

La formule (i) établie, on en déduit, en remplaçant  $A$  par  $a$  et  $C$  par  $C+a$ , l'existence d'un  $b \in B$  tel que  $dc_{a,B}(C+a) \leq dc_{a,b}(C+a+b)$ , d'où la conclusion demandée.

De là résulte que

4. Pour tout espace compact, la connexité  $n$ -dimensionnelle entre deux ensembles fermés  $A$  et  $B$  entraîne la connexité  $n$ -dimensionnelle entre un couple de points  $a \in A$  et  $b \in B$ .

En désignant par  $\dim_a \mathcal{X}$  la dimension de  $\mathcal{X}$  au point  $a$ , on a l'équivalence évidente:

5. Pour que  $\dim_a \mathcal{X} \leq n$ , il faut et il suffit que chaque ensemble fermé  $B$  tel que  $a \in \mathcal{X} - B$  satisfasse à la condition  $dc_{a,B} \mathcal{X} \leq n$ .

Rapproché de 3, cet énoncé entraîne que

6.  $C$  étant un sous-ensemble d'un espace compact, à chaque  $a \in C$  correspond un point  $b \neq a$  tel que

$$dc_{a,b}(C+b) = \dim_a C, \text{ pourvu que } \dim_a C < \infty \text{ } ^1).$$

Car, d'une part, l'inégalité  $dc_{a,b}(C+b) \leq \dim_a C$  est valable toujours pour  $a \neq b$  et, d'autre part, en substituant dans 3 à  $B$  un ensemble fermé dans  $C$  tel que  $a \in C - B$  et que  $\dim_a C \leq dc_{a,B} C$ , on en déduit l'existence d'un  $b \neq a$  pour lequel  $dc_{a,B} C \leq dc_{a,b}(C+b)$ . D'où l'égalité demandée.

<sup>1)</sup> Pour un cas particulier, voir K. Menger, l. c. p. 207.

## Lokale Eigenschaften der zu Variationsproblemen gehörigen metrischen Räume.

Von

Herbert Busemann (Princeton, U. S. A.).

1. Einem positiv definiten, quasiregulären Variationsproblem mit hinreichend glatten Integranden kann in bekannter Weise ein Finslerscher Raum zugeordnet werden. Wenn der Integrand  $F(P, \varphi)$  nicht genügend regulär ist, sondern etwa wie bei den Mengerschen <sup>1) 2)</sup> Untersuchungen nur stetig von Punkt und Richtung abhängt, so gelangt man, wenn man den Wert des Integrals über  $F(P, \varphi)$  längs einer gerichteten Minimanten von  $A$  nach  $B$  als Abstand von  $A$  und  $B$  einführt (die Existenz solcher Minimanten ist durch die erwähnten Mengerschen Resultate gesichert) zu einem nicht notwendig symmetrischen metrischen Raum  $R$ .  $F(P, \varphi)$  definiert an jeder Stelle die Indikatrix des Variationsproblems, und Quasiregularität ist als (schwache) Konvexität der Indikatrix erklärt. Golažb <sup>3)</sup> hat kürzlich unter den Mengerschen Differenzierbarkeitsannahmen gezeigt, dass die Konvexität der Indikatrix notwendig ist, damit der Raum  $R$  metrisch (bezw. fastmetrisch) wird.

In dieser Note möchte ich einige Zusätze zu den Ergebnissen von Menger und Golažb machen, die, wie ich glaube, zur Klärung der Zusammenhänge geeignet sind. Ich gehe aus von einem metrischen Raum der obigen Art, d. h. ich betrachte einen auf einen Euklidischen Raum topologisch abgebildeten, nicht notwendig

<sup>1)</sup> K. Menger, *Metrische Geometrie und Variationsrechnung*, Fund. Math. **25** (1935), pp. 441-458.

<sup>2)</sup> K. Menger, *Die metrische Methode in der Variationsrechnung*, Erg. Math. Kolloq. **8** (1937), pp. 1-32.

<sup>3)</sup> St. Golažb, *Ein Beitrag zum Mengerschen Begriff des fastmetrischen Raumes*, Fund. Math. **31** (1938), pp. 67-73.

symmetrischen metrischen Raum  $R$  (vgl. die Bedingungen (2, 3) abc), und zwar beschränke ich mich der Einfachheit halber auf den zwei-dimensionalen Fall. Indem man den Euklidischen Abstand zweier Punkte mit dem Abstand der entsprechenden Punkte in  $R$  in Beziehung bringt, sieht man in einfacher Weise, dass schon unter diesen allgemeinen Voraussetzungen in einem gewissen Sinne von einer konvexen Indikatrix gesprochen werden kann. Da nämlich keine Differenzierbarkeitsannahmen gemacht werden, muss die eine Indikatrix durch zwei, eine obere und eine untere, ersetzt werden. Die untere Indikatrix ist dann stets konvex. Wenn eine Indikatrix existiert, d. h. wenn obere und untere Indikatrix zusammenfallen, ist sie daher konvex. Bei gegebener unterer Indikatrix muss die obere einer einfachen Beziehung (b) genügen. Dies ist merkwürdigerweise genau dieselbe Beziehung, in der die obere Krümmungsindikatrix einer konvexen Fläche in einem Punkt zur unteren stehen muss. Auf Grund der bereits vorliegenden ausführlichen Untersuchung dieser Krümmungsindikatrizen <sup>4)</sup> zeigt es sich, dass jedesmal, wenn eine beliebige einen gegebenen Punkt  $P$  umschliessende oder enthaltende konvexe Kurve  $i$  und eine der Beziehung (b) genügende Kurve  $I$  gegeben ist,  $i$  und  $I$  auftreten können als untere und obere Indikatrix von  $P$  (dem Aufpunkt von  $i$  und  $I$ ) in einem konvexen metrischen Raume, dessen topologische Beziehung auf die euklidische Ebene ausserhalb  $P$  beliebig glatt gewählt werden kann.

In unserer Definition der oberen und unteren Indikatrix ist enthalten, dass, wenn beide für alle Punkte eines Gebietes  $G$  zusammenfallen, die Indikatrix in  $G$  stetig von ihrem Aufpunkt abhängt. Setzt man ausserdem voraus, dass die Indikatrix im scharfen Sinne konvex und überall beschränkt ist und ihren Aufpunkt im Innern enthält, so ist dies bereits mehr, als nach Menger für die Existenz von rektifizierbaren Minimanten nötig ist. Meines Wissens ist bisher nicht untersucht worden, ob die Minimanten unter den angegebenen Voraussetzungen überall (und nicht nur fast überall) differenzierbar sind. Wir zeigen an einem Beispiel, dass das im allgemeinen nicht der Fall ist. Wohl aber kommt den Minimanten überall eine eigenartige, der Differenzierbarkeit ähnliche Eigenschaft zu, die schwächer ist als stetige Differenzierbarkeit,

<sup>4)</sup> H. Busemann und W. Feller, *Bemerkungen zur Differentialgeometrie der konvexen Flächen II, Über die Krümmungsindikatrizen*, Mat. Tidsskrift B (1935), pp. 87-115. Im folgenden zitiert mit „B. F.“.

gewöhnliche Differenzierbarkeit aber (wie jenes Beispiel zeigt) weder enthält, noch (wie an anderen Beispielen zu sehen ist) in ihr enthalten ist. Man bekommt also auch für Punkte, wo eine Tangente existiert, eine zusätzliche Aussage. Unter gewissen Umständen, z. B. bei Existenz einer rechten oder einer linken Halbtangente, folgt die Differenzierbarkeit aus unserer Eigenschaft.

