Sur un ensemble à propriété λ.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

En utilisant l'axiome du choix, mais sans faire appel à l'hypothèse du continu, M. F. Rothberger a établi récemment[1]) l'existence d'un ensemble linéaire jouissant de la propriété λ, mais qui la perd lorsqu'on ajoute à lui l'ensemble $\mathcal{R}$ de tous les nombres rationnels.

Le but de cette Note est d'obtenir un tel ensemble linéaire par une simple modification de l'ensemble envisagé en 1917 par M. N. Lusin et qui lui a servi pour établir, sans faire appel à l'hypothèse du continu, l'existence d'un ensemble linéaire toujours de I-e catégorie[2]).

x étant un nombre irrationnel de l'intervalle $I=\langle 0,1\rangle$, soit

$$x=\frac{1|}{|a_1(x)}+\frac{1|}{|a_2(x)}+\ldots \tag{1}$$

son développement en fraction continue.

x et y étant deux nombres irrationnels de I, convenons d'écrire $x\prec y$ s'il existe un indice p, tel que $a_n(x)<a_n(y)$ pour $n\geqslant p$. La relation $\prec$ est évidemment asymétrique et transitive; l'ensemble $\mathcal{N}$ de tous les nombres irrationnels de I devient partiellement ordonné par la relation $\prec$.

Soit

$$x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi) \tag{2}$$

une suite transfinie (de type φ) formée de tous les nombres de $\mathcal{N}$ (et dont l'existence résulte, comme on sait, de l'axiome du choix).

---

[1]) voir ce volume, p. 294–300.

[2]) Fund. Math. 2 (1921), p. 155.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie de nombres irrationnels

$$y_1, y_2, \ldots, y_\omega, y_{\omega+1}, \ldots, y_\xi, \ldots \qquad (\xi<\vartheta) \tag{3}$$

comme il suit.

Posons $y_1=x_1$ et soit $\alpha>1$ un nombre ordinal donné. S'il existe des nombres x_λ de la suite (2) tels que $y_\xi\prec x_\lambda$ pour $\xi<\alpha$, nous définirons y_α comme le premier d'entre eux. Si de tels nombres x_λ n'existent pas dans la suite (2), la définition de la suite (3) sera considérée comme achevée et la suite sera alors de type $\vartheta=\alpha$.

Soit E l'ensemble de tous les termes de la suite (3) ainsi définie. Je dis que *l'ensemble E jouit de la propriété λ et que l'ensemble $E+\mathcal{R}$ n'en jouit pas.*

Je vais prouver d'abord que ϑ est un nombre ordinal de seconde espèce, non confinal avec ω.

Si (1) est un nombre de $\mathcal{N}$ et si l'on pose

$$x'=\frac{1|}{|a_1(x)+1}+\frac{1|}{|a_2(x)+1}+\ldots,$$

on aura évidemment $x\prec x'$. Il en résulte que ϑ est un nombre ordinal de seconde espèce.

Soit maintenant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ une suite infinie de nombres ordinaux $<\vartheta$. Posons:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n} a_n(y_{\alpha_k}), \qquad y=\frac{1|}{|b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\ldots$$

On a alors, comme on voit sans peine, $y_{\alpha_k}\prec y$ pour $k=1,2,\ldots$

Vu la définition de la suite transfinie (3), il en résulte qu'il existe un nombre ordinal $\alpha<\vartheta$, tel que $\alpha_k<\alpha$ pour $k=1,2,\ldots$ Cela prouve que le nombre ϑ n'est pas confinal avec ω.

On a donc $\vartheta\geqslant\Omega$ et l'ensemble E est indénombrable.

Lemme 1. *Quel que soit le nombre x_0 de $\mathcal{N}$, l'ensemble $Q=\underset{x}{\mathrm{E}}[x\in\mathcal{N},\, x \text{ non} \prec x_0]$ est un G_δ.*

Démonstration. Soit $x_0\in\mathcal{N}$. Il résulte des propriétés connues des fractions continues que les ensembles

$$Q_n=\underset{x}{\mathrm{E}}[x\in\mathcal{N},\, a_n(x)\leqslant a_n(x_0)]$$

sont ouverts dans $\mathcal{N}$. Or, vue la définition de la relation $\prec$, on trouve sans peine

$$Q=\overline{\lim_n}\, Q_n=\prod_{n=1}^{\infty}(Q_n+Q_{n+1}+\dots).$$

Les ensembles Q_n, donc aussi les ensembles $Q_n+Q_{n+1}+\dots$, étant pour $n=1,2,\dots$ ouverts dans $\mathcal{N}$, l'ensemble Q est un G_δ relativement à $\mathcal{N}$, donc, $\mathcal{N}$ étant un G_δ, Q est un G_δ, c. q. f. d.

