Démonstration. En effet, Ψ étant une telle famille, à savoir une famille assujettie aux conditions du lemme 1, ω_η est d'après (4) non confinal avec ω (ce qui est d'ailleurs évident); par conséquent toute sous-famille dénombrable de Ψ est contenue dans un segment de la suite transfinie des éléments de Ψ. Or, en vertu du lemme 4, tout segment de Ψ correspond à un G_δ relatif à $\nu(\Psi)$, et, en vertu de (3) et du théorème 1, ce G_δ jouit de la propriété λ (puisque λ' entraîne λ). Par conséquent tout sous-ensemble dénombrable de $\nu(\Psi)$ est un G_δ relatif à un G_δ relatif à $\nu(\Psi)$, donc lui-même un G_δ relatif à $\nu(\Psi)$. Ainsi $\nu(\Psi)$ jouit de la propriété λ.

D'autre part, puisque Ψ est non borné, il résulte du lemme 3 que $\mathcal{R}$ n'est pas un G_δ relatif à $\nu(\Psi)+\mathcal{R}$. Par conséquent $\nu(\Psi)+\mathcal{R}$ ne jouit pas de la propriété λ, c. q. f. d.

Corollaire 1. *Il existe un ensemble linéaire jouissant de la propriété λ, mais dépourvu de la propriété λ'.*

En conséquence, la propriété λ n'est pas une propriété additive.

L'ensemble $\nu(\Psi)+\mathcal{R}$, en tant que somme de deux ensembles toujours de première catégorie, est lui-même toujours de première catégorie. On a par conséquent ce

Corollaire 2. *Il existe un ensemble linéaire toujours de première catégorie, ne jouissant pas de la propriété λ.*

Sur les ensembles concentrés.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Nous dirons, d'après M. Besicovitch, qu'un ensemble linéaire indénombrable E est *concentré* s'il existe un ensemble linéaire dénombrable D (pas nécessairement contenu dans E), tel que pour tout ensemble linéaire ouvert U contenant D l'ensemble $E-U$ est au plus dénombrable. Dans ce cas, nous dirons aussi que l'ensemble E est *concentré par rapport à l'ensemble D.*

M. Besicovitch a déduit de l'hypothèse du continu la proposition $\boldsymbol{P}$ suivante [1]):

$\boldsymbol{P}$. *Il existe un ensemble linéaire concentré de puissance du continu.*

Or, j'ai démontré a l'aide de l'hypothèse du continu la proposition $\boldsymbol{Q}$ suivante [2]):

$\boldsymbol{Q}$. *Il existe une suite infinie convergente de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), \dots$ qui convergent non uniformément sur tout ensemble indénombrable.*

Le but de cette Note est de démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *les propositions $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont équivalentes.*

Commençons par établir l'implication $\boldsymbol{P}\rightarrow\boldsymbol{Q}$.

Soient E un ensemble linéaire concentré de puissance du continu et $D=(x_1, x_2, \dots)$ un ensemble dénombrable tel que $\overline{\overline{E-U}}\leqslant\aleph_0$ pour tout ensemble ouvert $U\supset D$.

---

[1]) A. S. Besicovitch, Acta Math. **62** (1934), p. 289.

[2]) C. R. Soc. Sc. Varsovie 1928, p. 84–87; voir aussi mon livre *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne **4** (Warszawa–Lwów 1934), p. 52, proposition C_9.

Posons $f(x_n)=1/n$ pour $n=1,2,...$ et $f(x)=0$ pour x *non* ϵD. La fonction $f(x)$ est évidemment semi-continue supérieurement (pour tous les x réels), continue pour x *non* ϵD et discontinue pour $x \epsilon D$. De plus, comme on voit sans peine, la fonction $f(x)$ est discontinue sur tout ensemble P tel que $PP'D \neq 0$.

En tant que semi-continue supérieurement, la fonction $f(x)$ est limite d'une suite monotone (non croissante) de fonctions continues $\{f_n(x)\}$.

Soit N un sous-ensemble indénombrable de E: je dis que la suite $\{f_n(x)\}$ converge non uniformément sur N. En effet, supposons qu'on ait sur N uniformément $\lim_{n=\infty} f_n(x)=f(x)$. Soit $\overline{N}=N+N'$ la fermeture de l'ensemble N. Les fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ étant continues, la suite $\{f_n(x)\}$ converge donc encore uniformément sur $\overline{N}$ et la fonction $f(x)=\lim_{n=\infty} f_n(x)$ est continue sur $\overline{N}$, d'où il résulte d'après la définition de la fonction $f(x)$ que $N'D=0$.