2.  $\pi$  sei die euklidische Ebene mit einem kartesischen Koordinatensystem  $(x, y)$  und einem Polarkoordinatensystem  $(r, \varphi)$ , wobei  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  sein soll. Den euklidischen Abstand zweier Punkte  $A = (x_1, y_1) = (r_1, \varphi_1)$  und  $B = (x_2, y_2) = (r_2, \varphi_2)$  bezeichnen wir mit

$$(2.1) \quad e(A, B) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} = [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]^{\frac{1}{2}}.$$

Wir notieren zunächst eine einfache, später oft gebrauchte Beziehung: Seien  $\overrightarrow{PB_1}$ ,  $\overrightarrow{PB_2}$  zwei von  $P$  ausgehende, nicht entgegengesetzt gerichtete Strahlen und  $\bar{B}$  ein Punkt auf der Strecke  $\overline{B_1B_2}$ . Setzt man dann  $\sphericalangle B_1P\bar{B} = \gamma_1$ ,  $\sphericalangle \bar{B}PB_2 = \gamma_2$  so ist

$$(2.2) \quad \frac{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}{e(P, \bar{B})} = \frac{\sin \gamma_2}{e(P, B_1)} + \frac{\sin \gamma_1}{e(P, B_2)}.$$

Ausser  $e(X, Y)$  liege in  $\pi$  eine zu  $e()$  topologisch äquivalente und nicht notwendig symmetrische Metrik vor. D. h., es sei zu je zwei Punkten  $A, B$  ein Abstand  $r(A, B)$  erklärt mit den Eigenschaften:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & \text{a) } r(A, B) \geq 0; \\ & \text{b) } r(A, B) = 0 \text{ dann und nur dann, wenn } A = B; \\ & \text{c) } r(A, B) + r(B, C) \geq r(A, C); \end{aligned}$$

Die topologische Äquivalenz von  $r()$  und  $e()$  bedeutet, dass aus  $r(A, A_n) \rightarrow 0$  oder  $r(A_n, A) \rightarrow 0$  stets  $e(A, A_n) \rightarrow 0$ , und aus  $e(A, A_n) \rightarrow 0$  stets  $r(A, A_n) + r(A_n, A) \rightarrow 0$  folgen soll.

Bezeichnet man bei einem hinreichend glatten, positiv definiten Variationsproblem mit  $r(X, Y)$  die kürzeste Entfernung im Sinne des Variationsproblems von  $X$  nach  $Y$  (d. h. den Wert des Integrals längs einer gerichteten Minimanten von  $X$  nach  $Y$ ), so bekommt man die Indikatrix in einem Punkt  $O$  folgendermassen: es sei  $s$  ein von  $O$  ausgehender Strahl mit der Richtung  $\varphi$ , und  $A_n, B_n$  seien Punktepaare derart, dass die  $X$  Strahlen  $\overrightarrow{A_n B_n} \parallel s$  sind und  $\overrightarrow{A_n} \rightarrow \overrightarrow{B_n}$

$A_r \rightarrow O, B_r \rightarrow O$  gilt. Man bilde dann

$$\Psi(A_r, B_r) = \frac{e(A_r, B_r)}{r(A_r, B_r)}$$

und trage von  $O$  aus auf  $s$  den Punkt  $(g(\varphi), \varphi)$  mit

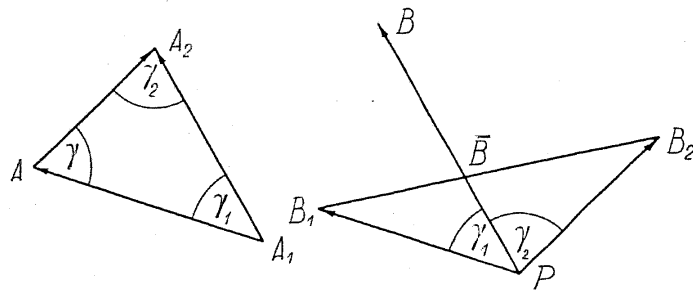
$$g(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(A_r, B_r)$$

ab.  $r = g(\varphi)$  stellt dann die Indikatrix des Variationsproblems für  $O$  als Aufpunkt dar.

Um in unserem allgemeinen Falle zu einer Indikatrix zu gelangen, führen wir daher auch die Funktion

$$(2.4) \quad \Psi(x, y) = \frac{e(x, y)}{r(x, y)}$$

ein und versuchen, die Dreiecksungleichung (2.3 c) als Ungleichung für  $\Psi(X, Y)$  zu schreiben. Dazu seien  $A, A_1, A_2$  irgend drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte und  $\sphericalangle A_1 A A_2 = \gamma, \sphericalangle A A_1 A_2 = \gamma_1, \sphericalangle A_1 A_2 A = \gamma_2$ . Dann ist



$$\frac{1}{e(A_1, A_2)} = \frac{1}{e(A_1, A)} \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma} = \frac{1}{e(A, A_2)} \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma}$$

und daher

$$\frac{r(A_1, A_2)}{e(A_1, A_2)} \leq \frac{r(A_1, A)}{e(A_1, A)} + \frac{r(A, A_2)}{e(A_1, A_2)} = \frac{r(A_1, A)}{e(A_1, A)} \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma} + \frac{r(A, A_2)}{e(A, A_2)} \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma}$$

oder wegen  $\sin \gamma = \sin(\gamma_1 + \gamma_2)$

$$(2.5) \quad \frac{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}{\Psi(A_1, A_2)} \leq \frac{\sin \gamma_2}{\Psi(A_1, A)} + \frac{\sin \gamma_1}{\Psi(A, A_2)}$$

Zieht man von  $P$  aus Strahlen  $\overrightarrow{PB_1} \parallel \overrightarrow{A_1 A}, \overrightarrow{PB_2} \parallel \overrightarrow{A A_2}$ , und  $\overrightarrow{PB} \parallel \overrightarrow{A_1 A_2}$ , wo  $B_1, B_2, B$  so gewählt sein mögen, dass

$$e(P, B_1) = \Psi(A_1, A), \quad e(P, B_2) = \Psi(A, A_2), \quad e(P, B) = \Psi(A_1, A_2)$$

wird, so fällt  $\overrightarrow{PB}$  ins Innere des von  $\overrightarrow{PB_1}$  und  $\overrightarrow{PB_2}$  gebildeten Winkels, trifft also die Strecke  $\overline{B_1 B_2}$  in einem Punkt  $\bar{B}$ . (2.2) und (2.5) besagen dann, dass  $B$  nicht ins Innere des Dreiecks  $B_1 P B_2$  fallen kann.

Wir definieren nun die Indikatrizen. Wir fixieren einen Punkt  $P$  und eine Richtung  $\varphi$ , betrachten dann alle Folgen  $\{A_n, B_n\}$  von Punktepaaren  $A_n, B_n (A_n \neq B_n)$  derart, dass 1)  $\overrightarrow{A_n B_n} \parallel \varphi$  hat, 2)  $A_n \rightarrow P, B_n \rightarrow P$  gilt.  $W(P, \varphi)$  sei die Gesamtheit dieser Folgen. Wir bilden dann

$$(2.6) \quad \begin{aligned} a) \quad g(P, \varphi) &= \text{Untere Grenze } \lim_{\substack{\{A_n, B_n\} \subset W(P, \varphi) \\ n \rightarrow \infty}} \Psi(A_n, B_n), \\ b) \quad G(P, \varphi) &= \text{Obere Grenze } \lim_{\substack{\{A_n, B_n\} \subset W(P, \varphi) \\ n \rightarrow \infty}} \Psi(A_n, B_n). \end{aligned}$$

Aus dieser Definition folgt sofort, dass für festes  $\varphi$  und  $P_n \rightarrow P$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} g(P, \varphi) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} g(P_n, \varphi), \\ G(P, \varphi) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} G(P_n, \varphi) \end{aligned}$$

gilt, sodass  $g(P, \varphi)$  bei festem  $\varphi$  als Funktion von  $P$  nach unten und  $G(P, \varphi)$  nach oben halbstetig ist. Tragen wir nun auf dem von  $P$  ausgehenden Strahl mit der Richtung  $\varphi$  die Punkte  $\underline{R}_\varphi$  und  $\bar{R}_\varphi$  ab, für die

$$e(P, \underline{R}_\varphi) = g(P, \varphi) \quad \text{bzw.} \quad e(P, \bar{R}_\varphi) = G(P, \varphi)$$

ist, und variiert man  $\varphi$ , so entstehen Punktfolgen  $i$  und  $I$ , die wir als untere und obere Indikatrix von  $r(X, Y)$  für  $P$  als Aufpunkt bezeichnen. Da  $\infty$  als Wert für  $g(P, \varphi)$  und  $G(P, \varphi)$  zugelassen werden muss und dann die Punkte  $\underline{R}_\varphi$  und  $\bar{R}_\varphi$  ohne eine neue Konvention keinen Sinn haben, ist es häufig bequemer, statt der Mengen  $i$  und  $I$  die bezüglich  $P$  sternförmigen Mengen  $\gamma$  und  $\Gamma$  zu betrachten, die aus den  $P$  mit den Punkten  $\underline{R}_\varphi$  bzw.  $\bar{R}_\varphi$  verbindenden Strecken bestehen, worunter für  $\underline{R}_\varphi = \infty$  oder  $\bar{R}_\varphi = \infty$  die ganzen von  $P$  ausgehenden Strahlen zu verstehen sind. Wir wollen zunächst zeigen:

I:  $\gamma$  ist konvex.

