B's have coordinates satysfying the inequalities $u_1 < u < u_2$, $v_1 < v < v_2$. To the set $S_{u_1,u_2;v_1,v_2}$, we may apply the theorems on general sets which we have proved, and may thus conclude that, except for the points of a certain, say τ-exceptional set $E_{u_2,u_2;v_1,v_2}$, the set $S_{u_1,u_2;v_1,v_2}$ is in a certain specific sense "regular", say, at every point of $S_{u_1,u_2;v_1,v_2}$. Letting u_1, u_2, v_1, v_2 vary independently over the set of rational numbers, we obtain $\aleph_0$ sets $E_{u_1,u_2;v_1,v_2}$ whose sum E is again τ-exceptional. The points A of the xy-plane not belonging to E will be such that every $S_{u_1,u_2;v_1,v_2}$ containing A, with u_1, u_2, v_1, v_2 all rational, will show a certain regular character at A; and on account of the nature of the exceptional sets employed, this property will remain valid when the condition that u_1, u_2, v_1, v_2 be rational is dropped. A will thus be a point of a certain specific regularity with reference to the point transformation $B = f(A)$. An example of a theorem obtainable by means of the indicated line of reasoning is the following: If $B = f(A)$, where $A = (x, y)$ and $B = (u, v)$, is a point transformation subject only to the condition that to every A there corresponds one and only one B, every point A of the xy-plane, with the exception of a sparse set, is such that either (a) every straight line through A contains a sequence of points A_n having A as limit such that $\lim f(A_n) = B$; or (b) there exists a positive constant k such that every straight line through A contains a sequence of points A_n having A as limit and the property that the distance between $f(A_n)$ and B is more than k for every n.

An analogous result can be proved for point transformations from m-space to n-space. It may be shown, too, that the condition that $f(A)$ be unique is not essential in the argument.

Über projektive Funktionen[1]).

Von

Hans Fried (Wien).

1. Mit P_0 und C_0 werden die Borelschen Mengen, mit P_n (wo n immer eine natürliche Zahl bedeutet) die stetigen Bilder der Mengen C_{n-1} und mit C_n die Komplemente der Mengen P_n bezeichnet. Mit B_n werden die Mengen bezeichnet, die sowohl Mengen P_n als auch Mengen C_n sind.

Es werden reelle Funktionen betrachtet, die in dem Baireschen Nullraum definiert sind und auch die Werte $+\infty$ und $-\infty$ annehmen können.

Eine Funktion $F(x)$ wird als eine Funktion P_n (bzw. C_n, bzw. B_n) bezeichnet, wenn die Menge $\underset{x}{E}[F(x) > c]$ für jedes c eine Menge P_n (bzw. C_n, bzw. B_n) ist.

Eine Funktion $F(x)$, für die es eine Darstellung

$$(1) \qquad F(x) = \sup\{\psi[\varphi^{-1}(x)]\}$$

gibt, bei der $x = \varphi(t)$ eine stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und $\psi(t)$ eine Bairesche Funktion ist, wird als Funktion g^1 bezeichnet; eine Funktion $F(x)$, für die es eine Darstellung

$$(2) \qquad F(x) = \inf\{\psi[\varphi^{-1}(x)]\}$$

gibt, bei der $x = \varphi(t)$ eine stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und $\psi(t)$ eine Bairesche Funktion ist, wird als Funktion g_1 bezeichnet. Die Funktionen g^n und g_n werden durch vollständige Induktion definiert. Mit g^n wird eine Funktion $F(x)$ bezeichnet, für die es eine Darstellung (1) gibt, bei der $x = \varphi(t)$ eine stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und

[1]) Die Ergebnisse dieser Arbeit habe ich auf dem III. Polnischen Mathematischen Kongress in Warschau 1937 (vgl. Annales Soc. Polon. Math. **16**, 1938, S. 191) mitgeteilt.

$\psi(t)$ eine Funktion g_{n-1} ist; mit g_n wird eine Funktion $F(x)$ bezeichnet, für die es eine Darstellung (2) gibt, bei der $x=\varphi(t)$ eine stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und $\psi(t)$ eine Funktion g^{n-1} ist.

Als Funktion g_n^n wird eine Funktion bezeichnet, die sowohl Funktion g^n als auch Funktion g_n ist.

2. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Funktionen g^n (bzw. g_n, bzw. g_n^n) mit den Funktionen P_n (bzw. C_n, bzw. B_n) identisch sind.

