse in diesem Punkt zu vervollkommen, scheint sehr gering zu sein; vgl. hiezu *Classes closes...*, S. 285 f.

Hilfssatz 2.25. Es sei K ein vollständiger Körper, $\overline{\overline{\sum(K)}}=\mathfrak{k}\geqslant\aleph_0$ und $\mathfrak{k}^{\underline{\mathfrak{m}}}=\mathfrak{k}$. Es gibt dann ein System $S\subset K$ mit der Mächtigkeit $2^\mathfrak{k}$, das folgender Bedingung genügt:

(i) *ist $X\in S$, $Y\subset S$, $\overline{\overline{Y}}<\mathfrak{m}$ und X non $\in Y$, so ist X non $\subset\sum(Y)$.*

Beweis. Dieser Hilfssatz wurde bereits in *Classes closes...*, S. 259 ff. (Lemma 58) bewiesen; mit Rücksicht auf den Beweis des weiter unten angegebenen Satzes 3.16 wollen wir hier jedoch den Gedankengang skizzieren.

Wegen $\overline{\overline{\sum(K)}}=\mathfrak{k}\geqslant\aleph_0$ ist $\mathfrak{k}=2\cdot\mathfrak{k}$ und die Menge $\sum(K)$ kann in zwei fremde Teilmengen zerlegt werden: $\sum(K)=A+B$, derart daß $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}=\mathfrak{k}$. Es sei f eine Funktion, die A auf B eineindeutig abbildet. Bezeichnen wir mit T das System aller Mengen von der Form $X+(B-\underset{f(x)}{E}[x\in X])$; dann gilt, wie leicht zu zeigen:

(1) $T \subset K$ und $\overline{\overline{T}} = 2^{\mathfrak{k}}$;

(2) ist $X, Y \in T$ und $X \neq Y$, so ist X non $\subset Y$.

Jeder Menge X ordnen wir die Menge (genauer: das Mengensystem) $X^{\times}$ zu, bestimmt durch die Formel:

(3) $X^{\times} = \underset{U}{E}[U \subset X \text{ und } \overline{\overline{U}} < \mathfrak{m}]$.

Insbesondere wird der Menge $\sum(K)$ die Menge $(\sum(K))^{\times}$ zugeordnet, deren Mächtigkeit nach (3) und 1.16 gleich $\mathfrak{k}^{\underline{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{k}$ ist. Es sei $\mathcal{K}$ das System aller Teilmengen von $(\sum(K))^{\times}$; man hat offenbar:

(4) *$\mathcal{K}$ ist ein vollständiger Körper und $\overline{\overline{\sum(\mathcal{K})}} = \mathfrak{k}$.*

Durch die Funktion $F(X) = X^{\times}$ wird ein beliebiges Mengensystem Y auf das System $Y^* = \underset{X^{\times}}{E}[X \in Y]$ abgebildet; aus (3) folgt, daß diese Abbildung eineindeutig ist und daß demnach Y und Y^* die gleiche Mächtigkeit haben. Es sei insbesondere $\mathcal{S} = T^*$; nach (1) ist

(5) $\mathcal{S} \subset \mathcal{K}$ und $\overline{\overline{\mathcal{S}}} = 2^{\mathfrak{k}}$.

Wir wollen nun zeigen, daß $\mathcal{S}$ folgender Bedingung genügt:

(6) *ist $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{S}$, $\overline{\overline{\mathcal{Y}}} < \mathfrak{m}$ und $\mathbf{X}$ non $\in \mathcal{Y}$, so ist $\mathbf{X}$ non $\subset \sum(\mathcal{Y})$.*

Es ist nämlich klar, daß $\mathbf{X}$ und $\mathcal{Y}$ von der Form: $\mathbf{X} = X^{\times}$, $\mathcal{Y} = Y^*$ sein müssen, wobei $X \in T$, $Y \subset T$, $\overline{\overline{Y}} < \mathfrak{m}$ und X non $\in Y$. Ist $Z \in Y$, so ist $X, Z \in T$ und $X \neq Z$, woraus nach (2) $X - Z \neq 0$. Wir wählen aus jeder Menge $X - Z$ ein bestimmtes Element $f(Z)$ aus und bilden die Menge $U = \underset{f(Z)}{E}[Z \in Y]$. Es ist offenbar $U \subset X$ und $\overline{\overline{U}} \leq \overline{\overline{Y}} < \mathfrak{m}$, wonach wegen (3) $U \in X^{\times} = \mathbf{X}$. Anderseits ist aber U non $\subset Z$ (da $f(Z) \in U - Z$) und folglich U non $\in Z^{\times}$ für jedes $Z \in Y$, U gehört also zu keiner Menge des Systems $Y^* = \mathcal{Y}$. Hieraus folgt, daß $\mathbf{X}$ in der Summe $\sum(\mathcal{Y})$ nicht enthalten ist, und (6) ist somit bewiesen.

