Sur les coupures locales des variétés.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

Les propriétés des transformations continues des ensembles en sphères permettent de caractériser facilement, parmi tous les sous-ensembles d'une sphère euclidienne S_n de dimension n, ceux qui coupent S_n [1]. On obtient ainsi une démonstration particulièrement simple de l'invariance topologique de la coupure de S_n. Le but de ce travail est de montrer que les transformations en sphères permettent aussi de caractériser topologiquement les *coupures locales* [2]) de S_n et, par conséquent, aussi les coupures locales d'une variété n-dimensionnelle (au sens classique) arbitraire.

1. Soit X un sous-ensemble fermé d'un espace localement connexe M. L'ensemble X s'appelle *coupure locale de M au point x_0*, lorsqu'il existe un entourage [3]) U de x_0 tel que, pour tout entourage $V\subset U$ de x_0, l'ensemble $V-X$ n'est pas connexe.

Posons pour tout $\varepsilon>0$

$$U_\varepsilon(x_0,M)=\underset{x\in M}{E}[\varrho(x,x_0)<\varepsilon].$$

Alors *la condition suivante est nécessaire et suffisante pour que X soit une coupure de M au point x_0*:

(α) *Il existe un $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $0<\eta<\varepsilon$, l'ensemble $U_\eta(x_0,M)$ contient des points appartenant à des composantes différentes de $U_\varepsilon(x_0,M)-X$.*

[1]) Voir K. Borsuk, *Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume*, Math. Ann. **106** (1932), p. 245.

[2]) Une caractérisation intrinsèque des coupures locales de S_n à l'aide de notions homologiques est contenue dans le „théorème local de dualité". Voir P. Alexandroff, *On Local Properties of Closed Sets*, Annals of Math. **36** (1935), p. 4.

[3]) J'entendrai dans ce travail par *entourage* toujours un entourage ouvert (dans l'espace en question).

En effet, lorsqu'il existe un tel $\varepsilon>0$, posons $U=U_\varepsilon(x_0,M)$. Pour tout entourage $V\subset U$ de p, il existe un $\eta>0$ tel que $U_\eta(x_0,M)\subset V$. Or, il existe deux points $x_1,x_2\in U_\eta(x_0,M)$ appartenant à des différentes composantes de $U-X$. L'ensemble V étant contenu dans U, les composantes de $V-X$ contenant respectivement x_1 et x_2 sont aussi différentes, donc $V-X$ n'est pas connexe.

Admettons maintenant qu'il existe, pour tout $\varepsilon>0$, un $\eta<\varepsilon$ positif tel que $U_\eta(x_0,M)$ est disjoint avec toute composante de $U_\varepsilon(x_0,M)-X$, sauf peut-être avec une seule. Désignons par Γ cette composante exceptionnelle, en posant $\Gamma=0$ dans le cas où cette dernière n'existe pas. L'espace M étant, par hypothèse, localement connexe, l'ensemble Γ ainsi défini est ouvert [4]) et connexe. On a en outre

$$U_\eta(x_0,M)\cdot[U_\varepsilon(x_0,M)-X]\subset\Gamma\subset U_\varepsilon(x_0,M)-X.$$

Or, en posant $V=U_\eta(x_0,M)+\Gamma$, on obtient un entourage de x_0 contenu dans $U_\varepsilon(x_0,M)$ et tel que

$$V-X=[U_\eta(x_0,M)+\Gamma]-X=[U_\eta(x_0,M)+\Gamma]\cdot[U_\varepsilon(x_0,M)-X]=\Gamma.$$

Par conséquent $V-X$ est connexe, donc X n'est pas une coupure locale de M dans x_0.

2. Soit A un sous-ensemble fermé d'un espace compact E. Si $A\neq0$, nous désignons par $E\|A$ l'espace qui s'obtient de E par l'identification des points de A, c. à d. l'hyper-espace de la décomposition semi-continue [5]) de E ayant pour tranches l'ensemble A et les points individuels de $E-A$. Dans le cas où l'ensemble A est vide, nous entendons par $E\|A$ l'espace E lui même. Nous allons traiter respectivement les points et les sous-ensembles de $E-A$ comme des points et des sous-ensembles de l'espace $E\|A$. Il est clair que:

1⁰ Si E' est un sous-ensemble fermé de E tel que $E-A\subset E'$ et $A\cdot E'\neq0$, alors les espaces $E\|A$ et $E'\|(A\cdot E')$ peuvent être considérés comme identiques.