Hilfssatz I. *Ist $F(x)$ eine Funktion, für die es eine Darstellung* (1) *gibt, bei der $x=\varphi(t)$ eine Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und $\psi(t)$ eine reelle Funktion ist, so ist*

$$\underset{x}{E}[F(x)>c]=\varphi\{\underset{t}{E}[\psi(t)>c]\}. \tag{3}$$

Beweis: Sei x_0 ein Punkt, der in der links stehenden Menge enthalten ist. Ich will zeigen, dass er auch der rechts stehenden Menge angehört. Da x_0 in der links stehenden Menge enthalten ist, muss es wegen (1) ein t_0 geben, so dass sowohl

$$t_0\,\epsilon\,\varphi^{-1}(x_0) \tag{4}$$

als auch

$$\psi(t_0)>c. \tag{5}$$

(5) ist gleichbedeutend mit $t_0\,\epsilon\,\underset{t}{E}[\psi(t)>c]$ und daraus folgt in Verbindung mit (4), dass $x_0=\varphi(t_0)\,\epsilon\,\varphi\{E[\psi(t)>c]\}$. Dies bedeutet, dass x_0 in der rechts stehenden Menge enthalten ist.

Nun sei x_0 ein Punkt, der in der rechts stehenden Menge enthalten ist. Ich will zeigen, dass er auch der links stehenden Menge angehört. Es gilt $x_0\,\epsilon\,\varphi\{\underset{t}{E}[\psi(t)>c]\}$, somit ist der Durchschnitt $\varphi^{-1}(x_0)\cdot\underset{t}{E}[\psi(t)>c]$ nicht leer. Für einen Punkt t_0 dieses Durchschnittes ist $t_0\,\epsilon\,\varphi^{-1}(x_0)$ und $\psi(t_0)>c$, somit wegen (1) $x_0\,\epsilon\,\underset{x}{E}[F(x)>c]$. Dies bedeutet, dass x_0 in der links stehenden Menge enthalten ist.

Hilfssatz II. *Ist $F(x)$ eine Funktion g^n* (bzw. g_n), *so ist $-F(x)$ eine Funktion g_n* (bzw. g^n).

Der Beweis für $n=1$ folgt daraus, dass $F(x)=\sup\{\psi[\varphi^{-1}(x)]\}$ gleichbedeutend ist mit $-F(x)=\inf\{-\psi[\varphi^{-1}(x)]\}$. Für $n>1$ wird der Beweis mit Hilfe vollständiger Induktion geführt.

Satz I. *Jede Funktion g^n* (bzw. g_n) *ist eine Funktion P_n* (bzw. C_n).

Beweis. Sei $n=1$. $F(x)$ sei eine Funktion g^1. Nach Definition gibt es eine Darstellung (1), bei der $x=\varphi(t)$ eine stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und $\psi(t)$ eine Bairesche Funktion ist. $\underset{t}{E}[\psi(t)>c]$ ist eine Borelsche Menge, $\varphi\{\underset{t}{E}[\psi(t)>c]\}$ eine Menge P_1 und nach Hilfssatz I $\underset{x}{E}[F(x)>c]$ eine Menge P_1, womit bewiesen ist, dass $F(x)$ eine Funktion P_1 ist.

Wenn $F(x)$ eine Funktion g_1 ist, ist nach Hilfssatz II $-F(x)$ eine Funktion g^1 und somit eine Funktion P_1. Daher ist $\underset{x}{E}[-F(x)>-c]=\underset{x}{E}[F(x)<c]$ für jedes c eine Menge P_1, $\underset{x}{E}[F(x)\geqslant c]$ eine Menge C_1 und aus der Formel $\underset{x}{E}[F(x)>c]=\sum_{\nu=1}^{\infty}[F(x)\geqslant c+1/\nu]$ ist ersichtlich [2]), dass $\underset{x}{E}[F(x)>c]$ eine Menge C_1, somit $F(x)$ eine Funktion C_1 ist.

Angenommen, der Satz sei für n richtig; ich will zeigen, dass er auch für $n+1$ richtig ist. Es sei $F(x)$ eine Funktion g^{n+1}. Nach Definition gibt es eine Darstellung (1), bei der $x=\varphi(t)$ eine stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich, $\psi(t)$ eine Funktion g_n und nach Annahme eine Funktion C_n ist. Es ist somit $\underset{t}{E}[\psi(t)>c]$ eine Menge C_n, $\varphi\{\underset{t}{E}[\psi(t)>c]\}$ eine Menge P_{n+1} und daher nach Hilfssatz I $\underset{x}{E}[F(x)>c]$ eine Menge P_{n+1}, womit bewiesen ist, dass $F(x)$ eine Funktion P_{n+1} ist.

Wenn $F(x)$ eine Funktion g_{n+1} ist, wird der Beweis in analoger Weise wie für den Fall, dass $F(x)$ eine Funktion g_1 ist, geführt.