Aus (4)-(6) erhellt, daß es uns gelungen ist, in einem bestimmten vollständigen Körper $\mathcal{K}$ mit $\overline{\overline{\sum(\mathcal{K})}} = \mathfrak{k}$ ein System $\mathcal{S} \subset \mathcal{K}$ von der Mächtigkeit $2^{\mathfrak{k}}$ zu konstruieren, das der Bedingung (i) des in Rede stehenden Satzes genügt. Nun ist aber klar, daß sich dieses Ergebnis auf jeden vollständigen Körper K' mit $\overline{\overline{\sum(K')}} = \mathfrak{k}$ übertragen läßt und insbesondere auf den ursprünglichen Körper K. Dadurch ist der Beweis zu Ende geführt.

Hilfssatz 2.26. Es sei K ein beliebiger Körper und $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m} \geq \aleph_0$. Gibt es dann ein System $S \subset K$ mit einer Mächtigkeit $\geq \mathfrak{n}$, das der Bedingung (i) *aus 2.25 genügt, so ist $\overline{\overline{\mathcal{Q}_{\mathfrak{m}}(K)}} \geq 2^{\mathfrak{n}}$.*

Beweis. Dem Satz 2.18 gemäß, kann man jedem System $X \subset S$ ein bestimmtes Ideal $I(X) \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{m}}(X)$ zuordnen, nämlich das kleinste $\mathfrak{m}$-additive Ideal $\supset X$; aus (i) schließt man dabei daß zwei verschiedenen Systemen $X \subset S$ und $Y \subset S$ zwei verschiedene Ideale $I(X)$ und $I(Y)$ entsprechen. Das System $\underset{X}{E}[X \subset S]$, dessen Mächtigkeit offenbar $\geq 2^{\mathfrak{n}}$ ist, wird also durch die Funktion $I(X)$ auf ein Teilsystem von $\mathcal{Q}_{\mathfrak{m}}(K)$ eineindeutig abgebildet; hieraus ergibt sich unmittelbar die behauptete Ungleichung.

Bemerkung 2.27. Aus 2.23 und 2.26 ersieht man, daß die Voraussetzung $\mathfrak{k}^{\underline{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{k}$ in 2.25 nicht weggelassen oder wesentlich abgeschwächt, etwa durch $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{k}$ ersetzt werden kann: ist nämlich $\mathfrak{k}^{\underline{\mathfrak{m}}} > \mathfrak{k}$ und gilt dabei $2^{\underline{\mathfrak{k}}} = \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}$ (was z. B. für $\mathfrak{k} = \aleph_0 + 2^{\aleph_0} + 2^{2^{\aleph_0}} + \ldots$ und $\mathfrak{m} = \aleph_1$ zutrifft), so muß jedes System $S \subset K$, das die Bedingung (i) aus 2.25 erfüllt, von einer Mächtigkeit $< 2^{\mathfrak{k}}$ sein. Unter Zugrundelegung der Cantorschen Alefhypothese kann man also 2.25 in gewissem Sinne umkehren: ist K ein vollständiger Körper, $\overline{\overline{\sum(K)}} = \mathfrak{k} \geq \aleph_0$ und $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}$, so ist die Formel: $\mathfrak{k}^{\underline{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{k}$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Systems S, das der Behauptung von 2.25 genügt.

Satz 2.28. Ist K ein vollständiger Körper, $\overline{\overline{\sum(K)}} = \mathfrak{k} \geq \aleph_0$ und $\mathfrak{k}^{\underline{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{k}$, so ist $\overline{\overline{\mathcal{Q}_{\mathfrak{m}}(K)}} = 2^{2^{\mathfrak{k}}}$.

Beweis. Aus 2.10 und 2.12 folgt sofort, daß $\overline{\overline{\mathcal{Q}_{\mathfrak{m}}(K)}} \leq 2^{2^{\mathfrak{k}}}$. Ist $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m} \geq \aleph_0$, so ergibt sich die inverse Ungleichung $\overline{\overline{\mathcal{Q}_{\mathfrak{m}}(K)}} \geq 2^{2^{\mathfrak{k}}}$ direkt aus 2.25 und 2.26 (für $\mathfrak{n} = 2^{\mathfrak{k}}$). Ist $\mathfrak{m}^* < \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, so wendet man 2.25 und 2.26 nicht auf die Zahl $\mathfrak{m}$, sondern auf $\mathfrak{m}^+$ an, wobei man 1.5, 1.11 und 2.17 berücksichtigt. In analoger Weise ersetzt man im Fall $\mathfrak{m} < \aleph_0$ die Zahl $\mathfrak{m}$ durch $\aleph_0$ (mit Rücksicht auf 1.4, 1.10 und 2.12). Der Satz gilt also für alle $\mathfrak{m}$.

Vgl. *Classes closes...*, S. 265 f., Theorem XI.

Korollar 2.29. Ist K ein vollständiger Körper und $\overline{\overline{\sum(K)}} = \mathfrak{k} \geq \aleph_0$, so ist $\overline{\overline{\mathcal{J}(K)}} = 2^{2^{\mathfrak{k}}}$. [Nach 1.10, 2.12, 2.28].

§ 3. Primideale.