Beweis: Es seien  $B'_1$  und  $B'_2$  irgend zwei zu  $\gamma$  gehörige Punkte, wir müssen zeigen, dass jeder Punkt  $B'$  von  $\overline{B'_1 B'_2}$  zu  $\gamma$  gehört. Hierbei darf angenommen werden, dass die Gerade  $\overline{B'_1 B'_2}$  nicht durch  $P$  geht, da dieser Fall trivial ist.  $\overrightarrow{PB'_1}, \overrightarrow{PB'_2}, \overrightarrow{PB'}$  mögen die Richtungen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$  haben. Wir wählen nun eine Folge von Punktepaaren  $\{A''_1, A''_2\}$  in  $W(P, \varphi)$  derart, dass

$$\lim \Psi(A''_1, A''_2) = g(P, \varphi)$$

wird. Dann konstruieren wir den Punkt  $A''$ , für den

$$\overrightarrow{A''_1 A''} \parallel \overrightarrow{PB'_1}, \quad \overrightarrow{A'' A''_2} \parallel \overrightarrow{PB'_2}$$

wird, und wählen eine solche Teilfolge  $\{v_n\}$  aus  $\{v\}$  aus, dass

$$s_{\varphi_1} = \lim \Psi(A''_1, A''_n) \geq g(P, \varphi) \quad \text{und} \quad s_{\varphi_2} = \lim \Psi(A''_n, A''_2) \geq g(P, \varphi)$$

existieren. Tragen wir dann auf  $\overrightarrow{PB'_1}, \overrightarrow{PB'_2}, \overrightarrow{PB'}$  die Punkte  $S_{\varphi_1}$ , und  $S_{\varphi_2}$  mit  $e(P, S_{\varphi_1}) = s_{\varphi_1}$ ,  $e(P, S_{\varphi_2}) = s_{\varphi_2}$  ab, so folgt aus (2.5), dass der Punkt  $\underline{R}_\varphi$  nicht im Inneren des Dreiecks  $S_{\varphi_1} P S_{\varphi_2}$  liegen kann. Da aber jeder Punkt von  $\overline{B'_1 B'_2}$  dem abgeschlossenen Dreieck  $S_{\varphi_1} P S_{\varphi_2}$  angehört, so muss  $B' \subset \overline{P \underline{R}_\varphi}$  und damit  $B' \subset \gamma$  gelten.

II: Wenn  $B'_1 C \gamma$  und  $B'_2 C \gamma$ , so gilt  $\overline{B'_1 B'_2} \subset \gamma$ .

Beweis: Wir zeigen wieder, dass jeder Punkt  $B'$  von  $\overline{B'_1 B'_2}$  in  $\gamma$  liegt, und dürfen dazu wieder annehmen, dass  $\overline{B'_1 B'_2}$  nicht durch  $P$  geht. Sind  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$  definiert wie oben, so wählen wir diesmal eine Folge  $\{A''_1, A''_2\}$  in  $W(P, \varphi)$  derart dass

$$\lim \Psi(A''_1, A''_2) = G(P, \varphi_2)$$

wird, und bestimmen dann  $A''_1$  so, dass

$$\overrightarrow{A''_1 A''} \parallel \overrightarrow{PB'_1}, \quad \overrightarrow{A''_1 A''_2} \parallel \overrightarrow{PB'}$$

wird. Dann werde  $\{v_n\}$  in  $\{v\}$  so bestimmt, dass

$$s_{\varphi_1} = \lim \Psi(A''_1, A''_n) \geq g(P, \varphi_1)$$

existiert.  $S_{\varphi_1}$  sei der Punkt auf  $\overrightarrow{PB'_1}$  mit  $e(P, S_{\varphi_1}) = s_{\varphi_1}$ , und  $S_\varphi$  der Punkt auf  $\overrightarrow{PB'}$  mit  $e(P, S_\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(A''_1, A''_n)$ .

Dann folgt aus (2.5), dass der Punkt  $S_\varphi$  nicht im Inneren des Dreiecks  $S_{\varphi_1} P \underline{R}_{\varphi_2}$  liegen kann, sodass  $B'$  der Strecke  $\overline{P S_\varphi}$ , also erst recht der Strecke  $\overline{P \underline{R}_\varphi}$  und damit  $\Gamma$  angehört.

Aus I und II ergibt sich <sup>5)</sup>:

III. Wenn  $g(P, \varphi_0) > 0$ , so existieren (bei festem  $P$ ) für alle Richtungen, ausser möglicherweise für  $\varphi = \varphi_0$  und  $\varphi = \varphi_0 + \pi$ , die Grenzwerte  $G(P, \varphi -)$  und  $G(P, \varphi +)$ , und es ist:

$$G(P, \varphi +) \leq G(P, \varphi) \leq G(P, \varphi -) \quad \text{für} \quad \varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \pi,$$

$$G(P, \varphi -) \leq G(P, \varphi) \leq G(P, \varphi +) \quad \text{für} \quad \varphi_0 + \pi < \varphi < \varphi_0 + 2\pi.$$

Als Spezialfall von I und III haben wir:

III a. Wenn  $g(P, \varphi) > 0$  für alle  $\varphi$ , so sind die Funktionen  $g(P, \varphi)$  und  $G(P, \varphi)$  stetig für alle  $\varphi$ .

Bislang wurde noch nicht benutzt, dass die Metrik  $r()$  topologisch äquivalent zu  $e()$  ist. Dies ist nicht so befremdend, wie es zunächst scheint, da II für  $g(P, \varphi) = 0$  leer ist und jede Voraussetzung über das Nichtverschwinden von  $g(P, \varphi)$  in Richtung der topologischen Äquivalenz der beiden Metriken geht. Z. B. besagt  $g(P, \varphi) > 0$ , dass  $r(x, y)/e(x, y)$  in einer Umgebung von  $P$  beschränkt ist. Dies wird noch deutlicher, wenn man Aussagen über  $G(P, \varphi)$  bei beliebigem  $g(P, \varphi)$  machen will. Wir wollen zeigen:

IV.  $G(P, \varphi)$  ist Limes einer monoton fallenden Folge nach unten halbstetiger Funktionen  $\Lambda_m(\varphi)$ . <sup>6)</sup>

Zum Beweise betrachten wir alle Punktepaare  $A, B$  derart, dass  $\overrightarrow{AB}$  die Richtung  $\varphi$  hat und

$$\frac{1}{m} \geq e(A, B) \geq \frac{1}{m \cdot 2^v}, \quad e(A, B) \leq M; \quad m, v = 1, 2, 3, \dots$$

ist. Wir bilden

$$A_{m,v}(\varphi) = \text{obere Grenze } \Psi(A, B)$$

<sup>5)</sup> Siehe B. F., p. 103.

<sup>6)</sup> Funktionen dieses Typus wurden zuerst von W. H. Young untersucht. Literatur und einige ihrer Eigenschaften sind in B. F., pp. 90/1, zusammengestellt. Dort ist auch gezeigt, dass IV für  $g(P, \varphi) = 0$  aus III folgt.

über alle diese Punktepaare. Wenn nun  $r(A, B)$  topologisch äquivalent zu  $e(A, B)$  ist, so ist für  $A \neq B$  die Funktion  $\Psi(A, B)$  stetig in  $A$  und  $B$ , sodass stets ein Punktepaar  $(A_r, B_r)$  mit

$$\Psi(A_r, B_r) = A_{m,r}(\varphi)$$

existiert. Daher ist ferner  $A_{m,r}(\varphi)$  eine stetige Funktion von  $\varphi$ . Da  $A_{m,r}(\varphi) \leq A_{m,r+1}(\varphi)$ , so existiert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_{m,r}(\varphi) = A_m(\varphi)$$

und ist nach unten halbstetig. Ferner ist  $A_{m+1}(\varphi) \leq A_m(\varphi)$  und

$$G(P, \varphi) = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m(\varphi),$$

womit IV bewiesen ist. Man konstruiert leicht Beispiele, die zeigen, dass IV nicht zu stimmen braucht, wenn  $e(\cdot)$  und  $r(\cdot)$  nicht äquivalent sind.