[4]) H. Hahn, *Über die Komponenten offener Mengen*, Fund. Math. **2** (1921), p. 190.

[5]) Quant à la définition d'une décomposition semi-continue et son hyper-espace, voir C. Kuratowski, *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts*, Fund. Math. **11** (1938), p. 169–185.

2⁰ Si B est un sous-ensemble fermé de E contenant A, alors les espaces $(E\|A)\|(B\|A)$ et $E\|B$ peuvent être considérés comme identiques.

Soit f une fonction (aux valeurs arbitraires) définie dans l'espace E et telle que $f(x)=a$ pour tout $x\epsilon A$. Faisons correspondre à cette fonction une fonction f_A définie dans l'espace $E\|A$ de la manière suivante:

Lorsque $A\neq 0$, on pose

$$f_A(x)=f(x) \quad \text{pour tout} \quad x\epsilon E-A \quad \text{et} \quad f_A(A)=a$$

et lorsque $A=0$, on entend par f_A la fonction f elle même.

Il est clair qu'on parvient ainsi à une correspondance biunivoque entre les fonctions f définies dans E et constantes dans A, et les fonctions f_A définies dans $E\|A$. Aux fonctions continues viennent correspondre les fonctions continues et réciproquement. En outre, lorsqu'on soumet la fonction f_A à une déformation continue, la fonction correspondante f se déforme aussi d'une manière continue. Il en résulte, en particulier, que

3⁰ Si f transforme E en sphère euclidienne n-dimensionnelle S_n d'une manière essentielle[6]), la fonction f_A transforme $E\|A$ en S_n aussi d'une manière essentielle.

3. *Théorème.* *Pour qu'un sous-ensemble fermé X de la sphère euclidienne S_n de dimension $n>1$ soit une coupure locale de S_n au point x_0, la condition suivante est nécessaire et suffisante:*

(β) *Il existe un entourage G de x_0 (dans X) tel que, pour tout entourage $H\subset G$ de x_0, il existe une transformation essentielle de l'ensemble $X^*=X\|(X-G)$ en S_{n-1} qui n'est pas essentielle dans l'ensemble X^*-H.*

Il est clair que la condition (β) constitue un invariant topologique de l'ensemble X. Remarquons, en outre, que (β) est une propriété locale de X au point x_0, c. à d. qu'elle ne dépend que des propriétés de X dans un entourage arbitrairement donné de x_0. Dans ce but, il suffit évidemment de prouver que, *dans la condition (β), l'entourage G peut être remplacé par tout entourage G' de x_0 contenu dans G.*

Soit donc H un entourage de x_0 contenu dans G'. D'après (β), il existe une transformation essentielle f de $X^*=X\|(X-G)$ en S_{n-1} qui n'est pas essentielle dans X^*-H.

[6]) Au sens de M. H. Hopf. Voir p. ex. le livre P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie I*, Berlin 1935, p. 405.

Il en résulte[7]) qu'on peut obtenir de f par une déformation continue une fonction continue f' transformant X^* en S_{n-1}, constante dans X^*-H. En tenant compte de l'inclusion $X^*-G'\subset X^*-H$, on conclut que f' est constante dans X^*-G'. Or, en posant $f''=f'_{(X^*-G')}$, on obtient une transformation continue de $X^*\|(X^*-G')$ en S_{n-1}. Mais l'espace $X^*\|(X^*-G')$ peut être considéré selon 2⁰ comme identique à l'espace $X\|(X-G')$, car $X^*=X\|(X-G)$ et $G'\subset G$. La fonction f'' transformant X^* en S_{n-1} d'une manière essentielle, on conclut de 3⁰ que f'' transforme l'espace $X^*\|(X^*-G')$, c. à d. l'espace $X\|(X-G')$, en S_{n-1} d'une manière essentielle. Dans l'ensemble $[X\|(X-G')]-H$, la fonction f'' est constante, donc inessentielle. Or, l'entourage G peut être, dans la condition (β), remplacé par l'entourage G', ce qui prouve le caractère local de cette condition.