Definition 3.1.[1] *Ist K ein Körper, so wird ein Ideal I Primideal (in K) genannt, in Zeichen: $I \epsilon \mathscr{P}(K)$, wenn $I \neq K$ ist und folgender Bedingung genügt: ist $X, Y \epsilon K$ und $X \cdot Y \epsilon I$, so ist $X \epsilon I$ oder $Y \epsilon I$.*

Satz 3.2. Ist K ein beliebiger Körper und $I \epsilon \mathscr{I}(K)$, so sind folgende Bedingungen äquivalent: (i) *$I \epsilon \mathscr{P}(K)$;* (ii) *$I$ ist $\neq K$ und das System $K - I$ enthält keine zwei fremde Mengen als Elemente;* (iii) *I ist $\neq K$ und es gibt kein $J \epsilon \mathscr{I}(K)$, so daß $J \neq K$, $J \neq I$ und $J \supset I$. Wenn dabei K vollständig ist (oder, allgemeiner, wenn $\sum(K) \epsilon K$), so sind diese Bedingungen noch folgender Bedingung äquivalent:* (iv) *ist $X \epsilon K$, so gehört genau eine der beiden Mengen X und $\sum(K) - X$ zu I.*

Der Satz ist bekannt, und sein Beweis bietet keine Schwierigkeiten.

Satz 3.3. Es sei K ein vollständiger Körper (oder, allgemeiner, ein Körper, der $\sum(K)$ als Element enthält). Damit $I \epsilon \mathscr{P}(K)$, ist notwendig und hinreichend, daß I folgenden Bedingungen genügt: (i) *$I \subset K$;* (ii) *es gibt kein endliches System $X \subset I$, so daß $\sum(X) = \sum(K)$;* (iii) *zu jeder Menge $Y \epsilon K - I$ gibt es eine Menge $X \epsilon I$, so daß $X + Y = \sum(K)$.*

Beweis. Nehmen wir zunächst an, daß $I \epsilon \mathscr{P}(K)$. Nach 2.4 und 3.1 ist dann $I \subset K$. Gäbe es ein endliches System $X \subset I$ mit $\sum(X) = \sum(K)$, so hätte man nach 2.5 und 2.6 $I = K$, im Gegensatz zu 3.1. Ist schließlich $Y \epsilon K - I$, so ist nach 3.2 (iv) $X = \sum(K) - Y \epsilon I$ und man hat offenbar $X + Y = \sum(K)$. I genügt also den Bedingungen (i)-(iii).

Setzen wir nun voraus, I erfülle diese drei Bedingungen. Aus (ii) folgt, daß $I \neq K$, da z. B. $\sum(K) \epsilon K - I$; nach (iii) ergibt sich hieraus, daß I nicht leer ist. Es sei $X \epsilon I$, $Y \subset X$ und $Y \epsilon K$; gehörte Y nicht zu I, so gäbe es nach (iii) eine Menge $X_1 \epsilon I$, für die $X_1 + Y = \sum(K)$ wäre; umsomehr wäre dann $X_1 + X = \sum(K)$, im Widerspruch zu (ii). I enthält also mit jeder Menge X auch jede Menge $Y \subset X$ als Element. In analoger Weise zeigt man, daß I mit zwei beliebigen Mengen X und Y auch $X + Y$ als Element enthält. Im Einklang mit 2.4 ist folglich $I \epsilon \mathscr{I}(X)$. Nehmen wir nun an, $K - I$ enthalte zwei fremde Mengen Y_1 und Y_2 als Elemente. Nach (iii) gibt es dann zwei Mengen $X_1, X_2 \epsilon J$, so daß $X_1 + Y_1 = X_2 + Y_2 = \sum(K)$; da $Y_1 \cdot Y_2 = 0$ ist und demnach $(X_1 + Y_1) \cdot (X_2 + Y_2) \subset X_1 + X_2$, so ergibt sich hieraus $X_1 + X_2 = \sum(K)$, was wiederum der Bedingung (ii) widerspricht. I genügt also der Bedingung 3.2 (ii) und ist ein Primideal in K, w. z. b. w.

[1]) Zu dieser Definition und zu den Sätzen 3.2 und 3.6 vgl. M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc. **40** (1936), S. 74 ff.

Eine Verallgemeinerung von 3.3 stellt der folgende Satz dar:

Satz 3.4. Es sei K ein vollständiger Körper und $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Damit $I \epsilon \mathscr{C}_{\mathfrak{m}}(K) \cdot \mathscr{P}(K)$, ist notwendig und hinreichend, daß I den Bedingungen (i) *und* (iii) *aus 3.3 sowie folgender Bedingung genügt:* (ii) *es gibt kein System $X \subset I$ mit einer Mächtigkeit $< \mathfrak{m}$, für das $\sum(X) = \sum(K)$.*

Beweis: analog zu 3.3.

