Sur un ensemble toujours de première catégorie qui est dépourvu de la propriété λ.

Par

Fritz Rothberger (Tallin).

Moyennant l'axiome de Zermelo nous allons démontrer l'existence d'un ensemble linéaire ne jouissant pas de la propriété λ, mais qui est la somme d'un ensemble indénombrable à propriété λ et d'un ensemble dénombrable.

Cet ensemble nous donne la solution négative du problème de M. Sierpiński concernant l'additivité de la propriété λ [1]) et aussi la solution affirmative du problème de M. Kuratowski concernant l'existence d'un ensemble toujours de première catégorie dépourvu de la propriété λ [2]).

1. Rappelons d'abord quelques définitions.

Un ensemble est dit *toujours de première catégorie* s'il est de première catégorie sur tout ensemble parfait.

Evidemment, c'est une propriété additive.

On dit qu'un ensemble jouit de la *propriété* λ si chacun de ses sous-ensembles dénombrables y est un G_δ relatif.

On sait que chaque ensemble jouissant de la propriété λ est toujours de première catégorie [3]).

[1]) W. Sierpiński, Fund. Math. **30**, p. 58 et C. R. Soc. Sci. et Lettres Varsovie, **30** (Note du 16 déc. 1937), p. 257.

[2]) Ce problème a été résolu à l'aide de l'hypothèse du continu par. M. N. Lusin, Fund. Math. **21**, p. 119; cf. aussi: M. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne **4**, Warszawa-Lwów 1934, p. 96, proposition $\mathbf{C}_{43}$.

[3]) Soient, en effet, $E\epsilon\lambda$ et P un ensemble parfait quelconque. On démontre qu'il existe un G_δ dense dans P qui ne contient qu'un sous-ensemble au plus dénombrable de E. Or, le complément de ce G_δ étant de première catégorie dans P, l'ensemble $E\cdot P$ l'est aussi.

Cf. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne **3**, Warszawa-Lwów 1933, p. 269.

Enfin, on dit qu'un ensemble E jouit de la *propriété* λ' si, quel que soit l'ensemble dénombrable D, l'ensemble $E+D$ jouit de la propriété λ.

D'après un théorème de M. Sierpiński, la propriété λ' est dénombrablement additive [1]).

2. Tous les ensembles de points considérés dans la suite seront supposés des sous-ensembles de l'intervalle fermé $[0,1]$. Nous désignons par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{N}$ respectivement l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres irrationnels (de l'intervalle $[0,1]$).

$z=\frac{1|}{|z_1}+\frac{1|}{|z_2}+\dots+\frac{1|}{|z_n}\dots$ étant un nombre irrationnel donné avec son développement en fraction continue, la suite de nombres naturels $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ sera désignée par $\{z\}$ et nous dirons qu'elle *correspond* au point z et vice versa. Cette correspondance est — comme on sait — biunivoque.

Etant donnée une famille Φ de suites de nombres naturels, nous désignons par $\nu(\Phi)$ l'ensemble des points correspondant à ces suites.

Etant données deux suites $\{x\}$ et $\{y\}$ de nombres naturels, nous écrirons

$$\{x\} \precsim \{y\} \quad \text{si} \quad x_n \leqslant y_n \quad \text{pour presque tous les } n.$$

Plus généralement, nous écrirons $\Phi \precsim \{y\}$ si $\{x\} \precsim \{y\}$, quel que soit l'élément $\{x\}$ de la famille Φ; et nous dirons dans ce cas que la suite $\{y\}$ est une *majorante* pour la famille Φ. Une famille de suites qui admet une majorante sera dite *bornée*; dans le cas contraire elle sera dite *non bornée* (p. ex. la famille de toutes les suites de nombres naturels). Notons que

(1) *La somme d'une infinité dénombrable de familles bornées est une famille bornée.*

Car si $\Phi=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n$ où $\Phi_1 \precsim \{y'\}, \Phi_2 \precsim \{y''\}, \dots, \Phi_n \precsim \{y^{(n)}\}, \dots$, il suffit de poser $z_n = \operatorname*{borne\ sup}_{i \leqslant n} y_n^{(i)}$ pour avoir $\Phi \precsim \{z\}$.