Posons $N_1=N-D$. C'est encore un sous-ensemble indénombrable de E est on a $\overline{N}_1D=0$.

Posons $U=C\overline{N}_1$. C'est un ensemble ouvert contenant D (puisque $CU\cdot D=\overline{N}_1D=0$). D'après la définition de E, nous aurons donc $\overline{\overline{E-U}}\leqslant\aleph_0$. Or, $E-U\supset N_1-U=N_1-C\overline{N}_1=N_1\overline{N}_1=N_1$, donc $E-U\supset N_1$, d'où $\overline{\overline{E-U}}\geqslant\overline{\overline{N}}_1>\aleph_0$, ce qui est une contradiction. La suite $\{f_n(x)\}$ ne peut donc converger uniformément sur N.

Nous avons ainsi démontré que la proposition $\boldsymbol{P}$ entraîne la proposition $\boldsymbol{Q}^*$ suivante:

$\boldsymbol{Q}^*$. *Il existe une suite infinie monotone $\{f_n(x)\}$ de fonctions continues d'une variable réelle qui converge vers 0 pour tous les x réels sauf ceux qui forment un ensemble dénombrable D, et il existe un ensemble E de puissance $2^{\aleph_0}$, tel que la suite $\{f_n(x)\}$ converge non uniformément sur tout sous-ensemble indénombrable de E.*

Or, l'ensemble E dont il s'agit dans la proposition $\boldsymbol{Q}^*$ étant de puissance du continu, il existe une fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle qui transforme d'une façon biunivoque l'ensemble X de tous les nombres réels en l'ensemble E. Posons, pour n naturels et x réels: $F_n(x)=f_n(\varphi(x))$, où f_n $(n=1,2,...)$ sont les fonctions dont il est question dans la proposition $\boldsymbol{Q}^*$. Il en résulte tout de suite que la suite $\{F_n(x)\}$ converge non uniformément sur tout ensemble linéaire indénombrable.

On a ainsi l'implication $\boldsymbol{Q}^*\to\boldsymbol{Q}$; comme $\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{Q}^*$, on a donc $\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{Q}$.

Admettons maintenant la proposition $\boldsymbol{Q}$. Soit $f(t)=\lim_{n=\infty} f_n(t)$ (pour t réels), où f_n $(n=1,2,...)$ sont des fonctions d'une variable réelle satisfaisant à la proposition $\boldsymbol{Q}$. Il existe, pour tout t réel et tout k naturel, un nombre naturel n tel que

$$|f_i(t)-f(t)|<1/k \qquad \text{pour} \quad i\geqslant n;$$

nous désignerons par $n_k(t)$ le plus petit des tels nombres n, c. à d. nous poserons

$$(1) \qquad n_k(t)=\text{borne inf.} \mathop{\mathrm{E}}_{n}[|f_i(t)-f(t)|<1/k \text{ pour } i\geqslant n].$$

Soit E l'ensemble de tous les nombres irrationnels

$$\frac{1|}{|n_1(t)}+\frac{1|}{|n_2(t)}+\frac{1|}{|n_3(t)}+\dots$$

correspondants à tous les nombres réels t, c. à d. soit

$$(2) \qquad E=\left\{\frac{1|}{|n_1(t)}+\frac{1|}{|n_2(t)}+\dots\right\}_{t\epsilon X}.$$

L'ensemble E est de puissance $2^{\aleph_0}$, puisqu'il existerait autrement, comme on voit sans peine, un ensemble indénombrable T de nombres réels, tel que

$$n_i(t)=n_i(t') \qquad \text{pour} \quad t\epsilon T,\ t'\epsilon T \quad \text{et} \quad i=1,2,...$$

et, vu (1), la suite $\{f_n(t)\}$ convergerait uniformément sur T, contrairement à $\boldsymbol{Q}$.

Je dis que l'ensemble E est concentré. Pour le démontrer, je vais établir d'abord ce

Lemme[1]). *Si U est un ensemble linéaire ouvert contenant tous les nombres rationnels de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, il existe une suite infinie $\{m_i\}$ de nombres naturels, telle que U contient comme élément tout nombre irrationnel $\frac{1|}{|n_1}+\frac{1|}{|n_2}+\frac{1|}{|n_3}+\dots$ pour lequel il existe au moins un i naturel tel que $n_i\geqslant m_i$.*

[1]) Cf. F. Rothberger, ce volume, p. 297, lemme 2.