**3.** Wir geben uns nun einen Punkt  $O$  und zwei bezüglich  $O$  sternförmige Mengen  $\gamma$  und  $\Gamma$  vor, die den Bedingungen I, II und IV genügen. Wir fragen dann, ob eine zu  $e(\cdot)$  äquivalente Metrik  $r(\cdot)$  existiert, mit den durch  $\gamma$  und  $\Gamma$  festgelegten Indikatrizten. Es ist natürlich wünschenswert,  $r(\cdot)$  so zu bestimmen, dass es ausserhalb  $O$  möglichst glatt ist. Um einen kurzen Ausdruck zu haben, sagen wir,  $r(\cdot)$  sei im Punkte  $Q$  normal, wenn in  $Q$  die untere Indikatrix mit der oberen zusammenfällt, beschränkt ist und  $Q$  im Inneren enthält. Wenn  $r(\cdot)$  in allen Punkten eines Gebietes normal ist, so ist die Indikatrixfunktion  $g(P, \varphi)$  wegen (2.6) stetig in  $P$ . Wegen der Konvexität ist sie sodann stetig in  $P$  und  $\varphi$  zusammen.

Wir wollen zeigen, dass  $r(\cdot)$  so gewählt werden kann, dass die Ebene  $\pi$  oder, was genügt, ein  $O$  im Inneren enthaltender Teilbereich von  $\pi$  ein konvexer, metrischer („metrisch“ soll heissen: ein den Bedingungen (2.3a, b, c) genügender) Raum wird, der überall, ausser vielleicht in  $O$ , normal ist und in  $O$  die vorgegebenen Indikatrizten hat. Die Konstruktion eines solchen  $r(\cdot)$  ist an sich recht mühsam, jedoch ist sie im Wesentlichen in B. F. bereits durchgeführt. Sind nämlich  $r = g(O, \varphi) = g(\varphi)$  und  $r = G(O, \varphi) = G(\varphi)$  die Gleichungen der Indikatrizten, so ist dort gezeigt, dass nach Einführung einer räumlichen Koordinate  $z$  eine konvexe Fläche

$$z = \Phi(r, \varphi)$$

gefunden werden kann, wo für kleine  $r$

$$(3.1) \quad r^3 \leq \Phi(r, \varphi) \leq r^{\frac{3}{2}}$$

ist, und für die  $r = g(\varphi)$  die untere und  $r = G(\varphi)$  die obere Krümmungsindikatrix im Punkte  $O$  ist. Dies bedeutet, dass für jedes feste  $\varphi$

$$(3.2) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{\sqrt{2\Phi(r, \varphi)}} = g(\varphi), \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{\sqrt{2\Phi(r, \varphi)}} = G(\varphi)$$

ist. Man kann nun auf Grund hiervon wie folgt eine für unser Problem geeignete Metrik konstruieren: Die Kurve  $\Phi(r, \varphi) = k > 0$  ist wegen (3.1) konvex und beschränkt und enthält  $O$  im Inneren. Ist  $r = \Psi_k(\varphi)$  ihre Projektion auf die Ebene  $z = 0$ , so ordnen wir einen Punkt  $P$  dieser Projektion mit den kartesischen Koordinaten  $a, b$  diejenige Kurve  $k_P$  als Indikatrix zu, die aus  $r = \Psi_k(\varphi)$  durch die Ähnlichkeitstransformation

$$x' = \frac{x}{\sqrt{2k}} + a, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{2k}} + b$$

hervorgeht. Der Integrand des zugehörigen Variationsproblems bestimmt sich demnach durch

$$(3.3) \quad F(P, \varphi) = \frac{\sqrt{2k}}{\Psi_k(\varphi)}, \quad k = \Phi(P).$$

Ausserhalb  $O$  ist  $F(P, \varphi)$  stetig in den beiden Variablen  $P$  und  $\varphi$  <sup>7)</sup> zusammen.

Der Funktion  $F(P, \varphi)$  ordnen wir nun eine Metrik zu, wie folgt: Wir bezeichnen den Wert des Integrals über  $F(P, \varphi)$  längs einer gerichteten, stückweise stetig differenzierbaren Kurve  $c$  (wir nennen solche  $c$  zulässig) mit  $I(c)$ , insbesondere bezeichnen wir den Wert dieses Integrals längs der Strecke mit dem Anfangspunkt  $A$  und dem Endpunkt  $B$  mit  $I(A, B)$ . Wegen (3.1) ist  $I(O, P)$  endlich für jedes  $P$ . Daher ist  $I(A, B)$  stets endlich. Um  $r(A, B)$  zu definieren, verbinden wir  $A$  mit  $B$  durch zulässige Kurven mit  $A$  als Anfangspunkt und setzen

$$(3.4) \quad r(A, B) = \text{untere Grenze } I(c).$$

<sup>7)</sup> Wie  $F(O, \varphi)$  definiert wird, ist gleichgültig. Bequem für manche Zwecke ist es  $F(P, \varphi) = \frac{1}{g(\varphi)}$  zu setzen.

Dann ist  $r(A, B)$  stets endlich und genügt den Axiomen (2.3a, b, c), ferner ist klar, dass  $r(\cdot)$  topologisch äquivalent zu  $e(\cdot)$  ist.

Es ist nun leicht zu sehen, dass  $r(A, B)$  in jedem Punkte  $P_0 \neq O$  normal ist und  $k_{P_0}$  zur Indikatritz hat. Es sei nämlich  $\{A_\nu, B_\nu\} \subset W(P_0, \varphi)$ . Dann folgt zunächst aus dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung, dass

$$(3.5) \quad \frac{I(A_\nu, B_\nu)}{e(A_\nu, B_\nu)} \rightarrow F(P_0, \varphi)$$

also wegen  $r(A_\nu, B_\nu) \leq I(A_\nu, B_\nu)$

$$(3.6) \quad \overline{\lim} \frac{r(A_\nu, B_\nu)}{e(A_\nu, B_\nu)} \leq F(P_0, \varphi).$$

Ferner sei die gerichtete, von  $A_\nu$  nach  $B_\nu$  führende, zulässige Kurve  $c_\nu$  so gewählt, dass

$$(3.7) \quad \left| \frac{r(A_\nu, B_\nu)}{e(A_\nu, B_\nu)} - \frac{I(c_\nu)}{e(A_\nu, B_\nu)} \right| \leq \frac{1}{\nu}$$

wird. Da  $F(P, \varphi)$  in  $P$  und  $\varphi$  stetig ist, gilt

$$(3.8) \quad F(P, \varphi) = F(P_0, \varphi) + \vartheta(P, \varphi) \cdot \varepsilon(e(P, P_0))$$

mit  $|\vartheta(P, \varphi)| < 1$  und  $\varepsilon(e(P, P_0)) \rightarrow 0$  für  $P_0 \rightarrow P$ . Ist  $e(c_\nu)$  die euklidische Länge von  $c_\nu$ , so muss

$$(3.9) \quad \frac{e(c_\nu)}{e(A_\nu, B_\nu)} < R < \infty$$

sein, da sonst offenbar für eine passende Teilfolge  $\{\nu_n\}$  aus  $\{\nu\}$

$$\frac{I(c_{\nu_n})}{I(A_{\nu_n}, B_{\nu_n})} \rightarrow \infty$$

und damit

$$\frac{r(A_{\nu_n}, B_{\nu_n})}{I(A_{\nu_n}, B_{\nu_n})} \rightarrow \infty$$

gälte. Aus (3.789) und  $c_\nu \rightarrow P_0$  folgt

$$(3.10) \quad \frac{r(A_\nu, B_\nu)}{e(A_\nu, B_\nu)} - \frac{\int_{c_\nu} F(P_0, \varphi) ds}{e(A_\nu, B_\nu)} \rightarrow 0.$$

Für den Integrand  $\bar{F}(P, \varphi) = F(P_0, \varphi)$  sind die Geraden Minimalanten ( $\bar{F}(P, \varphi)$  definiert eine Minkowskische Metrik). Deshalb ist

$$(3.11) \quad \int_{c_\nu} F(P_0, \varphi) ds \geq \int_{A_\nu B_\nu} F(P_0, \varphi) ds = e(A_\nu, B_\nu) F(P_0, \varphi).$$

Aus (3.10) und (3.11) folgt

$$(3.12) \quad \lim \frac{r(A_\nu, B_\nu)}{e(A_\nu, B_\nu)} = F(P_0, \varphi).$$

Die Formeln (3.6) und (3.7) zeigen, dass  $r(\cdot)$  in  $P_0$  die Indikatritz  $k_{P_0}$  hat.