Considérons la suivante

Proposition B$(\aleph_\xi)$. *Toute famille de suites de nombres naturels de puissance* $\aleph_\xi$ *est bornée.*

En vertu de (1), la proposition $B(\aleph_0)$ est vraie, tandis que $B(2^{\aleph_0})$ est évidemment fausse. Il existe donc la plus petite puissance pour laquelle $B(\aleph_\xi)$ est en défaut; désignons-la par $\aleph_\eta$. Par conséquent:

(2) *Il existe une famille Φ de puissance $\aleph_\eta$ de suites de nombres naturels qui est non bornée,*

(3) *Toute famille de puissance inférieure à $\aleph_\eta$ de suites de nombres naturels est bornée (c. à d. que $\aleph_\xi<\aleph_\eta$ entraîne $B(\aleph_\xi)$).*

3. Nous allons établir à présent quelques lemmes.

Lemme 1. *Il existe une famille Ψ de puissance $\aleph_\eta$ des suites de nombres naturels qui est non bornée et bien ordonnée (par la relation $\lesssim$) en type d'ordre ω_η.*

Démonstration. Soit Φ une famille non bornée de puissance $\aleph_\eta$ (non nécessairement bien ordonnée), qui existe selon (2). Soient

$$S_1, S_2, \ldots, S_\omega, \ldots, S_\alpha, \ldots \ /\omega_\eta$$

ses éléments.

Il existe des suites T_α (où $\alpha<\omega_\eta$) satisfaisant aux conditions:

(i) $\qquad S_\alpha \lesssim T_\alpha \qquad$ pour tout α

(ii) $\qquad T_\beta \lesssim T_\alpha \qquad$ pour $\beta<\alpha$.

En effet, étant donnée un segment initial de la suite transfinie $T_1, T_2, \ldots, T_\omega, \ldots$, il en existe toujours, selon (3), une majorante (la puissance d'un segment étant inférieure à $\aleph_\eta$). En conséquence, la famille Ψ de tous les T_α (où $\alpha<\omega_\eta$) satisfait à la thèse du lemme, car, selon (i), elle est non bornée et, selon (ii), elle est bien-ordonnée par la relation $\lesssim$ en type ω_η, c. q. f. d.

On conclut du lemme 1 en vertu de (1) que

(4) ω_η *n'est pas confinal avec* ω.

Remarquons qu'on peut généraliser (4) en vertu de (3) de la manière suivante:

(4') *$\aleph_\eta$ est un aleph régulier, c. à d. que le nombre ω_η n'est confinal avec aucun nombre ordinal inférieur.*

C'est à peu près tout ce que nous savons au sujet de la puissance $\aleph_\eta$.

Lemme 2. *F étant un ensemble fermé disjoint de $\mathcal{R}$, la famille Φ correspondante à F est bornée*[4]).

Démonstration. Il suffit de montrer que le nombre

$$v_n = \underset{z \in F}{\text{borne sup}}\, z_n$$

existe pour tout n, puisqu'alors la suite $\{v\}$ est évidemment une majorante pour Φ.

Or, si z_1 était non borné quand z parcourt F, il existerait dans F une suite de points $z', z'', z''', \ldots, z^{(\nu)}, \ldots$ telle que $z_1'<z_2''<z_1'''<\ldots<z_1^{(\nu)}<\ldots$ L'ensemble F, comme fermé, contiendrait alors le point

$$\lim_{\nu=\infty} z^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} 1/z_1^{(\nu)} = 0,$$

contrairement à l'hypothèse que $F\cdot\mathcal{R}=0$. En général, si $\underset{z\in F}{\text{borne sup}}\, z_k$ existe pour $k=1,\ldots,n$ et si z_{n+1} n'était pas borné pour $z \in F$, il existerait une suite $z', z'', z''', \ldots$ de points de F, telle que

$$\begin{gathered} z_1' = z_1'' = z_1''' = \ldots = z_1^{(\nu)} = \ldots = a_1, \\ z_2' = z_2'' = z_2''' = \ldots = z_2^{(\nu)} = \ldots = a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n' = z_n'' = z_n''' = \ldots = z_n^{(\nu)} = \ldots = a_n, \\ z_{n+1}' < z_{n+1}'' < z_{n+1}''' \ldots < z_{n+1}^{(\nu)} < \ldots \end{gathered}$$

et on en conclut comme auparavant que le point

$$\lim_{\nu=\infty} z^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots \frac{1|}{|a_n} + \frac{1}{|z_{n+1}^{(\nu)}|} = \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots \frac{1|}{|a_n}$$

appartiendrait à F, contrairement à l'hypothèse, c. q. f. d.

Lemme 3. *E étant un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{N}$, la famille de suites correspondant à E est bornée ou non, suivant que $\mathcal{R}$ est ou n'est pas un G_δ relativement à $E+\mathcal{R}$.*

Démonstration. Admettons d'abord que $E\subset\mathcal{N}$ et que $\mathcal{R}$ est un G_δ relativement à $E+\mathcal{R}$, c. à d. que E est contenu dans un F_σ. Or, on déduit du lemme 2 en vertu de (1) qu'un tel F_σ correspond toujours à une famille bornée. Il s'ensuit que la famille $\nu^{-1}(E)$, qui correspond à E, est une sous-famille d'une famille bornée et par conséquent bornée elle-même.