Bemerkung 3.5. Die Bedingung (iii) in 3.3 und 3.4 kann durch folgende (schwächere) Bedingung ersetzt werden: *es gibt kein System $J \subset K$, das I als echten Teil umfaßt und zugleich der Bedingung* (ii) *(für $I = J$) genügt*; mit anderen Worten: *I ist ein in Bezug auf die Bedingung* (ii) *saturiertes Teilsystem von K.*

Satz 3.3 kann noch folgendermaßen verallgemeinert werden. Man zieht eine beliebige Zahl $\mathfrak{n}$ in Betracht, die $\geqslant 2$ und $\leqslant \aleph_0$ ist, und gibt den Bedingungen (ii) und (iii) folgende Form: (ii) *es gibt kein System $X \subset I$ mit $\overline{\overline{X}} < \mathfrak{n} + 2$, so daß $\sum(X) = \sum(K)$;* (iii) *zu jeder Menge $Y \epsilon K - I$ gibt es ein System $X \subset I$ mit $\overline{\overline{X}} < \mathfrak{n}$, so daß $\sum(X) + Y = \sum(K)$.*

Satz 3.3 kann auf beliebige Körper ausgedehnt werden. Die Formulierung der Bedingungen (ii) und (iii) erfährt aber dabei eine Komplizierung; (ii) lautet dann z. B.: *es gibt eine Menge $Z \epsilon K$, derart daß $Z \operatorname{non} \subset \sum(X)$ für jedes endliche System $X \subset I$.*

Satz 3.6. Für jeden Körper K sind folgende Bedingungen äquivalent: (i) *$I \epsilon \mathscr{H}(K) \cdot \mathscr{P}(K)$;* (ii) *$I \epsilon \mathscr{P}(K)$, $\sum(I) \neq \sum(K)$ und $\sum(I)$, $\sum(K) \epsilon K$;* (iii) *$I \epsilon \mathscr{P}(K)$, $At(K) \operatorname{non} \subset I$ und $\sum(K) \epsilon K$;* (iv) *$I \epsilon \mathscr{H}(K)$ und $\sum(K) - \sum(I) \epsilon At(K)$. Ist der Körper K vollständig, so kann in* (ii) *die Formel: $\sum(I)$, $\sum(K) \epsilon K$, in* (iii) *die Formel: $\sum(K) \epsilon K$ weggelassen werden und zu* (i)-(iv) *kommt dann folgende äquivalente Bedingung hinzu:* (v) *es gibt ein Element $y \epsilon \sum(K)$, so daß $I = \underset{X}{E}[X \subset \sum(K) - \{y\}]$.*

Der Satz ergibt sich leicht aus den Definitionen der betreffenden Begriffe (etwa mit Hilfe von 2.3, 2.9 und 3.2).

Satz 3.7. Ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper und $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}$, so ist $\overline{\overline{\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}$. [Nach 3.6].

Korollar 3.8. Ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper, $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}<\aleph_0$ und $\mathfrak{m}$ beliebig, so ist $\overline{\overline{\mathcal{P}(\boldsymbol{K})}}=\overline{\overline{\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})}}=\overline{\overline{\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}$. [Nach 2.13, 3.1, 3.7].

Wir werden jetzt zeigen, daß die Formel: $\overline{\overline{\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}$, die in 3.8 nur für $\mathfrak{k}<\aleph_0$ aufgestellt wurde, unter viel allgemeineren Voraussetzungen gilt (Satz 3.10).

Satz 3.9. Ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper, $\mathfrak{m}$ eine beliebige Kardinalzahl und ist die Zahl $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}$ von einer Zahl $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ aus schwach erreichbar, so ist jedes $\mathfrak{m}$-additive Primideal in $\boldsymbol{K}$ zugleich ein Hauptideal, und demnach $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})=\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})$.

Beweis. Der Behauptung des Satzes entgegen nehmen wir an, es gebe ein $\mathfrak{m}$-additives Primideal $\boldsymbol{I}$, das kein Hauptideal ist. Wegen 2.13 muß also der Körper $\boldsymbol{K}$ und die Zahl $\overline{\overline{\sum(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}$ unendlich sein; nach 1.19 und mit Rücksicht auf die Voraussetzungen des Satzes schließen wir hieraus, daß auch $\mathfrak{n}$ unendlich ist.

Die Zahl $\mathfrak{n}$, die Menge $N=\sum(\boldsymbol{K})$ und das Mengensystem $\boldsymbol{I}$ genügen folgenden Bedingungen: (1) die Mächtigkeit der Menge N ist von $\mathfrak{n}\geqslant\aleph_0$ aus schwach erreichbar; (2) es gibt nicht zwei fremde Teilmengen von N, die zu $\boldsymbol{I}$ gehören (wegen 3.2 (ii)); (3) $N\subset\sum(\boldsymbol{I})$ (wegen 3.6 (ii)). Nach (1)-(3) sind die Voraussetzungen des zweiten Überdeckungssatzes aus meiner Arbeit *Überdeckungssätze...*, S. 149 (für $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$ und $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}$) erfüllt; der Behauptung dieses Satzes gemäß gibt es also ein System $\boldsymbol{X}\subset\boldsymbol{I}$, für das $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}\leqslant\mathfrak{n}$ und $N=\sum(\boldsymbol{K})\subset\sum(\boldsymbol{X})$ ist. Da hiebei $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ und $\sum(\boldsymbol{X})\subset\sum(\boldsymbol{I})\subset\sum(\boldsymbol{K})$, so hat man ferner $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}<\mathfrak{m}$ und $\sum(\boldsymbol{X})=\sum(\boldsymbol{K})$; im Einklang mit 2.11 erhält man hieraus $\sum(\boldsymbol{K})\in\boldsymbol{I}$. Nach 2.6 hat diese Formel zur Folge, daß $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{K}$; laut 3.1 ist folglich $\boldsymbol{I}$ kein Primideal.