Zum Beweise der Umkehrung des Satzes I bedarf es einiger Hilfssätze.

Hilfssatz III. *Sei $\{\psi_n(t)\}$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen, $-1\leqslant\psi_n(t)\leqslant 1$ für alle n, $\psi(t)=\lim\limits_{n=\infty}\psi_n(t)$, $x=\varphi(t)$ eine Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich, schliesslich:*

$$F_n(x)=\sup\{\psi_n[\varphi^{-1}(x)]\},\qquad F(x)=\sup\{\psi[\varphi^{-1}(x)]\}. \tag{6}$$

Dann gilt

$$\lim_{n=\infty}F_n(x)=F(x). \tag{7}$$

---

[2]) Vgl. z. B. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matem. **3**, Warszawa-Lwów 1933, S. 236, III, 3.

Beweis. Die Folge $\{F_n(x)\}$ ist monoton wachsend und es gilt $-1\leqslant F_n(x)\leqslant 1$ für alle n. Es existiert somit

(8) $$\lim_{n=\infty} F_n(x)=F'(x).$$

Es ist zu zeigen, dass

(9) $$F'(x)=F(x).$$

Aus $\psi_n(t)\leqslant\psi(t)$ folgt wegen (6) und (7) $F_n(x)\leqslant F(x)$ für alle n und somit wegen (8)

(10) $$F'(x)\leqslant F(x).$$

Ist x_0 ein beliebiger Punkt, so ist wegen (8), da die Folge $\{F_n(x)\}$ monoton wächst, $F_n(x_0)\leqslant F'(x_0)$ für alle n. Daher ist nach (6) $\psi_n(t)\leqslant F_n(x_0)\leqslant F'(x_0)$ für jedes $t\,\epsilon\,\varphi^{-1}(x_0)$. Somit ist

$$\lim_{n=\infty}\psi_n(t)=\psi(t)\leqslant F'(x_0)$$

für jedes $t\,\epsilon\,\varphi^{-1}(x_0)$, woraus nach (6)

(11) $$F(x_0)\leqslant F'(x_0)$$

folgt. Aus (10) und (11) folgt (9).

Hilfssatz IV. *Ist $F(x)$ eine Funktion P_n, die nur die endlich vielen Werte $a_1<a_2<\dots<a_l$ annimmt, so gibt es eine Darstellung* (1), *bei der $x=\varphi(t)$ eine stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und $\psi(t)$ eine Funktion C_{n-1} ist, für die $a_1\leqslant\psi(t)\leqslant a_l$ gilt.*

Die Funktion $\varphi(t)$ kann hiebei, unabhängig von $F(x)$, für alles Folgende ein für allemal festgesetzt werden.

Beweis. Die Mengen $A_\nu=\underset{x}{E}[F(x)\geqslant a_\nu]$ $(\nu=1,2,\dots,l)$ sind Mengen P_n und es gilt

(12) $$A_1\supset A_2\supset\dots\supset A_l.$$

Es gibt eine stetige Abbildung $x=\varphi(t)$ des Baireschen Nullraumes auf sich, welche das System aller Mengen C_{n-1} auf das System aller Mengen P_n überführt (für alle n) [3].

Seien nun $B_1,B_2,\dots,B_l$, solche Mengen C_{n-1}, für die gilt:

(13) $$\varphi(B_\nu)=A_\nu \qquad (\nu=1,2,\dots,l).$$

Es sei:

(14) $$\bar B_\nu=B_\nu-(B_{\nu+1}+\dots+B_l) \qquad (\nu=1,2,\dots,l-1),$$
$$\bar B_l=B_l.$$

[3]) N. Lusin. *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris 1930, S. 275.

Es ist wegen (13):

(15) $$\varphi(\bar B_\nu)\supset A_\nu-A_{\nu+1} \qquad (\nu=1,2,\dots,l-1),$$
$$\varphi(\bar B_l)=A_l.$$

Die Funktion $\psi(t)$ wird folgendermassen definiert:

(16) $$\psi(t)=\begin{cases} a_\nu & \text{für } t\,\epsilon\,\bar B_\nu \\ a_1 & \text{für alle übrigen } t\end{cases} \qquad (\nu=1,2,\dots,l).$$

Es gilt $a_1\leqslant\psi(t)\leqslant a_l$. Zu einem beliebig vorgegebenen c gibt es ein a_r, so dass

$$\underset{t}{E}[\psi(t)>c]=\underset{t}{E}[\psi(t)>a_r]=\bar B_{r+1}+\dots+\bar B_l=B_{r+1}+\dots+B_l \quad \text{für} \quad r<l,$$

und

$$\underset{t}{E}[\psi(t)>c]=0 \quad \text{für} \quad r=l.$$

Die Menge $B_{r+1}+\dots+B_l$ ist eine Menge C_{n-1}, somit $\psi(t)$ eine Funktion C_{n-1}.