Les variétés n-dimensionnelles étant localement homéomorphes à la sphère S_n, on conclut que le théorème en question peut être formulé aussi dans une forme un peu plus générale, à savoir:

Pour qu'un sous-ensemble fermé X d'une variété V_n de dimension $n>1$ soit une coupure locale de V_n en un point $x_0\epsilon V_n$, il faut et il suffit que la condition (β) soit remplie.

4. Comme nous venons de prouver, l'entourage G de x_0 peut être remplacé dans la condition (β) par tout entourage plus petit. En outre, en tenant compte du fait qu'une fonction transformant un ensemble en S_{n-1} d'une manière inessentielle est inessentielle aussi dans tous ses sous-ensembles, on conclut que la condition (β) est équivalente à la suivante:

(β') *Il existe un $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $0<\eta<\varepsilon$, il existe une transformation essentielle de l'ensemble $X^*=X\|[X-U_\varepsilon(x_0,S_n)]$ en S_{n-1} qui n'est pas essentielle dans l'ensemble $X^*-U_\eta(x_0,S_n)$.*

5. *Lemme.* *Soient E un sous-ensemble fermé et V un sous-ensemble ouvert et connexe de S_n. Pour que V contienne des points appartenant à des différentes composantes de S_n-E, il faut et il suffit qu'il existe une transformation essentielle de E en S_{n-1} qui n'est pas essentielle dans $E-V$.*

Démonstration. Soit f une transformation de E en S_{n-1}, essentielle dans E, mais inessentielle dans $E-V$. Or, il existe[7]) une fonction continue f' transformant S_n en S_{n-1} et coïncidant avec

[7]) Voir K. Borsuk, *Sur les prolongements des transformations continues*, Fund. Math. **28** (1936), p. 103.

f dans l'ensemble $E-V$. En désignant par P la somme de toutes les composantes de S_n-E disjointes de V, posons:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{pour tout } x\in E, \\ f'(x) & \text{pour tout } x\in P. \end{cases}$$

On parvient ainsi à une fonction continue g transformant $E+P$ en S_{n-1} d'une manière essentielle, car la fonction f a été supposée essentielle dans E et g coïncide avec f dans E. Il en résulte [1]) que $E+P$ est une coupure de S_n. En tenant compte du fait que $S_n-(E+P)$ est la somme des composantes de S_n-E empiétant sur V, on conclut que le nombre de ces composantes dépasse 1. La suffisance de la condition est ainsi démontrée.

Pour en prouver la nécessité, admettons qu'il existe deux points $x_1, x_2 \in V$ appartenant aux composantes différentes de S_n-E. Nous allons nous appuyer sur la proposition suivante:

(γ) *Il existe une fonction continue f transformant $S_n-(x_1)-(x_2)$ en S_{n-1} et telle que pour qu'un ensemble fermé $X\subset S_n-(x_1)-(x_2)$ coupe S_n entre x_1 et x_2, il faut et il suffit que f transforme X en S_{n-1} d'une manière essentielle.*

Quoique utilisée souvent [8]), cette proposition ne possède dans la littérature aucune démonstration explicite. Pour la prouver, on peut admettre, sans restreindre la généralité, que:

1) La sphère S_n est définie dans l'espace euclidien à $(n+1)$ dimensions par l'équation $t_0^2+t_1^2+\ldots+t_n^2=1$.

2) Les points x_1 et x_2 coïncident respectivement avec $(1,0,\ldots,0)$ et $(-1,0,\ldots,0)$.

3) La sphère $(n-1)$-dimensionnelle S_{n-1} coïncide avec la partie commune de S_n et de l'hyperplan $t_0=0$.