Nun sei  $\{A_\nu, B_\nu\} \subset W(O, \varphi)$ . Aus (3.2) folgt

$$(3.13) \quad \lim \frac{e(A_\nu, B_\nu)}{r(A_\nu, B_\nu)} \geq \lim \frac{e(A_\nu, B_\nu)}{I(A_\nu, B_\nu)} \geq g(\varphi).$$

Es seien dann gemäss (3.2) die Folgen  $r_\nu \downarrow 0$  und  $r'_\nu \downarrow 0$  so gewählt, dass

$$(3.14) \quad \frac{r_\nu}{\sqrt{2\Phi(r_\nu, \varphi)}} \rightarrow g(\varphi), \quad \frac{r'_\nu}{\sqrt{2\Phi(r'_\nu, \varphi)}} \rightarrow G(\varphi).$$

Da  $r(\cdot)$  in  $P_\nu = (r_\nu, \varphi)$  die Indikatritz  $k_{P_\nu}$  hat, kann  $h_\nu > 0$  so klein bestimmt werden, dass für  $Q_\nu = (r_\nu + h_\nu, \varphi)$  die Beziehung

$$(3.15) \quad \left| \frac{e(P_\nu, Q_\nu)}{r(P_\nu, Q_\nu)} - \frac{r_\nu}{\sqrt{2\Phi(r_\nu, \varphi)}} \right| < \frac{1}{\nu}$$

gilt. Ebenso kann  $h'_\nu \downarrow 0$  so bestimmt werden, dass für  $P'_\nu = (r'_\nu, \varphi)$  und  $Q'_\nu = (r'_\nu + h'_\nu, \varphi)$  die Beziehung

$$(3.16) \quad \left| \frac{e(P'_\nu, Q'_\nu)}{r(P'_\nu, Q'_\nu)} - \frac{r'_\nu}{\sqrt{2\Phi(r'_\nu, \varphi)}} \right| < \frac{1}{\nu}$$

gilt. Aus (3.13), (3.14) und (3.15) folgt, dass  $r = g(\varphi)$  die untere Indikatritz von  $r(\cdot)$  in  $O$  ist. Aus (3.14) und (3.16) folgt für die obere Indikatritz  $r = G^*(\varphi)$  von  $r(\cdot)$  in  $O$ , dass

$$(3.17) \quad G^*(\varphi) \geq G(\varphi)$$

ist. Der vollständige Beweis von  $G^*(\varphi) = G(\varphi)$  erfordert ein näheres Eingehen auf die Struktur der Fläche  $z = \Phi(r, \varphi)$ . Um diese hier nicht noch einmal auseinandersetzen zu müssen, werde ich mich mit Andeutungen des Beweises begnügen. Man betrachte zunächst

den Fall  $G(\varphi)=g(\varphi)$ . Wenn für alle  $\varphi$  die Ungleichung  $0 < g(\varphi) < \infty$  gilt, so ist die Minkowskigeometrie mit  $r=g(\varphi)$  als Einheitskreis um  $O$  eine wohlbekannte Lösung. Übrigens liefert auch die in B. F. (p. 94) für diesen Fall angegebene Fläche  $z=r^2/2g^2(\varphi)$  vermöge (3.3) gerade diese Lösung. Wenn nun  $g(\varphi)$  nicht obiger Ungleichung genügt, so zerlege man den Bereich  $0 \leq \varphi < 2\pi$  in die drei Teile: 1)  $g(\varphi)=\infty$ , 2)  $0 < g(\varphi) < \infty$ , 3)  $g(\varphi)=0$ . Aus (3.17) folgt dass ( $G^*(\varphi)=\infty$  für  $g(\varphi)=\infty$ ). Die Konstruktion von  $\Phi$  zeigt, dass es im Falle, 2) stets ein  $\varrho(\varphi) > 0$  gibt derart, dass

$$\Phi(r, \varphi) = r^2/2g^2(\varphi) \quad \text{für } 0 < r < \varrho(\varphi)$$

und hieraus schliesst man leicht, dass  $G(\varphi)=g(\varphi)$  im Falle 2). Schliesslich ist der Teil 3) der Fläche aus Torsenstücken und dem Stück einer Rotationsfläche zusammengesetzt, deren Form nach B. F. explizite angegeben kann, und daraus kann dann  $G(\varphi)=g(\varphi)$  auch in diesem Falle geschlossen werden.

Wenn  $G(\varphi)$  nicht mit  $g(\varphi)$  identisch ist, so ist die Konstruktion derart, dass die Fläche  $\Phi(r, \varphi)$  aus der zu  $r=g(\varphi)$  als Krümmungsindikatriz konstruierten hervorgeht, indem letztere in Zonen um  $O$  herum abgeändert wird und diese Zonen beliebig selten gewählt werden können. Dann zeigt der schon erledigte Teil, dass die (3.6) zugrunde liegende Wahl sehr kleiner Strecken  $\overline{P'_v Q'_v}$ , die gerade in diese Zonen fallen, in gewissem Sinne die günstigste ist.

Damit ist dann alles gezeigt, ausser dass der Raum mit der Metrik  $r(\ )$  konvex ist. Dies folgt nun aus Mengers Untersuchungen<sup>8)</sup>. Es wird dort ein Integralbegriff benutzt, der für zulässige Kurven mit dem üblichen (Riemannschen oder Lebesgueschen) Kurvenintegral zusammenfällt. Ferner wird gezeigt, dass zwei Punkte  $A, B$  unter den hier gültigen Voraussetzungen stets durch eine rektifizierbare gerichtete Kurve  $c$  verbunden werden können, für die

$$\int_c F(P, \varphi) ds = r(A, B)$$

wird, und für keine solche Kurve dieses Integral einen kleineren Wert bekommt. Daher gilt für jeden Punkt  $C$  auf  $c$

$$r(A, C) + r(C, B) = r(A, B)$$

dies enthält aber die Konvexität der Metrik.

<sup>8)</sup> I. c. 2), insbesondere § 56, Erstes Existenztheorem für Minimanten.

Bemerkungen. Da die Fläche  $z=\Phi(r, \varphi)$  im allgemeinen nicht im scharfen Sinne konvex ist, werden es die ebenen Schnitte  $z=\text{konst.}$  auch nicht immer sein, d. h. unser Integrand  $F(P, \varphi)$  wird ausserhalb  $O$  nicht überall regulär, sondern nur quasiregulär sein. Die Regularität kann jedoch durch eine triviale Änderung von  $\Phi$  erreicht werden, indem man  $\Phi(r, \varphi)+r^4$  anstatt  $\Phi(r, \varphi)$  betrachtet. Die Indikatriz in  $O$  ändern sich dabei nicht. Ferner ist leicht zu sehen, dass  $\Phi(r, \varphi)$  ausserhalb  $O$  bei gegebenem  $d$  mindestens  $d$ -mal stetig differenzierbar gewählt werden kann, ohne dass die Indikatriz in  $O$  sich ändern. Man bekommt so schliesslich einen ausserhalb  $O$  regulären, beliebig glatten Integranden, und jeder Punkt kann mit  $O$  durch eine rektifizierbare, ausserhalb  $O$  beliebig glatte Extremale verbunden werden.