Es ist $F(x)=\sup\{\psi[\varphi^{-1}(x)]\}$. Denn ist x_0 ein beliebiger Punkt und $F(x_0)=a_r$, so ist

(17) $$x_0\,\epsilon\,A_r-A_{r+1}$$

$(A_{l+1}=0)$. Es gibt wegen (15) und (16) ein $t_0\,\epsilon\,\bar B_r$, so dass $\varphi(t_0)=x_0$ und $\psi(t_0)=a_r$. Daher ist

(18) $$\sup\{\psi[\varphi^{-1}(x_0)]\}\geqslant a_r.$$

Anderseits ist wegen (16), (14) und (12)

$$\varphi\{\underset{t}{E}[\psi(t)>a_r]\}=\varphi(\bar B_{r+1}+\dots+\bar B_l)=\varphi(B_{r+1}+\dots+B_l)=A_{r+1}$$

und da nach (17) $x_0 \operatorname{non}\epsilon\, A_{r+1}$, ist $\psi(t)\leqslant a_r$ für alle $t\,\epsilon\,\varphi^{-1}(x_0)$, woraus

(19) $$\sup\{\psi[\varphi^{-1}(x_0)]\}\leqslant a_r$$

folgt. Aus (18) und (19) folgt $\sup\{\psi[\varphi^{-1}(x_0)]\}=a_r=F(x_0)$.

Hilfssatz V. *Ist $F(x)$ eine Funktion P_n, für die $-1\leqslant F(x)\leqslant 1$ gilt, so gibt es eine Darstellung* (1), *bei der $x=\varphi(t)$ eine stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und $\psi(t)$ eine Funktion C_{n-1} ist, für die $-1\leqslant\psi(t)\leqslant 1$ gilt.*

Beweis. Es sei

$$A_{m,r}=\underset{x}{E}[F(x)\geqslant r/2^m] \qquad (m=1,2,\dots;\ \ r=0,\pm1,\pm2,\dots,\pm2^m).$$

Die Mengen $A_{m,r}$ sind, wie aus der Formel

$$\underset{x}{E}[F(x)\geqslant r/2^m]=\prod_{\nu=1}\underset{x}{E}[F(x)>(r/2^m)-(1/\nu)]$$

ersichtlich [2]), Mengen P_n. Die Folge $\{F_m(x)\}$ wird folgendermassen definiert:

$$F_m(x)=r/2^m \quad \text{für} \quad x\in A_{m,r}-A_{m,r+1} \quad (A_{m,2^m+1}=0).$$

Aus $\underset{x}{E}[F_m(x)\geqslant r/2^m]=\underset{x}{E}[F(x)\geqslant r/2^m]$ ist ersichtlich, dass die Funktionen $F_m(x)$ Funktionen P_n sind. Aus der Definition von $F_m(x)$ folgt, dass die Folge $\{F_m(x)\}$ monoton wachsend ist und dass

(20) $$F(x)=\lim_{m=\infty}F_m(x).$$

Nach Hilfssatz IV gibt es zu jeder Funktion $F_m(x)$ eine Darstellung

(21) $$F(x)=\sup\{\psi_m[\varphi^{-1}(x)]\},$$

bei der $x=\varphi(t)$ die schon betrachtete stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und $\psi_m(t)$ eine Funktion C_{n-1} ist, für die $-1\leqslant\psi_m(t)\leqslant 1$ gilt. Es sei

(22) $$\overline{\psi}_1(t)=\psi_1(t),\qquad \overline{\psi}_2(t)=\max[\overline{\psi}_2(t),\psi_1(t)],\quad \ldots\ldots,$$
$$\overline{\psi}_m(t)=\max[\psi_m(t),\overline{\psi}_{m-1}(t)],\quad \ldots$$

Aus der Formel

$$\underset{t}{E}[\overline{\psi}_m(t)>c]=\underset{t}{E}[\psi_m(t)>c]+\underset{t}{E}[\overline{\psi}_{m-1}(t)>c]$$

ist ersichtlich, dass die Funktionen $\overline{\psi}_m(t)$ Funktionen C_{n-1} sind. Es ist $-1\leqslant\psi_m(t)\leqslant 1$ und die Folge $\{\overline{\psi}_m(t)\}$ monoton wachsend. Da die Folge $\{F_m(x)\}$ monoton wachsend ist, gilt wegen (21) und (22) $F_m(x)=\sup\{\overline{\psi}_m[\varphi^{-1}(x)]\}$. Es sei $\psi(t)=\lim_{m=\infty}\overline{\psi}_m(t)$. Es gilt $-1\leqslant\psi(t)\leqslant 1$. Nach Hilfssatz III ist $\lim_{m=\infty}F_m(x)=\sup\{\psi[\varphi^{-1}(x)]\}$, somit wegen (20) $F(x)=\sup\{\psi[\varphi^{-1}(x)]\}$. Aus der Formel

$$\underset{t}{E}[\psi(t)>c]=\sum_{m=1}^{\infty}\underset{t}{E}[\overline{\psi}_m(t)>c]$$

ist ersichtlich, dass $\psi(t)$ eine Funktion C_{n-1} ist.