Nous allons démontrer que la fonction f définie par la formule

$$f(x)=\left(0,\frac{t_1}{\sqrt{1-t_0^2}},\ldots,\frac{t_n}{\sqrt{1-t_0^2}}\right) \quad \text{pour tout} \quad x=(t_0,t_1,\ldots,t_n)\in S_n-(x_1)-(x_2)$$

satisfait à (γ). En effet, lorsque l'ensemble fermé $X\subset S_n-(x_1)-(x_2)$ ne coupe pas S_n entre x_1 et x_2, il existe une composante Γ de S_n-X contenant x_1 et x_2 à la fois. Or, l'ensemble fermé $Y=S_n-\Gamma$ est contenu dans $S_n-(x_1)-(x_2)$ et ne coupe pas S_n. Par conséquent [1]) f est inessentielle dans Y, donc aussi dans $X\subset Y$.

Admettons maintenant que X coupe S_n entre x_1 et x_2 et supposons que f ne soit pas essentielle dans X. Il existerait alors [7]) une fonction continue f' coïncidant avec f dans X et qui transforme la sphère S_n toute entière en S_{n-1}.

[8]) Voir p. ex. S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. **26** (1936), p. 104.

Soit Γ_i (pour $i=1,2$) la composante de S_n-X contenant x_i. Il existe un λ ($0\leqslant\lambda<1$) tel que l'hyperplan $t_0=\lambda$ coupe S_n le long d'une sphère S'_{n-1} contenue dans Γ_1. La fonction f transformant S'_{n-1} en S_{n-1} d'une manière homéomorphe, il existe une transformation continue g de S_{n-1} en S'_{n-1} satisfaisant à la condition

$$g[f(x)]=x \quad \text{pour tout} \quad x\in S'_{n-1}.$$

En posant:

$$T=\underset{x}{E}[x=(t_0,t_1,\ldots,t_n)\in S_n;\ t_0\leqslant\lambda], \quad \varphi(x)=\begin{cases} g[f(x)] & \text{pour tout } x\in T-\Gamma_2, \\ g[f'(x)] & \text{pour tout } x\in\Gamma_2, \end{cases}$$

on obtient une transformation continue de T en S'_{n-1} telle que $\varphi(x)=x$, quel que soit $x\in S'_{n-1}$, c. à d. une rétraction de T en S'_{n-1}. La négation de (γ) entraîne donc l'existence d'une rétraction de T en S'_{n-1}. La démonstration de (γ) est ainsi terminée, car une telle rétraction n'existe pas [9]).

Les points x_1 et x_2 appartenant aux différentes composantes de S_n-E, on conclut de (γ) que f transforme E en S_{n-1} d'une manière essentielle. D'autre part, les points x_1 et x_2 appartenant à l'ensemble V ouvert et connexe, l'ensemble fermé $E-V$ ne coupe pas S_n entre x_1 et x_2. Par conséquent, f transforme $E-V$ en S_{n-1} d'une manière inessentielle, ce qui achève la démonstration du lemme.

6. *Démonstration du théorème.* Nous avons à prouver que, dans le cas $M=S_n$ où $n>1$, la condition (α) équivaut à la condition (β). A ce but remarquons d'abord que la condition (α) équivaut dans ce cas à la suivante:

(α') *Il existe un $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $0<\eta<\varepsilon$, l'ensemble $U_\eta(x_0,S_n)$ contient des points appartenant à des composantes différentes de l'ensemble $\{S_n\|[S_n-U_\varepsilon(x_0,S_n)]\}-\{X\|[X-U_\varepsilon(x_0,S_n)]\}$.*

Pour s'en convaincre, il suffit de s'appuyer sur le fait évident que (dans le cas $n>1$) toute composante de l'ensemble

$$\{S_n\|[S_n-U_\varepsilon(x_0,S_n)]\}-\{X\|[X-U_\varepsilon(x_0,S_n)]\}$$

contient une seule composante de l'ensemble $U_\varepsilon(x_0,S_n)-X$.

Or, l'ensemble $S_n\|[S_n-U_\varepsilon(x_0,S_n)]$ est une sphère euclidienne de dimension n et $U_\eta(x_0,S_n)$ est un sous-ensemble ouvert et connexe de cette sphère. Il ne reste donc qu'à appliquer le lemme précédent pour constater que les conditions (α') et (β'), donc aussi les conditions (α) et (β) sont équivalentes, c. q. f. d.

[9]) K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Math. **17** (1931), p. 161.