Démonstration. U étant un ensemble ouvert contenant le nombre 0, il existe un nombre naturel m_1 tel que $\langle 0, 1/m_1\rangle \subset U$. Or les nombres $1/k$, où $k=1,2,\ldots,m_1-1$, en tant que rationnels, appartiennent à l'ensemble ouvert U; il existe donc un nombre naturel m_2 tel que

$$\left\langle \frac{1}{|k}+\frac{1}{|m_2}, \frac{1}{k}\right\rangle \subset U \qquad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots,m_1-1.$$

Pareillement, les nombres $\frac{1}{|k}+\frac{1}{|l}$, où $k=1,2,\ldots,m_1-1$ et $l=1,2,\ldots,m_2-1$, en tant que rationnels, appartiennent à U; il existe donc un nombre naturel m_3 tel que

$$\left\langle \frac{1}{|k}+\frac{1}{|l}, \frac{1}{|k}+\frac{1}{|l}+\frac{1}{|m_3}\right\rangle \subset U \qquad \text{pour} \quad \begin{cases} k=1,2,\ldots,m_1-1 \\ l=1,2,\ldots,m_2-1. \end{cases}$$

En raisonnant ainsi de suite, on obtient une suite infinie de nombres naturels $m_1, m_2, \ldots$ telle que

$$(3) \qquad \left\langle \frac{1}{|k_1}+\frac{1}{|k_2}+\ldots+\frac{1}{|k_{i-1}}, \frac{1}{|k_1}+\frac{1}{|k_2}+\ldots+\frac{1}{|k_{i-1}}+\frac{1}{|m_i}\right\rangle \subset U,$$

resp.

$$\left\langle \frac{1}{|k_1}+\frac{1}{|k_2}+\ldots+\frac{1}{|k_{i-1}}+\frac{1}{|m_2}, \frac{1}{|k_1}+\frac{1}{|k_2}+\ldots+\frac{1}{|k_{i-1}}\right\rangle \subset U$$

$$\text{pour} \quad k_j=1,2,\ldots,m_i-1; \quad j=1,2,\ldots,i-1; \quad i=1,2,\ldots$$

Soit maintenant $\{n_i\}$ une suite infinie de nombres naturels pour laquelle il existe un p naturel tel que $n_p \geqslant m_p$. Soit i le plus petit de tels nombres p. On a donc $n_j < m_j$ pour $j=1,2,\ldots,i-1$ et $n_i \geqslant m_i$, d'où selon (3)

$$\left\langle \frac{1}{|n_1}+\frac{1}{|n_2}+\ldots+\frac{1}{|n_{i-1}}, \frac{1}{|n_1}+\frac{1}{|n_2}+\ldots+\frac{1}{|n_i}\right\rangle \subset U,$$

resp.

$$\left\langle \frac{1}{|n_1}+\frac{1}{|n_2}+\ldots+\frac{1}{|n_i}, \frac{1}{|n_1}+\frac{1}{|n_2}+\ldots+\frac{1}{|n_{i-1}}\right\rangle \subset U,$$

donc, à plus forte raison, $\frac{1}{|n_1}+\frac{1}{|n_2}+\frac{1}{|n_3}+\ldots \in U$, c. q. f. d.

Le lemme étant ainsi établi, soit U un ensemble linéaire ouvert contenant tous les nombres rationnels de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$. Soit $\{m_i\}$ une suite infinie de nombres naturels satisfaisant aux conditions du lemme. Je dis que l'ensemble

$$(4) \qquad N = \mathop{\mathrm{E}}_{t}[t \in X;\ n_k(t) \leqslant m_k \ \text{pour} \ k=1,2,\ldots]$$

est au plus dénombrable.

En effet, en supposant que N est indénombrable, il résulte tout de suite de (1) et (4) que

$$|f_i(t)-f(t)| < 1/k \qquad \text{pour} \quad i \geqslant m_k \quad \text{et} \quad t \in N,$$

ce qui prouve que la suite $\{f_i(t)\}$ est uniformément convergente sur l'ensemble indénombrable N, contrairement à la proposition $\boldsymbol{Q}$. Or, l'ensemble N étant au plus dénombrable et la suite $\{m_i\}$ satisfaisant aux conditions du lemme, on conclut de (2) et (4) que $E-U \subset N$. L'ensemble $E-U$ est donc également au plus dénombrable et par conséquent l'ensemble E est concentré, c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré que $\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{P}$. Comme $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}^* \to \boldsymbol{Q}$, les propositions $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{Q}^*$ sont équivalentes [1]).

[1]) Comme j'ai démontré dans mon livre précité (p. 52–59), la propriété Q (qui y est désignée par C_9) équivaut à chacune des trois propositions C_{10}, C_{11} et C_{12} (où C_{11} est le Théorème II de MM. Banach et Kuratowski, Fund. Math. **14** (1929), p. 128). Toutes les quatre propositions sont donc équivalentes à la proposition $\boldsymbol{P}$.