On démontre pareillement le

Lemme 2. *Quel que soit le nombre $x_0\epsilon\mathcal{N}$, l'ensemble*

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[x\epsilon\mathcal{N}, x_0 \text{ non} \prec x]$$

est un G_δ.

Corollaire 1. *Etant donné un nombre ordinal quelconque $\alpha<\vartheta$, les ensembles $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\xi\leqslant\alpha]$ et $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\xi<\alpha]$ sont à la fois des F_σ et des G_δ relativement à E.*

Démonstration. Soit $\xi<\alpha<\vartheta$. D'après la définition de la suite transfinie (3), on trouve sans peine

$$\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\xi\leqslant\alpha]=E\cdot\underset{x}{\mathrm{E}}[x\epsilon\mathcal{N}, y_\alpha \text{ non} \prec x].$$

Or, d'après le lemme 2, l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[x\epsilon\mathcal{N}, y_\alpha \text{ non} \prec x]$ est un G_δ: l'ensemble $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\xi\leqslant\alpha]$ est donc un G_δ relativement à E, de même que l'ensemble $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\xi<\alpha]$.

D'autre part on trouve:

$$\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha\leqslant\xi]=E\cdot\underset{x}{\mathrm{E}}[x\epsilon\mathcal{N}, x \text{ non} \prec y_\alpha]$$

et on en conclut d'après le lemme 1 que l'ensemble $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha\leqslant\xi]$, donc aussi l'ensemble $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha<\xi]$, est un G_δ relativement à E. L'ensemble $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\xi\leqslant\alpha]=E-\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha<\xi]$ est donc un F_σ relativement à E, de même que l'ensemble $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\xi<\alpha]$, c. q. f. d.

On déduit du cor. 1 ce

Corollaire 2. *Si $\alpha<\beta<\vartheta$, les ensembles $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha<\xi<\beta]$ et $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha\leqslant\xi<\beta]$ sont des F_σ relativement à E.*

En effet, on a $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha<\xi<\beta]=\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha<\xi]\cdot\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\xi<\beta]$ et le produit de deux ensembles F_σ relativement à E est un F_σ relativement à E.

Nous allons maintenant démontrer que l'ensemble E jouit de la propriété λ.

Soit $D=(y_{\alpha_2}, y_{\alpha_3},\dots)$ un sous-ensemble dénombrable de E, où $\alpha_2,\alpha_3,\dots$ est une suite infinie de nombres ordinaux $<\vartheta$. Comme nous savons, il existe un nombre ordinal $\alpha_1<\vartheta$ tel que $\alpha_n<\alpha_1$ pour $n=1,2,\dots$

Soit n un nombre naturel donné. Si α_n est le plus petit nombre de la suite

$$\alpha_1,\alpha_2,\dots, \tag{4}$$

posons $H_n=\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\xi<\alpha_n]$. S'il existe des nombres de la suite (4) qui sont $<\alpha_n$, il existe évidemment le plus petit nombre ordinal α_n' tel que l'on ait $\alpha_n'\geqslant\alpha_k$ pour tous les k pour lesquels on a $\alpha_k<\alpha_n$; on a alors $\alpha_n'\leqslant\alpha_n$. Si un tel α_n' figure, lui aussi, dans la suite (4), posons $H_n=\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha_n'<\xi<\alpha_n]$; en cas contraire, soit $H_n=\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha_n'\leqslant\xi<\alpha_n]$.

Il résulte des corollaires 1 et 2 que l'ensemble H_n est un F_σ relativement à E (ou vide). Or, on voit sans peine que

$$D=\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\xi<\alpha_1]-\sum_{n=1}^{\infty}H_n. \tag{5}$$

Les ensembles $H_n (n=1,2,\dots)$ étant des F_σ relativement à E et l'ensemble $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\xi<\alpha_1]$ étant (d'après le cor. 1) un G_δ relativement à E, il résulte de (5) que D est un G_δ relativement à E.

Ainsi l'ensemble E jouit de la propriété λ.