[4]) Je dois l'énoncé de ce lemme à M. W. Sierpiński.

Réciproquement, admettons que $E=\nu(\Phi)$ où la famille Φ est bornée. Désignons d'une façon générale par $(a,b]$ et $[a,b)$ les intervalles semi-ouverts de nombres réels $a<t\leqslant b$ et $a\leqslant t<b$ respectivement et par (a,b) l'intervalle ouvert $a<t<b$ ou $b<t<a$ selon que $a<b$ ou $b<a$. Etant donnée une suite quelconque de nombres naturels $\{v\}$, posons:

$$J_0=[0,1/v_1),\qquad J_1=\left(\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|v_2},1\right],$$

$$J_{\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots+\frac{1|}{|a_k}}=\left(\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots\frac{1|}{|a_k}+\frac{1|}{|v_{k+1}},\ \frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots\frac{1|}{|a_k-1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|v_{k+2}}\right)$$

pour $a_k\geqslant 2$.

On établit facilement les propriétés suivantes des développements en fractions continues:

(5) *Tout élément r de $\mathcal{R}$, distinct de 0 et 1, peut être développé en une fraction continue finie dont le dernier dénominateur dépasse* 1,

(6) $$\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots\frac{1|}{|a_k}=\lim_{n=\infty}\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots\frac{1|}{|a_k}+\frac{1|}{|n}=\lim_{n=\infty}\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots\frac{1|}{|a_k-1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|n}$$

pour $a_k\geqslant 2$.

(7) $$0\in J_0,\qquad 1\in J_1,$$

(8) $$\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots+\frac{1|}{|a_k}\in J_{\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots+\frac{1|}{|a_n}}\qquad \textit{pour tout } k.$$

On a en vertu de (5), (7) et (8):

(9) $\mathcal{R}\subset\sum_{r\in\mathcal{R}}J_r$ *et* $G_v=\sum_{r\in\mathcal{R}}J_r$ *est un ensemble ouvert dépendant de* $\{v\}$.

La relation $z\in J_{\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots+\frac{1|}{|a_k}}$ entraînant selon (8) que l'on a soit $z_{k+1}\geqslant v_{k+1}$, soit $z_{k+2}\geqslant v_{k+2}$, on conclut de (9) que

(10) *Si l'on a* $z_i\leqslant v_i-1$ *pour tous les* i, *on a* $z\,\mathrm{non}\in G_v$.

Ceci établi, soit $\{v-1\}$ (c. à d. la suite $v_1-1, v_2-1,\ldots$) une majorante de la famille Φ; soit W la famille (évidemment dénombrable) de toutes les suites $\{w\}$ qui ne diffèrent de $\{v\}$ qu'en un nombre fini de termes. Il s'en suit en vertu de (9) et (10) que

$$\mathcal{R}\subset\prod_{\{w\}\in W}G_w,\qquad \nu(\Phi)\prod_{\{w\}\in W}G_w=0,$$

de sorte que $\mathcal{R}$ est un G_δ relativement à $\nu(\Phi)+\mathcal{R}$, c. q. f. d.

4. *Théorème 1.* *La proposition $B(\aleph_\xi)$ équivaut à la proposition suivante:*

(10) *Tout ensemble de puissance $\aleph_\xi$ jouit de la propriété λ'.*

Démonstration. Soit E un ensemble de puissance $\aleph_\xi$ dépourvu de la propriété λ'. Il existe par conséquent un ensemble dénombrable D qui n'est pas un G_δ relativement à $E+D$ et on peut admettre sans restreindre la généralité que $D\subset\mathcal{R}$. Alors, l'ensemble $\mathcal{R}-D$ étant dénombrable, l'ensemble $\mathcal{R}$ n'est pas un G_δ relativement à $E+\mathcal{R}$. En vertu du lemme 7, la famille des suites correspondantes à $E-\mathcal{R}$ est donc non bornée, malgré qu'elle soit de puissance $\aleph_\xi$ et la proposition $B(\aleph_\xi)$ est en défaut.

D'autre part, si un ensemble $E\subset\mathcal{N}$ jouit de la propriété λ', $\mathcal{R}$ est un G_δ dans $E+\mathcal{R}$ et alors la famille correspondante est bornée en vertu du lemme 3. Par conséquent, si tout sous-ensemble de $\mathcal{N}$ de puissance $\aleph_\xi$ jouit de la propriété λ', toute famille de puissance $\aleph_\xi$ est bornée, ce qui est précisément la thèse de la proposition $B(\aleph_\xi)$. L'équivalence entre les propositions $B(\aleph_\xi)$ et (10) est ainsi établie.