Hilfssatz VI. *Ist $F(x)$ eine Funktion P_n (bzw. C_n), so gibt es eine Darstellung* (1) (bzw. (2)), *bei der $x=\varphi(t)$ eine stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und $\psi(t)$ eine Funktion C_{n-1}* (bzw. P_{n-1}) *ist.*

Beweis. Mit $S(a)$ werde die Schränkungstransformation bezeichnet. Es sei also:

$$S(a)=\frac{a}{1+|a|} \quad \text{für} \quad -\infty<a<\infty,\quad S(\infty)=1,\quad S(-\infty)=-1.$$

$F(x)$ sei eine Funktion P_n. Aus der Formel

$$\underset{x}{E}[F(x)>c]=\underset{x}{E}[S[F(x)]>S(c)]$$

ist ersichtlich, dass auch $S[F(x)]$ eine Funktion P_n ist. Es gilt $-1\leqslant S(F(x))\leqslant 1$. Für die Funktion $S[F(x)]$ gibt es nach Hilfssatz V eine Darstellung

(23) $$S[F(x)]=\sup\{\overline{\psi}[\varphi^{-1}(x)]\},$$

bei der $x=\varphi(t)$ eine stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und $\overline{\psi}(t)$ eine Funktion C_{n-1} ist, für die $-1\leqslant\overline{\psi}(t)\leqslant 1$ gilt. Wird $\psi(t)=S^{-1}[\overline{\psi}(t)]$ gesetzt, so ist auch $\psi(t)$ eine Funktion C_{n-1} und (23) liefert die Darstellung (1).

Ist $F(x)$ eine Funktion C_n, so ist $\underset{x}{E}[F(x)<-c]$ eine Menge P_n und aus der Formel

$$\underset{x}{E}[F(x)<-c]=\underset{x}{E}[-F(x)>c]$$

ist ersichtlich, dass $-F(x)$ eine Funktion P_n ist. Nach dem eben Bewiesenen gibt es eine Darstellung

(24) $$-F(x)=\sup\{\overline{\psi}[\varphi^{-1}(x)]\},$$

bei der $x=\varphi(t)$ eine stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und $\overline{\psi}(t)$ eine Funktion C_{n-1} ist. Wird $\psi(t)=-\overline{\psi}(t)$ gesetzt, so ist $\psi(t)$ eine Funktion P_{n-1} und die Darstellung (2) entsteht.

Satz II. *Jede Funktion P_n* (bzw. C_n) *ist eine Funktion g^n* (bzw. g_n).

Beweis. Für $n=1$ ist der Satz richtig, wie aus dem Hilfssatz VI für $n=1$ und aus der Definition der Funktionen g^1 und g_1 ersichtlich ist. Angenommen, der Satz ist für $n-1$ $(n\geqslant 2)$ richtig. Nach Hilfssatz VI gibt es eine $F(x)$ sei eine Funktion P_n (bzw. C_n). Nach Hilfssatz VI gibt es eine Darstellung (1) (bzw. (2)), bei der $x=\varphi(t)$ eine stetige Abbildung des Baireschen Nullraumes auf sich und $\psi(t)$ eine Funktion C_{n-1}

(bzw. P_{n-1}) ist. Da nach Annahme Satz II für $n-1$ richtig ist, ist $\psi(t)$ eine Funktion g_{n-1} (bzw. g^{n-1}) und somit $F(x)$ eine Funktion g^n (bzw. g_n). Satz II ist daher auch für n richtig.