Dadurch ist unsere Annahme widerlegt; es gibt also kein Ideal $\boldsymbol{I}\in\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})-\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$. Hienach mit Rücksicht auf 2.12: $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})=\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})$, w. z. b. w.

Satz 3.10. Unter den Voraussetzungen von 3.9 ist $\overline{\overline{\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})}}=\mathfrak{k}$. [Nach 3.7, 3.9].

Es entsteht das Problem, ob die Voraussetzung über die Erreichbarkeit der Zahl $\mathfrak{k}$ in 3.9 und 3.10 wesentlich ist. Dieses Problem wurde bisher nur für den einfachsten nicht-trivialen Fall: $\mathfrak{k}\geqslant\aleph_0\geqslant\mathfrak{m}$ endgültig gelöst (das ist übrigens der einzige praktisch wichtige Fall: man weiß ja nicht, ob es überhaupt Zahlen gibt, die nicht von $\aleph_0$ aus erreichbar sind[1]). In dem genannten Fall ist das System $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})$ nach 2.12 mit $\mathcal{P}(\boldsymbol{K})$ identisch, deckt sich aber keineswegs mit $\mathcal{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathcal{P}(\boldsymbol{K})$ (Satz 3.15) und hat eine viel größere Mächtigkeit, nämlich $2^{2^{\mathfrak{k}}}$ (Satz 3.19).

Um dieses Resultat zu gewinnen, müssen wir eine Reihe von Vorbereitungen treffen.

Satz 3.11. Ist $\boldsymbol{K}$ ein beliebiger Körper, $\boldsymbol{I}\in\mathcal{I}(\boldsymbol{K})$ und $\boldsymbol{I}\neq\boldsymbol{K}$, so gibt es ein Ideal $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}(\boldsymbol{K})$, für das $\boldsymbol{I}\supset\boldsymbol{J}$.

Dieser wichtige Satz wird als Fundamentalsatz der Theorie der Ideale bezeichnet. Es sind mehrere Beweise dieses Satzes bekannt[2]); am einfachsten kann der Beweis wohl auf Grund von 3.3 durchgeführt werden.

Bemerkung 3.12. Man kann Satz 3.11 in folgender Weise verschärfen:

In einem beliebigen Körper $\boldsymbol{K}$ ist jedes Ideal $\boldsymbol{I}\neq\boldsymbol{K}$ mit dem Durchschnitt aller Primideale $\boldsymbol{J}\supset\boldsymbol{I}$ identisch[3]).

Korollar 3.13. Ist $\boldsymbol{K}$ ein vollständiger Körper (oder, allgemeiner, ein Körper, der $\sum(\boldsymbol{K})$ als Element enthält) und genügt das System $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{K}$ der Bedingung (ii) aus 3.3 (für $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{S}$), so gibt es ein Ideal $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}(\boldsymbol{K})$, für das $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{J}$. [Nach 2.7, 3.11].

Satz 3.14. Ist $\boldsymbol{K}$ ein beliebiger Körper, $\boldsymbol{I}\in\mathcal{I}(\boldsymbol{K})-\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$ und $\boldsymbol{I}\neq\boldsymbol{K}$, so gibt es ein Ideal $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}(\boldsymbol{K})-\mathcal{H}(\boldsymbol{K})$, für das $\boldsymbol{I}\subset\boldsymbol{J}$ (wenn dabei $\sum(\boldsymbol{K})\in\boldsymbol{K}$ oder insbesondere wenn $\boldsymbol{K}$ vollständig ist, so ist die Voraussetzung: $\boldsymbol{I}\neq\boldsymbol{K}$ überflüßig).

---

[1]) Vgl. hiezu z.B. A. Tarski, Fund. Math. **30** (1938), S. 84.

[2]) Vgl. A. Tarski, Fund. Math. **15** (1930), S. 47, Lemma 4; J. von Neumann und M. H. Stone, Fund. Math. **25** (1935), S. 365 ff., Theorem 14.

[3]) Vgl. M. H. Stone, op. cit., S. 105 f., Theorem 66; A. Tarski, Fund. Math. **26** (1936), S. 285, Satz 36 sowie Ann. Soc. Pol. Math. **15** (1937), S. 188.

Beweis. Ist $\sum(\boldsymbol{K})\ non \in \boldsymbol{K}$, so folgt aus 3.6, daß $\mathscr{H}(\boldsymbol{K})\cdot\mathscr{P}(\boldsymbol{K})=0$, und die Behauptung des Satzes ergibt sich unmittelbar aus 3.11. Ist aber $\sum(\boldsymbol{K})\in\boldsymbol{K}$, so setzen wir:

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K}\cdot\underset{X}{E}[X\subset\sum(\boldsymbol{K})-\sum(\boldsymbol{I})].$$