Notons encore cet énoncé connu:

Lemme 4. *Ψ étant une famille bien-ordonnée par la relation $\prec$ et Φ étant une sous-famille quelconque de Ψ composée d'un segment de la suite transfinie des éléments de Ψ, l'ensemble $\nu(\Phi)$ est un G_δ relativement à l'ensemble $\nu(\Psi)$.*

Démonstration[5]). Soit $\{y\}$ le premier élément succédant au segment Φ dans la suite transfinie des éléments de Ψ. Il vient $\Psi-\Phi=\underset{\{z\}\in\Psi}{E}\{y\}\prec\{z\}$, donc, vu la définition de la relation $\prec$,

$$\nu(\Psi-\Phi)=\nu(\Psi)\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\underset{z}{E}\,y_{n+k}\leqslant z_{n+k}.$$

Le second membre étant un F_σ relativement à $\nu(\Psi)$, l'ensemble $\nu(\Phi)$ est un G_δ relatif, c. q. f. d.

Théorème 2. *Il existe un ensemble de nombres irrationnels jouissant de la propriété λ, mais dont la somme avec l'ensemble $\mathcal{R}$ n'en jouit plus.*

L'ensemble correspondant à une famille Ψ bien-ordonnée par la relation $\prec$ en type ω_η et non bornée satisfait à ces conditions.

[5]) Cf. C. Kuratowski, loc. cit., pp. 270–271. Ce lemme n'y est pas énoncé explicitement.

Démonstration. En effet, Ψ étant une telle famille, à savoir une famille assujettie aux conditions du lemme 1, ω_η est d'après (4) non confinal avec ω (ce qui est d'ailleurs évident); par conséquent toute sous-famille dénombrable de Ψ est contenue dans un segment de la suite transfinie des éléments de Ψ. Or, en vertu du lemme 4, tout segment de Ψ correspond à un G_δ relatif à $\nu(\Psi)$, et, en vertu de (3) et du théorème 1, ce G_δ jouit de la propriété λ (puisque λ' entraîne λ). Par conséquent tout sous-ensemble dénombrable de $\nu(\Psi)$ est un G_δ relatif à un G_δ relatif à $\nu(\Psi)$, donc lui-même un G_δ relatif à $\nu(\Psi)$. Ainsi $\nu(\Psi)$ jouit de la propriété λ.

D'autre part, puisque Ψ est non borné, il résulte du lemme 3 que $\mathcal{R}$ n'est pas un G_δ relatif à $\nu(\Psi)+\mathcal{R}$. Par conséquent $\nu(\Psi)+\mathcal{R}$ ne jouit pas de la propriété λ, c. q. f. d.

Corollaire 1. *Il existe un ensemble linéaire jouissant de la propriété λ, mais dépourvu de la propriété λ'.*

En conséquence, la propriété λ n'est pas une propriété additive.

L'ensemble $\nu(\Psi)+\mathcal{R}$, en tant que somme de deux ensembles toujours de première catégorie, est lui-même toujours de première catégorie. On a par conséquent ce

Corollaire 2. *Il existe un ensemble linéaire toujours de première catégorie, ne jouissant pas de la propriété λ.*

Sur les ensembles concentrés.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Nous dirons, d'après M. Besicovitch, qu'un ensemble linéaire indénombrable E est *concentré* s'il existe un ensemble linéaire dénombrable D (pas nécessairement contenu dans E), tel que pour tout ensemble linéaire ouvert U contenant D l'ensemble $E-U$ est au plus dénombrable. Dans ce cas, nous dirons aussi que l'ensemble E est *concentré par rapport à l'ensemble D.*

M. Besicovitch a déduit de l'hypothèse du continu la proposition $\boldsymbol{P}$ suivante [1]):

P. *Il existe un ensemble linéaire concentré de puissance du continu.*

Or, j'ai démontré a l'aide de l'hypothèse du continu la proposition $\boldsymbol{Q}$ suivante [2]):

Q. *Il existe une suite infinie convergente de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), \ldots$ qui convergent non uniformément sur tout ensemble indénombrable.*

Le but de cette Note est de démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *les propositions $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont équivalentes.*

Commençons par établir l'implication $\boldsymbol{P}\rightarrow\boldsymbol{Q}$.

Soient E un ensemble linéaire concentré de puissance du continu et $D=(x_1, x_2, \ldots)$ un ensemble dénombrable tel que $\overline{\overline{E-U}}\leqslant\aleph_0$ pour tout ensemble ouvert $U\supset D$.

---

[1]) A. S. Besicovitch, Acta Math. **62** (1934), p. 289.

[2]) C. R. Soc. Sc. Varsovie 1928, p. 84–87; voir aussi mon livre *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne **4** (Warszawa–Lwów 1934), p. 52, proposition C_9.