Aus Satz I und II folgt

Satz III. *Die Funktionen B_n sind mit den Funktionen g_n^n identisch.*

Für $n=1$ folgt

Satz IV. *Die Baireschen Funktionen sind mit den Funktionen g_1^1 identisch.*

3. In diesem Abschnitt wird eine Anwendung der Theoreme von N. Lusin[4]) und P. Novikoff[5]) gegeben.

Hilfssatz VII. *Ist $f(x)$ eine Funktion C_1* (bzw. P_2), *$g(x)$ eine Funktion P_1* (bzw. C_2), *ist ferner*

$$f(x) \geqslant g(x) \tag{25}$$

und nimmt sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ nur endlich viele Werte an, so gibt es eine Bairesche Funktion (bzw. *Funktion B_2*) *$h(x)$, so dass*

$$f(x) \geqslant h(x) \geqslant g(x). \tag{26}$$

Beweis. Sämtliche Werte, die von $f(x)$ oder $g(x)$ angenommen werden, seien

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_l. \tag{27}$$

Die Mengen:

$$\underset{x}{E}[g(x) \geqslant a_r], \qquad \underset{x}{E}[f(x) < a_r] \qquad (r=1,2,\ldots,l)$$

sind Mengen P_1 (bzw. C_2) und wegen (25) ist

$$\underset{x}{E}[g(x) \geqslant a_r] \cdot \underset{x}{E}[f(x) < a_r] = 0.$$

Es lassen sich nach dem Theorem von Lusin[4]) (bzw. Novikoff[5])) l Mengen A_r $(r=1,2,\ldots,l)$, die Borelsche (bzw. B_2) Mengen sind, finden, so dass:

$$A_r \supset \underset{x}{E}[g(x) \geqslant a_r], \qquad A_r \cdot \underset{x}{E}[f(x) < a_r] = 0. \tag{28}$$

A_l ist also, nach (27), der Bairesche Nullraum.

---

[4]) Vgl. C. Kuratowski, l. cit., S. 249.

[5]) P. Novikoff, Fund. Math. **25** (1935), S. 464, Th. I.

Es sei:

$$\bar{A}_1 = A_1, \quad \bar{A}_r = A_r - (A_1 + A_2 + \ldots + A_{r-1}) \quad (r=2,3,\ldots,l). \tag{29}$$

Die Mengen $\bar{A}_r$ $(r=1,2,\ldots,l)$ sind Borelsche (bzw. B_2-) Mengen und nach (29) ist

$$\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \ldots + \bar{A}_l = A_l.$$

Die Funktion $h(x)$ werde wie folgt definiert

$$h(x) = a_r \quad \text{für} \quad x \in \bar{A}_r \qquad (r=1,2,\ldots,l). \tag{30}$$

$h(x)$ ist eine Bairesche Funktion (bzw. Funktion B_2). Es ist noch zu zeigen, dass (26) gilt. Sei x_0 ein beliebiger Punkt und

$$h(x_0) = a_r \qquad (r=1,2,\ldots,l). \tag{31}$$

Aus (30) und (29) folgt $x_0 \in A_r$ und wegen (28) ist

$$x_0 \operatorname{non} \in \underset{x}{E}[f(x) < a_r];$$

somit ist $f(x_0) \geqslant a_r$ und wegen (31)

$$f(x_0) \geqslant h(x_0). \tag{32}$$

Wenn $h(x_0) = a_1$, ist wegen (27) die Beziehung

$$h(x_0) \geqslant g(x_0) \tag{33}$$

evident. Wenn $h(x_0) = a_r$ $(r=2,3,\ldots,l)$, ist $x_0 \in \bar{A}_r$, wegen (29) $x_0 \operatorname{non} \in A_{r-1}$ und wegen (28) $x_0 \operatorname{non} \in \underset{x}{E}[g(x) \geqslant a_{r-1}]$; somit ist wegen (27) $g(x_0) \leqslant a_r$, woraus (33) folgt. Aus (32) und (33) folgt (26).

Hilfssatz VIII. *Ist $f(x)$ eine Funktion C_1* (bzw. P_2), *$g(x)$ eine Funktion P_1* (bzw. C_2), *ist ferner $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $-1 \leqslant g(x) \leqslant 1$ und*

$$f(x) \geqslant g(x), \tag{34}$$

so gibt es eine Bairesche Funktion (bzw. *Funktion B_2*) *$h(x)$, so dass*

$$f(x) \geqslant h(x) \geqslant g(x).$$

Beweis. Es sei n eine natürliche Zahl und:

$$\left.\begin{aligned} A_r^n &= \underset{x}{E}[r/n \geqslant f(x) > (r-1)/n] \\ B_r^n &= \underset{x}{E}[r/n > g(x) \geqslant (r-1)/n] \end{aligned}\right\} \quad (r=0, \pm 1, \ldots, \pm(n+1));$$

$$f_n(x) = r/n \quad \text{für} \quad x \in A_r^n, \qquad g_n(x) = (r-1)/n \quad \text{für} \quad x \in B_r^n.$$

Es gilt:

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) < 1/n, \qquad 0 \leqslant g(x) - g_n(x) < 1/n. \tag{35}$$

$f_n(x)$ ist eine Funktion C_1 (bzw. P_2), $g_n(x)$ eine Funktion P_1 (bzw. C_2). Es ist wegen (34) und (35) $f_n(x) \geqslant g_n(x)$, wobei $f_n(x)$ und $g_n(x)$ annehmen nur endlich viele verschiedene Werte.