Soit maintenant U un ensemble linéaire ouvert contenant l'ensemble $\mathcal{R}$ de tous les nombres rationnels. D'après un lemme que j'ai démontré antérieurement [1]), il existe un $x_0\epsilon\mathcal{N}$, tel que U contient tout $x\epsilon\mathcal{N}$ pour lequel il existe au moins un i naturel tel que $a_i(x)\geqslant a_i(x_0)$.

[1]) Ce volume, p. 303.

Vu la définition de la suite transfinie (3), on ne peut pas avoir $y_\xi \prec x_0$ pour $\xi < \vartheta$. Il existe donc un nombre ordinal $\alpha < \vartheta$ tel que y_α non $\prec x_0$. On a donc à plus forte raison y_ξ *non* $\prec x_0$ pour $\alpha < \xi < \vartheta$ (puisque $y_\alpha \prec y_\xi$ pour $\alpha < \xi < \vartheta$).

Soit ξ un nombre ordinal tel que $\alpha \leqslant \xi < \vartheta$. On a donc y_ξ *non* $\prec x_0$ et, vu la définition de la relation $\prec$, il existe un undice i tel que $a_i(y_\xi) \geqslant a_i(x_0)$, d'où $y_\xi \epsilon U$ en vertu du lemme précité. On a donc $y_\xi \epsilon U$ pour $\alpha \leqslant \xi < \vartheta$, c. à d. $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha \leqslant \xi] \subset U$. Nous avons ainsi démontré qu'il existe pour tout ensemble ouvert $U \subset \mathcal{R}$ un nombre ordinal $\alpha < \vartheta$ tel que $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha \leqslant \xi] \subset U$.

Soit maintenant Γ un G_δ linéaire quelconque contenant $\mathcal{R}$. Il existe donc une suite infinie $U_1, U_2, \ldots$ d'ensembles ouverts telle que

$$\Gamma = U_1 U_2 \ldots \tag{6}$$

D'après $\Gamma \subset \mathcal{R}$ et (6), on a $U_n \subset \mathcal{R}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et, comme nous venons de démontrer, il existe pour tout n naturel un nombre ordinal $\alpha_n < \vartheta$ tel que

$$\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha_n \leqslant \xi] \subset U_n. \tag{7}$$

Comme nous savons, il existe un nombre ordinal $\alpha < \vartheta$, tel que $\alpha > \alpha_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Nous avons donc

$$\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha < \xi] \subset \underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha_n \leqslant \xi] \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

ce qui donne d'après (7) et (6) $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha < \xi] \subset \Gamma$.

Or, le nombre ordinal ϑ étant, comme nous savons, non confinal avec ω, l'ensemble $\underset{y_\xi}{\mathrm{E}}[\alpha < \xi]$ est indénombrable. L'ensemble $E\Gamma$ est donc indénombrable. Ceci étant vrai pour tout ensemble Γ qui est un G_δ contenant $\mathcal{R}$, nous concluons que l'ensemble $\mathcal{R}$ n'est pas un G_δ relativement à $E + \mathcal{R}$.

Ainsi l'ensemble $E + \mathcal{R}$ ne jouit pas de la propriété λ.

Some Methods of Proving Measurability.

By

H. D. Ursell (Leeds).

1. The present paper is part of an attempt to systematise as far as possible the cases in which we can say that a function is measurable (B) or measurable (L). The limit-processes used in elementary analysis can be divided into *sequence* limiting processes, e. g. $\underset{(n)}{\text{u. bd.}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}$ and *continuum* limiting processes, e. g. $\underset{(x)}{\text{u. bd.}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}$.

In elementary analysis there is an exact parallelism between the two kinds of limit process. But in the more advanced parts of analysis, in which not every function is continuous, this parallelism breaks down.

A sequence limiting process preserves measurability (B) but a continuum limiting process may destroy it. For instance, Neubauer has shown[1]) that the partial derivatives of a function measurable (B) are not themselves necessarily measurable (B).

A sequence limiting process preserves measurability (L) but a continuum limiting process may destroy it. For instance the formula

$$F(x) = \underset{(y)}{\text{upper bound}}\, f(x, y) \tag{1}$$

may produce a non-measurable function $F(x)$ from a measurable function $f(x, y)$: or from a null-function $f(x, y)$, i. e. from a function $f(x, y) = 0$ almost everywhere, it may produce a function $F(x)$ which even if measurable need not be a null function. In fact we can form

[1]) M. Neubauer, Monatshefte für Math. und Phys. **38** (1931), p. 139.