Man zeigt leicht, daß $\boldsymbol{S}$ der Bedingung (ii) aus 3.3 genügt: sonst würde es nämlich ein endliches System $\boldsymbol{X}_1\subset\boldsymbol{I}$ geben, für das $\sum(\boldsymbol{X}_1)=\sum(\boldsymbol{I})$, und demnach würde $\boldsymbol{I}$ mit Rücksicht auf 2.5 und 2.9 ein Hauptideal sein. Nach 3.13 gibt es also ein Primideal $\boldsymbol{J}\supset\boldsymbol{S}\supset\boldsymbol{I}$. Aus der Definition von $\boldsymbol{S}$ ersieht man ferner, daß entweder $\sum(\boldsymbol{J})\ non\in\boldsymbol{K}$ oder wegen 2.1 $\sum(\boldsymbol{K})-\sum(\boldsymbol{J})\in\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{J}$ und folglich $\sum(\boldsymbol{K})-\sum(\boldsymbol{J})=0$; nach 3.6 ist also $\boldsymbol{J}$ kein Hauptideal, und der Beweis ist beendet.

Satz 3.15. Für jeden Körper $\boldsymbol{K}$ sind folgende Bedingungen äquivalent: (i) $\mathscr{P}(\boldsymbol{K})\ non\subset\mathscr{H}(\boldsymbol{K})$; (ii) $\mathscr{H}(\boldsymbol{K})\ non\subset\mathscr{H}(\boldsymbol{K})$; (iii) $\boldsymbol{K}$ *ist unendlich. Anderseits sind folgende Bedingungen äquivalent:* (iv) *es gibt ein Ideal* $\boldsymbol{I}\in\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$, *für das* $\boldsymbol{At}(\boldsymbol{K})\subset\boldsymbol{I}$; (v) *es gibt ein Ideal* $\boldsymbol{I}\neq\boldsymbol{K}$, *für das* $\boldsymbol{At}(\boldsymbol{K})\subset\boldsymbol{I}$; (vi) *es gibt ein unendliches System* $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{K}$ *von paarweise fremden Mengen und eine Menge* $X\in\boldsymbol{K}$, *für die* $\sum(\boldsymbol{S})\subset X$. *Wenn* $\sum(\boldsymbol{K})\in\boldsymbol{K}$ *oder insbesondere wenn* $\boldsymbol{K}$ *vollständig ist, so sind alle Bedingungen* (i)-(vi) *äquivalent.*

Beweis. (ii) folgt direkt aus (i) mit Rücksicht auf 3.1; (iii) ergibt sich aus (ii) auf Grund von 2.13. Gilt (iii), so gibt es bekanntlich ein unendliches System $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{K}$ von paarweise disjunkten Mengen[1]); man kann dabei offenbar annehmen, daß $\sum(\boldsymbol{S})\neq\sum(\boldsymbol{K})$. Wir bilden nun nach 2.7 das kleinste Ideal $\boldsymbol{I}\supset\boldsymbol{S}$. Wie leicht ersichtlich, ist $\boldsymbol{I}\ non\in\mathscr{H}(\boldsymbol{K})$ und $\boldsymbol{I}\neq\boldsymbol{K}$, da $\sum(\boldsymbol{I})=\sum(\boldsymbol{S})\ non\in\boldsymbol{I}$ und $\neq\sum(\boldsymbol{K})$ (vgl. 2.9). Nach 3.14 kann folglich $\boldsymbol{I}$ zu einem Ideal $\boldsymbol{J}\in\mathscr{P}(\boldsymbol{K})-\mathscr{H}(\boldsymbol{K})$ erweitert werden; dadurch ist (i) gewonnen. Die Bedingungen (i)-(iii) sind also tatsächlich äquivalent.

Wir wollen jetzt (vi) aus (iv) ableiten. Es sei $\boldsymbol{I}\in\mathscr{P}(\boldsymbol{K})$ und $\boldsymbol{At}(\boldsymbol{K})\subset\boldsymbol{I}$. Im Einklang mit 3.1 ist $\boldsymbol{I}\neq\boldsymbol{K}$, es gibt folglich eine Menge $X\in\boldsymbol{K}-\boldsymbol{I}$. Wir betrachten das System $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{At}(\boldsymbol{K})\cdot\underset{Y}{E}[Y\subset X]$. Aus 2.2 ersieht man sofort, daß zwei Atome entweder identisch oder disjunkt sind; ist also $\boldsymbol{S}$ unendlich, so ist (vi) erfüllt. Ist aber $\boldsymbol{S}$ endlich, so kann nicht $X=\sum(\boldsymbol{S})$ sein, da dann nach 2.5 X zu $\boldsymbol{I}$ gehören müßte; die Menge $X-\sum(\boldsymbol{S})$ ist also nicht-leer und umfaßt keine Atome. Da hiebei wegen 2.1 $X-\sum(\boldsymbol{S})\in\boldsymbol{K}$ ist, so kann man leicht ein unendliches System $\boldsymbol{S}_1\subset\boldsymbol{K}$ von paarweise fremden Mengen angeben, so daß $\sum(\boldsymbol{S}_1)\subset X-\sum(\boldsymbol{S})\subset X$ (aus 2.2 ersieht man nämlich, daß sich $X-\sum(\boldsymbol{S})$ in zwei disjunkte Teilmengen $X_1, X_2\in\boldsymbol{K}$ zerlegen läßt, eine von diesen Mengen, sagen wir X_2, kann wiederum in zwei disjunkte Mengen $X_{2,1}, X_{2,2}\in\boldsymbol{K}$ zerlegt werden usw. usw.). Die Bedingung (vi) ist also wiederum erfüllt. — Nehmen wir nun an, daß (vi) gilt; es sei $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{K}$ ein unendliches System von paarweise fremden Mengen und $\sum(\boldsymbol{S})\subset X\in\boldsymbol{K}$. Wir setzen $\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{At}(\boldsymbol{K})$ und konstruieren gemäß 2.7 das kleinste Ideal $\boldsymbol{I}\subset\boldsymbol{S}_1$. Wie leicht zu zeigen, ist $X\ non\in\boldsymbol{I}$ (sonst müßte nämlich eine Summe unendlich vieler Mengen von $\boldsymbol{S}$ in einer Summe endlich vieler Atome enthalten sein, was aber mit Rücksicht auf 2.2 ausgeschlossen ist). Demnach ist $\boldsymbol{I}\neq\boldsymbol{K}$, und (v) ist erfüllt. Aus (v) ergibt sich schließlich (iv) auf Grund von 3.11.