4. Wir kommen nun zu den Differenzierbarkeitseigenschaften der Extremalen. In einer Umgebung von  $O$  (inklusive  $O$ ) sei zu jedem Punkt  $P$  eine beschränkte konvexe Kurve  $k_P$  definiert, die den Punkt im Inneren enthält und sich stetig mit  $P$  ändert. Wie schon in der vorangehenden Nummer gezeigt wurde, gehört zu dieser Kurvenfamilie ein Integrand  $F(P, \varphi)$  und eine Metrik  $r(\ )$ , die im Punkte  $P$  die Kurve  $k_P$  zur Indikatriz haben. Nach dem unter<sup>8)</sup> zitierten Satz von Menger können je zwei hinreichend nahe bei  $O$  gelegene Punkte  $P, Q$  durch eine Minimante  $c$  verbunden werden derart, dass  $\int_c F(P, \varphi) ds = r(P, Q)$  wird und für keine von  $P$  nach  $Q$  führende Kurve dieses Integral einen kleineren Wert bekommt. Wir nehmen an, dass  $c$  durch  $O$  geht ( $P=Q$  und  $Q=O$  zugelassen), und wollen  $c$  in  $O$  auf Differenzierbarkeit hin untersuchen. Wenn man über jede Extremale etwas aussagen will, muss vorausgesetzt werden, dass  $k$  im scharfen Sinne konvex ist. Sonst gilt nämlich folgender, wie wir sehen werden, wesentlicher Hilfsatz nicht.

**Hilfssatz.** Für Folgen

$$A_v \rightarrow O, \quad B_v \rightarrow O, \quad C_v \rightarrow O \quad (A_v \neq B_v \neq C_v \neq A_v)$$

gilt

$$(4.1) \quad R(A_v, B_v, C_v) = \frac{r(A_v, B_v) + r(B_v, C_v)}{r(A_v, C_v)} \rightarrow 1$$

dann und nur dann, wenn

$$(4.2) \quad E(A_v, B_v, C_v) = \frac{e(A_v, B_v) + e(B_v, C_v)}{e(A_v, C_v)} \rightarrow 1$$

gilt.

Setzt man:

$$\alpha_\nu = \sphericalangle C_\nu A_\nu B_\nu, \quad \beta_\nu = \sphericalangle A_\nu B_\nu C_\nu, \quad \gamma_\nu = \sphericalangle B_\nu C_\nu A_\nu,$$

so zeigt eine leichte Rechnung, dass (4.2) dann und nur dann gilt, wenn (mindestens) eins der beiden Paare von Gleichungen gilt:

$$(4.3) \quad \begin{array}{ll} \alpha_\nu \rightarrow 0 & \text{und} \quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \rightarrow 0, \\ \gamma_\nu \rightarrow 0 & \text{und} \quad \frac{\gamma_\nu}{\beta_\nu} \rightarrow 0. \end{array}$$

Es genügt den Hilfsatz für solche Folgen  $\{A_\nu\}$ ,  $\{B_\nu\}$ ,  $\{C_\nu\}$  zu beweisen, für die die Folgen  $\left\{\frac{\sin \alpha_\nu}{\sin \gamma_\nu}\right\}$ ,  $\left\{\frac{A_\nu B_\nu}{A_\nu C_\nu}\right\}$ ,  $\left\{\frac{B_\nu C_\nu}{A_\nu C_\nu}\right\}$  konvergieren und zwar gegen  $\eta$  ( $\infty$  zugelassen) bzw. gegen Strahlen mit den Richtungen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Es existieren dann auch

$$a = \lim \alpha_\nu, \quad \beta = \lim \beta_\nu, \quad \gamma = \lim \gamma_\nu.$$

Stellt dann  $r = g(\varphi)$  die Kurve  $k_0$  dar, so folgt aus den Überlegungen der vorigen Nummer, falls wieder

$$\Psi(x, y) = \frac{e(x, y)}{r(x, y)}$$

gesetzt wird, dass

$$(4.4) \quad \Psi(A_\nu, B_\nu) \rightarrow g(\varphi_1), \quad \Psi(B_\nu, C_\nu) \rightarrow g(\varphi_2), \quad \Psi(A_\nu, C_\nu) \rightarrow g(\varphi_3)$$

gilt. Durch eine triviale Umformung bekommt man

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & \frac{R(A_\nu, B_\nu, C_\nu)}{E(A_\nu, B_\nu, C_\nu)} \cdot \frac{1}{\Psi(A_\nu, C_\nu)} = \\ & = \left[ \Psi(A_\nu, B_\nu) \left( 1 + \frac{e(B_\nu, C_\nu)}{e(A_\nu, B_\nu)} \right) \right]^{-1} + \left[ \Psi(B_\nu, C_\nu) \left( 1 + \frac{e(A_\nu, B_\nu)}{e(B_\nu, C_\nu)} \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Nun gelte zunächst  $E(A_\nu, B_\nu, C_\nu) \rightarrow 1$  und es sei etwa

$$\eta = \lim \frac{e(B, C)}{e(A, B)} = \frac{\sin \alpha_\nu}{\sin \gamma_\nu} \leq 1.$$

Aus (4.3) folgt  $\alpha_\nu \rightarrow 0$ , also  $\varphi_2 = \varphi_3$ . Ist nun  $\eta = 0$ , so liefert (4.6) sofort die Behauptung (4.1). Ist  $\eta > 0$ , so muss auch  $\gamma_\nu \rightarrow 0$ , daher  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$  gelten, woraus unter Benutzung von (4.6) wieder (4.1) folgt. In diesem Teil des Hilfsatzes wurde übrigens die starke Konvexität noch nicht benutzt.

Es gelte jetzt  $R(A_\nu, B_\nu, C_\nu) \rightarrow 1$ . Dann ist  $E(A_\nu, B_\nu, C_\nu)$  wegen

$$E(A_\nu, B_\nu, C_\nu) = \frac{1}{\Psi(A_\nu, C_\nu)} \frac{r(A_\nu, B_\nu) \Psi(A_\nu, B_\nu) + r(B_\nu, C_\nu) \Psi(B_\nu, C_\nu)}{r(A_\nu, C_\nu)}$$

beschränkt. Wir wollen zuerst zeigen, dass nicht  $\alpha > 0$  und  $\gamma > 0$  sein kann. Wenn dies gälte, so wäre auch  $\beta > 0$ , weil sonst

$$(4.7) \quad E(A_\nu, B_\nu, C_\nu) = \frac{\sin \alpha_\nu + \sin \gamma_\nu}{\sin \beta_\nu}$$

unbeschränkt wäre. Für  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  würde aber aus (4.6.71) folgen, dass

$$\frac{\sin(\alpha + \gamma)}{g(\varphi_3)} = \frac{\sin \gamma}{g(\varphi_1)} + \frac{\sin \alpha}{g(\varphi_2)}$$

ist, was nach (2.2) der Tatsache widerspricht, dass  $k_0$  im scharfen Sinne konvex ist.

Demnach muss  $\alpha = 0$  oder  $\gamma = 0$  sein. Sei etwa  $\gamma = 0$ . Wenn dann

$$\overline{\lim} \frac{\gamma_\nu}{\beta_\nu} > 0$$

wäre und wir annehmen, dass die Folge

$$\frac{e(A_\nu, B_\nu)}{e(A_\nu, C_\nu)} = \frac{\sin \gamma_\nu}{\sin \beta_\nu}$$

bereits gegen einen Grenzwert  $\zeta$  ( $> 0$ ) strebt, so gälte  $\alpha_\nu \rightarrow \pi$  daher nach (4.3)

$$E(B_\nu, A_\nu, C_\nu) \rightarrow 1$$

und damit

$$\frac{e(B_\nu, C_\nu)}{e(A_\nu, C_\nu)} \rightarrow 1 + \zeta.$$

Dann gälte aber wegen  $\gamma = 0$

$$\lim \Psi(A_\nu, C_\nu) = \lim \Psi(B_\nu, C_\nu) = g(\varphi_3)$$

und daher

$$\underline{\lim} R(A_\nu, B_\nu, C_\nu) = \underline{\lim} \frac{r(A_\nu, B_\nu) + \Psi^{-1}(B_\nu, C_\nu) \frac{e(B_\nu, C_\nu)}{e(A_\nu, C_\nu)}}{\Psi^{-1}(A_\nu, C_\nu)} \geq 1 + \zeta.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.