Nach Hilfssatz VII gibt es zu jedem n eine Bairesche Funktion (bzw. Funktion B_2) $h_n(x)$, so dass

$$f_n(x) \geqslant h_n(x) \geqslant g_n(x). \tag{36}$$

Es sei $h(x) = \overline{\lim\limits_{n=\infty}}\, h(x)$. Diese Funktion erfüllt die geforderten Bedingungen. Sie ist, wie leicht ersichtlich, eine Bairesche Funktion (bzw. Funktion B_2). Wegen (36) ist $\overline{\lim\limits_{n=\infty}}\, f_n(x) \geqslant \overline{\lim\limits_{n=\infty}}\, h_n(x) \geqslant \overline{\lim\limits_{n=\infty}}\, g_n(x)$ und somit wegen (35) $f(x) \geqslant h(x) \geqslant g(x)$.

Satz V. *Ist $f(x)$ eine Funktion C_1* (bzw. P_2), *$g(x)$ eine Funktion P_1* (bzw. C_2), *und ist $f(x) \geqslant g(x)$, so gibt es eine Bairesche Funktion* (bzw. *Funktion B_2*) *$h(x)$, so dass $f(x) \geqslant h(x) \geqslant g(x)$.*

Beweis. Die Funktionen $S[f(x)]$ und $S[g(x)]$ genügen den Voraussetzungen des Hilfssatzes VIII. Es gibt somit eine Bairesche Funktion (bzw. Funktion B_2) $h'(x)$, so dass $S[f(x)] \geqslant h'(x) \geqslant S[g(x)]$. Die Funktion $h(x) = S^{-1}[h'(x)]$ ist die gewünschte Funktion.

4. In diesem Abschnitt wird die Wertmenge [6]) einer projektiven Funktion untersucht.

Satz VI. *Die Wertmenge einer endlichen Funktion P_n* (bzw. C_n) *ist eine Menge P_{n+1}.*

Beweis. Mit R_0 werde der Bairesche Nullraum, mit R_1 der Raum der reellen Zahlen bezeichnet. Sei $f(x)$ eine Funktion P_n (bzw. C_n). Ich betrachte zunächst die Menge $\underset{xy}{E}[f(x)=y]$, die in $R_0 \times R_1$ enthalten ist. Wenn $\{r_n\}$ eine Folge aller rationalen Zahlen bedeutet, so gilt

$$\begin{gathered} R_0 \times R_1 - \underset{xy}{E}[f(x)=y] = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \{\underset{x}{E}[r_n < f(x)] \times \underset{y}{E}[y < r_n]\} + \sum_{n=1}^{\infty} \{\underset{x}{E}[r_n > f(x)] \times \underset{y}{E}[y > r_n]\}. \end{gathered} \tag{37}$$

[6]) Unter der *Wertmenge* einer Funktion f wird die Menge aller Zahlen $f(x)$ verstanden.

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Menge ist die Summe einer Menge P_n und einer Menge C_n; daher ist ihr Komplement — die Menge $\underset{xy}{E}[f(x)=y]$ — der Durchschnitt einer Menge P_n und einer Menge C_n, somit eine Menge P_{n+1}. Die Wertmenge der Funktion $f(x)$ ist die Projektion von $\underset{xy}{E}[f(x)=y]$ auf die y-Achse, somit eine Menge P_{n+1}.

Satz VII. *Jede nicht leere Menge B des R_1, die eine Menge P_{n+1} ist, ist die Wertmenge einer Funktion P_n* (bzw. C_n).

Beweis. Ich führe den Beweis zunächst für den Fall, dass die Menge B nach oben beschränkt ist und $b = \sup B$ der Menge B angehört. Es gibt eine Menge A des R_0, die eine Menge C_n ist, und eine auf A definierte stetige Funktion $h(x)$, so dass $B = h(A)$. Nun wird die Funktion $f(x)$, die das Erforderliche leistet, wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{für } x \in A \\ b & \text{für alle übrigen } x. \end{cases}$$

Die Wertmenge von $f(x)$ ist B. Es ist noch zu zeigen, dass $f(x)$ eine Funktion P_n ist. Wenn $c < b$, ist $\underset{x}{E}[f(x) \leqslant c] = \underset{x}{E}[h(x) \leqslant c]$. Die rechts stehende Menge ist abgeschlossen in A, daher eine Menge C_n; somit ist $\underset{x}{E}[f(x) > c]$ für $c < b$ eine Menge P_n. Für $c \geqslant b$ ist $\underset{x}{E} f[(x) > c] = 0$.