Wenn $\sum(\boldsymbol{K})\in\boldsymbol{K}$, so folgt aus 3.6, daß die Bedingungen (i) und (iv) und folglich alle Bedingungen (i)-(vi) äquivalent sind.

Wir geben jetzt eine Verschärfung von 2.25:

Hilfssatz 3.16. Unter den Voraussetzungen von 2.25 gibt es ein System $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{K}$ mit der Mächtigkeit $2^{\mathfrak{k}}$, das folgender Bedingung genügt:

(i) *ist* $\boldsymbol{X}\subset\boldsymbol{S}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}<\mathfrak{m}$, $\boldsymbol{Y}\subset\boldsymbol{S}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{Y}}}<\mathfrak{m}$ *und* $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}=0$, *so ist* $\prod(\boldsymbol{X})\ non\subset\sum(\boldsymbol{Y})$.

Beweis. Es sei $\boldsymbol{S}'$ ein System, das der Behauptung von 2.25 (für $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}'$) genügt. Wir bilden das System $\boldsymbol{T}=\underset{\sum(\boldsymbol{K})-X}{E}[X\in\boldsymbol{S}']$. Wie leicht ersichtlich, erfüllt $\boldsymbol{T}$ folgende Bedingungen:

(1) $\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{K}$ und $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}=2^{\mathfrak{k}}$;

(2) *ist* $\boldsymbol{X}\subset\boldsymbol{T}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}<\mathfrak{m}$, $Y\in\boldsymbol{T}$ *und* $Y\ non\in\boldsymbol{X}$, *so ist* $\prod(\boldsymbol{X})\ non\subset Y$.

Im weiteren wiederholt man fast wörtlich den Beweis von 2.25: man nimmt dieses System $\boldsymbol{T}$ als Ausgangspunkt, wendet auf $\sum(\boldsymbol{K})$ und $\boldsymbol{T}$ die Operationen $X^{\times}$ und Y^{*} an und gelangt auf diesem Wege zu einem System $\boldsymbol{S}$, das alle behaupteten Eigenschaften aufweist[1]).

[1]) Vgl. A. Tarski, Fund. Math. **6** (1924), S. 94 f. (ein Resultat von Kuratowski).

[1]) Hilfssatz 3.16 für $\mathfrak{m}=\aleph_0$ wurde von F. Hausdorff in Stud. Math. **6** (1936), S. 18 f. aufgestellt; zwei seiner Spezialfälle ($\mathfrak{k}=\aleph_0$ und $\mathfrak{k}=\mathfrak{c}$) wurden noch früher von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch in Stud. Math. **5** (1934), S. 80 ff. bewiesen. Der oben skizzierte Beweis von 2.25 und 3.16 ist dem Hausdorffschen Beweis nahe verwandt (wie S. 53 erwähnt wurde, hat sich der Verfasser bereits in *Classes closes*... (1930), S. 259 ff., der hier verwendeten Schlußweise bedient).

Bemerkung 3.17. Ein System S, das der Bedingung (i) aus 2.25, bzw. 3.16 genügt, kann als $\mathfrak{m}$-unabhängiges Mengensystem im weiteren, bzw. im engeren Sinne bezeichnet werden.

Die Bemerkung 2.27 läßt sich auf 3.16 anwenden.