Bevor wir weitergehen, wollen wir uns an einem Beispiel davon überzeugen, dass die scharfe Konvexität von  $k$  zu seiner Gültigkeit nötig ist. Dazu sei  $k_0$  die Kurve

$$y = \begin{cases} \pm 1 & \text{für } |x| \leq 2, \\ \pm \sqrt{1-(x+2)^2} & \text{für } -3 \leq x < -2, \\ \pm \sqrt{1-(x-2)^2} & \text{für } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

und  $k_P$  gehe aus  $k_0$  durch die Translation hervor, die  $O$  in  $P$  überführt. Wir bekommen so eine symmetrische Minkowskische Metrik  $m(X, Y)$ , in der die Geraden Minimanten sind. Ausser den Geraden gibt es aber auch andre Kurven, die Minimanten sind, z. B. ist die Summe der beiden Strecken die für  $a > 0$  den Punkt  $(a, a)$  mit  $(0, 0)$  und  $(0, 0)$  mit  $(a, -a)$  verbinden eine Extremale, da

$$m((a, a), 0) + m(0, (a, -a)) = m((a, a), (a, -a))$$

ist. Setzt man für  $a$  die Werte  $1/n$  ein und setzt:

$$A_n = (1/n, 1/n), \quad B_n = (0, 0), \quad C_n = (1/n, -1/n),$$

so ist demnach:

$$\frac{m(A_n, B_n) + m(B_n, C_n)}{m(A_n, C_n)} = 1, \quad \text{jedoch} \quad \frac{e(A_n, B_n) + e(B_n, C_n)}{e(A_n, C_n)} = \sqrt{2}.$$

Man kann auch Extremalen mit  $O$  als Anfangspunkt konstruieren, die den Hilfsatz widerlegen, und zwar so: Wir nehmen die Strahlen  $w_1: \varphi = \pi/8$  und  $w_2: \varphi = 5\pi/8$ . Ausgehend von einem Punkt  $P_0$  auf  $w_1$  verfolgen wir den Strahl parallel zu  $\varphi = 7\pi/4$  bis zum Schnittpunkt  $P_1$  mit  $w_2$  gehen von dort parallel zu  $\varphi = 5\pi/4$  bis zum Schnittpunkt  $P_2$  mit  $w_1$  von da parallel zu  $\varphi = 7\pi/4$  bis zum Schnittpunkt  $P_3$  mit  $w_2$  u. s. w. Dann ist der unendliche Streckenzug  $\sum_{i=0}^{\infty} \overline{P_i P_{i+1}} + O$  eine Minimante von  $P_0$  nach  $O$  (und daher wegen der Symmetrie von  $m(\cdot)$  auch eine von  $O$  nach  $P$ ), da für alle  $i$

$$m(P_{i-1}, P_i) + m(P_i, P_{i+1}) = m(P_{i-1}, P_{i+1})$$

ist. Demnach gilt:

$$\frac{m(P_{2i-1}, P_{2i}) + m(P_{2i}, P_{2i+1})}{m(P_{2i-1}, P_{2i+1})} = 1, \quad \text{jedoch} \quad \lim E(P_{2i-1}, P_{2i}, P_{2i+1}) > 1.$$

Wir kehren zum allgemeinen Fall zurück, und wenden den Hilfsatz wie folgt an: Unter denselben Voraussetzungen wie oben sei  $c$  eine von  $P$  nach  $Q$  führende Minimante, die  $O$  enthält ( $O=P$  oder  $O=Q$  zugelassen). Es sei dann  $(A_n, B_n, C_n)$  eine Folge von Punkte-tripeln auf  $c$ , und zwar treffe man von  $P$  kommend erst  $A_n$ , dann  $B_n$ , dann  $C_n$ , sodass

$$R(A_n, B_n, C_n) = \frac{r(A_n, B_n) + r(B_n, C_n)}{r(A_n, C_n)} = 1$$

ist. Gilt nun  $A_n \rightarrow 0, B_n \rightarrow 0, C_n \rightarrow 0$ , so folgt aus dem Hilfsatz, dass

$$(4.8) \quad E(A_n, B_n, C_n) \rightarrow 1$$

strebt. In wie weit dies eine Differenzierbarkeitsaussage ist, folgt aus (4.3). (4.8) gilt sicher für jede Kurve  $c$ , die in  $O$  stetig differenzierbar ist; denn dann gilt  $\beta_n = \angle A_n B_n C_n \rightarrow \pi$ , sodass sogar beide Paare von Gleichungen in (4.3) erfüllt sind. Andererseits gilt (4.8) nicht für jede in  $O$  differenzierbare Kurve, wie man an der Kurve

$$y = x^2 \cdot \sin e^{1/x} \quad (y = 0 \text{ für } x = 0)$$

nachrechnen kann. Ferner ist leicht zu sehen, dass eine Kurve  $c$ , die  $O$  im Inneren enthält und dort eine rechte Halbtangente besitzt, wenn sie die Eigenschaft (4.8) hat, eine Tangente überhaupt besitzt. Es fragt sich daher, ob (4.8) stets die Differenzierbarkeit von  $c$  in  $O$  nach sich zieht. Wir wollen an einem Beispiel zeigen, dass das nicht der Fall ist.

5. Ein solches Beispiel liefert die Kurve bestehend aus dem Punkt  $O$  und den Kurven

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \varphi &= \sin \log |\log r|, \\ \varphi &= \sin \log |\log r| + \pi. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$f(r) = \sin \log |\log r|$$

und stellen vor dem Beweis von (4.8) einige Eigenschaften der Kurve zusammen. Wenn  $r_v^1 \rightarrow 0$  und  $r_v^2 \rightarrow 0$  und  $1/a < r_v^1/r_v^2 < a$ ,  $1 < a < \infty$ , dann gilt

$$|f(r_v^1) - f(r_v^2)| = |\sin \log |\log r_v^1| - \sin \log |\log r_v^2|| \leq 2 \cdot \left| \sin \frac{\log \frac{\log r_v^1}{\log r_v^2}}{2} \right|$$

und da  $\frac{\log r_v^1}{\log r_v^2} \rightarrow 1$ , so hat man also

$$(5.2) \quad f(r_v^1) - f(r_v^2) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \frac{1}{a} < \frac{r_v^1}{r_v^2} < a \quad 1 < a < \infty \quad \text{und} \quad r_v^1 \downarrow 0, r_v^2 \downarrow 0.$$

Es ist

$$(5.3) \quad f'(r) = \frac{\cos \log |\log r|}{r \log r}, \quad 0 < r < 1.$$

Bezeichnet  $k$  den Ast von (5.1) bestehend aus  $O$  und  $\varphi = f(r)$ , ist ferner  $s$  die von  $O$  aus auf  $k$  gemessene Bogenlänge von  $k$ ,  $P(s)$  der zum Wert  $s$  gehörige Punkt von  $k$ , so gilt

$$ds = \sqrt{1 + r^2 f'^2(r)} dr$$

und daher wegen (5.3) für  $s_v^1 \rightarrow 0, s_v^2 \rightarrow 0$  ( $s_v^1 \neq s_v^2$ )

$$(5.4) \quad \frac{|s_v^1 - s_v^2|}{e(P(s_v^1), P(s_v^2))} \rightarrow 1.$$

Ist  $\mu(s)$  der mit passendem Vorzeichen gerechnete Winkel zwischen dem Strahl  $\overrightarrow{OP(s)}$  und der Tangente an  $k$  in  $P(s)$ , so gilt wegen (5.3)

$$(5.5) \quad \operatorname{tg} \mu(r) = r \frac{d\varphi}{dr} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow 0.$$

Aus (5) und (5.5) sieht man, dass für  $0 < r_1 < r_3 < 1$  eine Abschätzung

$$(5.6) \quad \int_{r_1}^{r_3} \left| \frac{d\mu(r)}{dr} \right| dr \leq \int_{r_1}^{r_3} \left| \frac{d \operatorname{tg} \mu(r)}{dr} \right| dr \leq \text{konst.} \frac{|\log r_3 - \log r_1|}{|\log r_3|}$$

gilt.

Wir wollen nun (4.8) für die Kurve (5.1) beweisen. Wir orientieren die Kurve so, dass  $O$  auf den Punkt  $(1, f(1) + \pi)$  folgt. Es seien dann  $A_v^i = (r_v^i, f(r_v^i))$ ,  $i = 1, 2, 3$ , drei gegen  $O$  konvergierende Punktfolgen auf (5.1) und zwar folge  $A_v^2$  auf  $A_v^1$  und  $A_v^3$  auf  $A_v^2$ . Zum Beweis von

$$(5.7) \quad E(A_v^1, A_v^2, A_v^3) \rightarrow 1$$

dürfen wir annehmen, dass die Grenzwerte

$$e_{ij} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r_v^i}{r_v^j}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

alle existieren ( $\infty$  zugelassen) und dass jede Folge  $\{A_v^i\}$  entweder ganz vor  $O$  liegt oder ganz dem abgeschlossenen Bogen  $\langle O, (1, f(1)) \rangle$

von (5.1) angehört. Aus Symmetriegründen genügt es ferner, die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden: I.  $\{A_v^1\}$  liegt vor  $O$ , und  $\{A_v^2\}$  und  $\{A_v^3\}$  nicht. II. Weder  $\{A_v^1\}$  noch  $\{A_v^2\}$  noch  $\{A_v^3\}$  liegt vor  $O$ .