Nun sei die Menge B nach oben nicht beschränkt oder sie enthalte ihre obere Schranke nicht. Es gibt in B eine wachsende Folge von Zahlen $\{b_\nu\}$, so dass, wenn B_ν die Menge aller $y \in B$ mit $y \leqslant b_\nu$ bedeutet, $B = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} B_\nu$ gilt; es ist $b_\nu = \sup B_\nu$ und $b_\nu \in B_\nu$. Bezeichnet man mit $R_{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ die Punkte des Raumes R_0, die durch mit ν beginnende Folgen natürlicher Zahlen dargestellt werden, so ist $R_0 = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} R_{(\nu)}$ und es ist $R_{(\nu)}$ mit R_0 homöomorph. Wie eben gezeigt, gibt es eine in R_0 definierte Funktion, die eine Funktion P_n und deren Wertmenge B_ν ist. Da $R_{(\nu)}$ mit R_0 homöomorph ist, gibt es auch eine Funktion $f_\nu(x)$, die in $R_{(\nu)}$ definiert, eine Funktion P_n und deren Wertmenge B_ν ist. Die Funktion $f(x) = f_\nu(x)$ für $x \in R_{(\nu)}$ leistet, wie leicht ersichtlich, das Gewünschte.

Um nun zu zeigen, dass die Punktmenge B auch die Wertmenge einer Funktion C_n ist, werde die Punktmenge B', die man erhält, wenn man B am Nullpunkt spiegelt, betrachtet. B' ist eine Punktmenge P_{n+1}. Nach dem eben Bewiesenen gibt es eine Funktion $f'(x)$, die eine Funktion P_n und deren Wertmenge B' ist. Setzt man $f(x) = -f'(x)$, so ist $f(x)$ eine Funktion C_n, deren Wertmenge B ist.

Satz VIII. *Die Wertmenge einer endlichen Funktion B_n ist eine Menge P_n.*

Beweis. Sei $f(x)$ eine Funktion B_n. Die auf der rechten Seite der Formel (37) stehende Menge ist eine Menge B_n, daher ist ihr Komplement — die Menge $\underset{xy}{E}[f(x)=y]$ — ebenfalls eine Menge B_n. Die Wertmenge der Funktion $f(x)$ ist als Projektion einer Menge B_n eine Menge P_n.

Satz IX. *Jede nicht leere Menge B des R_1, die eine Menge P_n ist, ist die Wertmenge einer Funktion B_n.*

Beweis. Nach Satz VIII gibt es eine Funktion, die eine Funktion P_{n-1} und deren Wertmenge B ist. Da jede Funktion P_{n-1} eine Funktion B_n ist, ist Satz IX bewiesen.

Ideale in vollständigen Mengenkörpern. I.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

Ein additives und subtraktives (d. h. in Bezug auf die Addition und Subtraktion abgeschlossenes) Mengensystem heißt bekanntlich Mengenkörper oder einfach Körper; ein Körper, der aus allen Teilmengen einer gegebenen Menge besteht, wird hier vollständig genannt. Als Ideal in einem gegebenen Körper bezeichnen wir jedes nicht-leere, erbliche und additive Teilsystem dieses Körpers.

Auf wichtige Beispiele von Idealen stößt man sowohl in der allgemeinen Mengenlehre selbst als auch in verschiedenen ihrer Anwendungen, insbesondere in der Theorie des Maßes und in der Topologie. So z. B. kann in jedem Körper das Ideal aller endlichen bzw. höchstens abzählbaren Mengen dieses Körpers ausgezeichnet werden; die Mengen vom (Peano-Jordanschen oder Lebesgueschen) Maße 0 bilden ein Ideal in dem Körper der meßbaren Mengen; die nirgendsdichten Mengen bzw. die Mengen erster Kategorie eines topologischen Raumes bilden ein Ideal im vollständigen Körper, der aus allen Mengen dieses Raumes besteht.

Auch unabhängig von den Anwendungen drängt sich der Begriff des Ideals in den Vordergrund, wenn man die Theorie der Mengenkörper als eine Realisierung der formalen Booleschen Algebra betrachtet und diese letztere als einen Teil der allgemeinen abstrakten Algebra auffaßt [1]); die hervorragende Rolle des Begriffs des Ideals in den modernen algebraischen Untersuchungen ist ja eine wohl bekannte Tatsache.

[1]) Vgl. M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc. **40** (1936), S. 37 ff. (wo auch weitere Litteratur angegeben wird); A. Tarski, Ann. Soc. Pol. Math. **15** (1937), S. 186 ff.