Hilfssatz 3.18. Ist K ein vollständiger Körper (oder, allgemeiner, ein Körper, für den $\sum(K)\in K$) und gibt es ein System $S\subset K$ mit einer Mächtigkeit $\geqslant\mathfrak{n}$, das der Bedingung (i) *aus 3.16 für $\mathfrak{m}=\aleph_0$ genügt, so ist $\overline{\overline{\mathcal{P}(K)}}\geqslant 2^{\mathfrak{n}}$.*

Beweis. Wie leicht zu zeigen, impliziert die Bedingung (i) aus 3.16 folgende Eigenschaften des Systems S:

(1) *es gibt keine endlichen disjunkten Teilsysteme $X\subset S$ und $Y\subset S$, so daß $\sum(X)+\sum\limits_{Z\in Y}(\sum(K)-Z)=\sum(K)$;*

(2) *ist $X\in S$, so ist $\sum(K)-X$ non $\in S$.*

Bezeichnen wir mit $\mathcal{S}$ das System aller Mengensysteme von der Form $F(Z)=Z+\underset{\sum(K)-U}{E}[U\in S-Z]$, wo $Z\subset S$. Aus (2) erhellt, daß die Funktion $F(Z)$ das System $\underset{Z}{E}[Z\subset S]$ auf das System $\mathcal{S}$ eineindeutig abbildet; wegen $\overline{\overline{S}}\geqslant\mathfrak{n}$ folgt hieraus:

(3) $\overline{\overline{\mathcal{S}}}\geqslant 2^{\mathfrak{n}}$.

Mit Hilfe von (1) zeigt man ferner mühelos, daß $\mathcal{S}$ folgende Bedingungen erfüllt:

(4) *ist $Z\in\mathcal{S}$, so ist $Z\subset K$ und es gibt kein endliches System $X\subset Z$, für das $\sum(X)=\sum(K)$;*

(5) *ist $Z_1, Z_2\in\mathcal{S}$ und $Z_1\neq Z_2$, so gibt es eine Menge $U\in K$, derart daß $U\in Z_1$ und $\sum(K)-U\in Z_2$.*

Auf Grund von 3.13 und mit Rücksicht auf (4) kann man jedem System Z ein Primideal $P(Z)\supset Z$ eindeutig zuordnen; ist dabei $Z_1, Z_2\in\mathcal{S}$ und $Z_1\neq Z_2$, so ersieht man aus (5) und 3.2 (iv), daß auch $P(Z_1)\neq P(Z_2)$ ist. Die Funktion $P(Z)$ bildet demnach in eineindeutiger Weise das System $\mathcal{S}$ auf ein Teilsystem von $\mathcal{P}(K)$ ab; wegen (3) ist also $\overline{\overline{\mathcal{P}(K)}}\geqslant 2^{\mathfrak{n}}$, w. z. b. w.

Satz 3.19. Ist K ein vollständiger Körper und $\overline{\overline{\sum(K)}}=\mathfrak{k}\geqslant\aleph_0$, so ist $\overline{\overline{\mathcal{P}(K)}}=2^{2^{\mathfrak{k}}}$. [Nach 1.10, 3.16, 3.18; 2.10, 3.1]

Bemerkung 3.20. Wir wollen nun die in 2.20, 2.21, 2.23, 2.28, 2.29, 3.7, 3.8, 3.10 und 3.19 erzielten Ergebnisse zusammenfassen, die die Anzahl der Ideale betreffen:

Es sei K ein vollständiger Mengenkörper, $\overline{\overline{\sum(K)}}=\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{m}$ eine beliebige Kardinalzahl.

I. $\mathfrak{k}<\aleph_0$. (i) Das System $\mathcal{J}(K)=\mathcal{H}(K)=\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}(K)$ hat die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{k}}$.

(ii) Das System $\mathcal{P}(K)=\mathcal{H}(K)\cdot\mathcal{P}(K)=\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}(K)\cdot\mathcal{P}(K)$ hat die Mächtigkeit $\mathfrak{k}$.

II. $\mathfrak{k}\geqslant\aleph_0$. (i) Das System $\mathcal{J}(K)=\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}(K)$ für $\mathfrak{m}\leqslant\aleph_0$ hat die Mächtigkeit $2^{2^{\mathfrak{k}}}$.

(ii) Das System $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}(K)$ für $\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{k}$ hat die Mächtigkeit $2^{2^{\mathfrak{k}}}$.

(iii) Das System $\mathcal{P}(K)=\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}(K)\cdot\mathcal{P}(K)$ für $\mathfrak{m}\leqslant\aleph_0$ hat die Mächtigkeit $2^{2^{\mathfrak{k}}}$.

(iv) Das System $\mathcal{H}(K)=\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}(K)$ für $\mathfrak{m}>\mathfrak{k}$ hat die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{k}}$.

(v) Das System $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}(K)$ für $\mathfrak{k}^{\mathfrak{m}}>\mathfrak{k}=2^{\underline{\mathfrak{k}}}$ hat die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{k}}$.

(vi) Das System $\mathcal{H}(K)\cdot\mathcal{P}(K)$ hat die Mächtigkeit $\mathfrak{k}$ und ist unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{k}$ von einer Zahl $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ schwach erreichbar ist, mit $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}(K)\cdot\mathcal{P}(K)$ identisch.

Um den betrachteten Problemkreis zu erschöpfen, bleibt es noch übrig, 1. sich im Fall II (v) von der Bedingung $\mathfrak{k}=2^{\underline{\mathfrak{k}}}$ zu befreien und 2. die Mächtigkeit von $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}(K)\cdot\mathcal{P}(K)$ in dem Fall zu untersuchen, wo $\mathfrak{m}>\aleph_0$ und $\mathfrak{k}$ von keiner Zahl $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ schwach erreichbar ist.

Beide Probleme dürften schwierig sein (vgl. 2.24).