Im Falle I ist  $r_v^2 < r_v^3$ , daher  $e_{21} \leq e_{31}, e_{23} \leq 1$ . Es ist

$$E(A_v^1, A_v^2, A_v^3) = \frac{\left[ (r_v^1)^2 + (r_v^2)^2 + 2r_v^1 r_v^2 \cos(f(r_v^1) - f(r_v^2)) \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ (r_v^2)^2 + (r_v^3)^2 - 2r_v^2 r_v^3 \cos(f(r_v^2) - f(r_v^3)) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[ (r_v^1)^2 + (r_v^3)^2 + 2r_v^1 r_v^3 \cos(f(r_v^1) - f(r_v^3)) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Ist nun  $e_{31} = 0$ , so ist auch  $e_{21} = 0$  und (5.7) folgt sofort, indem Zähler und Nenner durch  $r_v^1$  dividiert werden. Daher werde  $0 \leq e_{13} < \infty$  angenommen. Dann bleiben die Fälle 1)  $e_{23} = 0$  und  $e_{13} = 0$ ; 2)  $e_{23} = 0$  und  $0 < e_{13} < \infty$ ; 3)  $0 < e_{23} \leq 1$  und  $e_{13} = 0$ ; 4)  $0 < e_{23} \leq 1, 0 < e_{13} < \infty$ . Man kürze nun in allen 4 Fällen durch  $r_v^3$ . Wenn  $0 < e_{ij} < \infty$ , so folgt aus (5.2), dass

$$\cos(f(r_v^1) - f(r_v^i)) \rightarrow 1$$

geht, sodass in allen Fällen

$$\lim E(A_v^1, A_v^2, A_v^3) = \frac{(e_{13} + e_{23}) + (1 - e_{23})}{e_{13} + 1} = 1$$

wird.

Im Falle II ist  $r_v^1 < r_v^2 < r_v^3$ , daher  $0 \leq e_{13} \leq e_{23} \leq 1$  und

$$E(A_v^1, A_v^2, A_v^3) = \frac{\left[ (r_v^1)^2 + (r_v^2)^2 - 2r_v^1 r_v^2 \cos(f(r_v^1) - f(r_v^2)) \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ (r_v^2)^2 + (r_v^3)^2 - 2r_v^2 r_v^3 \cos(f(r_v^2) - f(r_v^3)) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[ (r_v^1)^2 + (r_v^3)^2 - 2r_v^1 r_v^3 \cos(f(r_v^1) - f(r_v^3)) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Man kürze nun durch  $r_v^3$  und verwende dieselbe Schlussweise wie im Falle I. Man sieht dann, dass für  $e_{13} \neq 1$  stets

$$\lim E(A_v^1, A_v^2, A_v^3) = \frac{(e_{23} - e_{13}) + (1 - e_{23})}{1 - e_{13}} = 1$$

wird.

Der ausgelassene Fall  $e_{13} = 1$  (es sind dann alle  $e_{ij}$  gleich 1) spielt geometrisch wirklich eine Sonderrolle. Wenn die Kurve bestehend aus  $O$  und den Ästen  $\varphi = h(r)$  und  $\varphi = h(r) + \pi$  nämlich in  $O$  diffe-

renzierbar ist, d. h. wenn  $h(r)$  für  $r \rightarrow 0$  einen Grenzwert zustrebt, so gilt für  $r'_v \rightarrow 0$  und  $r''_v \rightarrow 0$  stets

$$\cos(f(r'_v) - f(r''_v)) \rightarrow 0.$$

Unsere vorangehenden Überlegungen gelten, während bereits festgestellt war, dass (5.7) nicht für jede differenzierbare Kurve gilt. Der ausstehende Fall erledigt sich so: Es ist  $\sphericalangle A_v^1 A_v^2 A_v^3$  mindestens gleich  $\pi$  minus der Gesamtvariation von  $\mu(r)$  von  $A_v^1$  bis  $A_v^3$ . Da nun für  $e_{13}=1$

$$\frac{|\log r_v^3 - \log r_v^1|}{|\log r_v^3|} \rightarrow 0$$

strebt, folgt aus (5.6) dass  $\sphericalangle A_v^1 A_v^2 A_v^3 \rightarrow \pi$  strebt, und daraus unter Benutzung von (4.3) die Behauptung.

**6.** Es ist nun leicht, mit Hilfe der Kurve  $k$  eine Metrik  $r(\cdot)$  zu konstruieren, die überall in der Ebene normal ist, deren Indikatritz  $k_0$  in  $O$  im scharfen Sinne konvex ist, und deren Extremalen in  $O$  nicht differenzierbar sind. Wir werden nämlich ein  $r(\cdot)$  mit folgenden Eigenschaften angeben:

1)  $r(\cdot)$  ist euklidisch.

2)  $r(\cdot)$  ist ausserhalb  $O$  analytisch, d. h. der Integrand des zu  $r(\cdot)$  gehörigen Variationsproblems hängt ausserhalb  $O$  analytisch von Punkt und Richtung ab.

3) Die Indikatritz von  $r(\cdot)$  in  $O$  ist der Einheitskreis mit  $O$  als Mittelpunkt.

4) Die Extremalen, die hier wegen der Euklidizität durch je zwei Punkte eindeutig bestimmt sind, sind in  $O$  nicht differenzierbar.

Durch jeden von  $O$  verschiedenen Punkt  $P=(r, \varphi)$  der Ebene geht genau eine Kurve der Schar

$$\varphi = f(r) + \lambda, \quad 0 \leq \lambda < 2\pi.$$

Bezeichnet  $s$  die auf dieser Kurve von  $O$  aus gemessene Bogenlänge, so bestimmt daher  $P$  die Werte  $s$  und  $\lambda$  eindeutig und wird umgekehrt eindeutig durch diese Werte bestimmt. Deshalb setzen wir auch  $P=(s, \lambda)$ . Ist dann  $P_1=(s_1, \lambda_1)$ ,  $P_2=(s_2, \lambda_2)$ , so setzen wir

$$(6.1) \quad r(P_1, P_2) = [s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)]^{\frac{1}{2}}.$$

Die Metrik  $r(\cdot)$  ist dann euklidisch, sie genügt daher gewiss den Axiomen (2.3abc). Da die Transformation, die  $O$  sich selbst und dem Punkt  $(r, \varphi)$  den Punkt  $(s=r, \lambda=\varphi)$  zuordnet, ausserhalb  $O$  analytisch ist, so ist der Integrand des zu  $r(\cdot)$  gehörigen Variationsproblems ausserhalb  $O$  analytisch in Punkt und Richtung, die Indikatritz existiert und ist daher konvex, sie ist ferner beschränkt und enthält ihren Aufpunkt im Inneren. Es wäre auf Grund der Euklidizität von  $r(\cdot)$  leicht zu sehen, dass die Indikatritz ausserhalb  $O$  überall im scharfen Sinne konvex ist.

Wir wollen nun zeigen, dass für  $P_v^i = (r_v^i, \varphi_v^i) = (s_v^i, \lambda_v^i) \rightarrow 0$ ,  $i=1, 2$ , stets

$$(6.2) \quad \frac{e(P_v^1, P_v^2)}{r(P_v^1, P_v^2)} = \Psi(P_v^1, P_v^2) \rightarrow 1$$

gilt. Da beide Metriken gegenüber Drehungen  $r' = r$ ,  $\varphi' = \varphi + t$  um  $O$  invariant sind, darf angenommen werden, dass  $\lambda_v^2 = 0$  für alle  $v$  gilt. Ist dann auch  $\lambda_v^1 = 0$ , so folgt (6.2) aus (6.1) und (5.4), ebenso, wenn  $s_v^1 = s_v^2$  für alle  $v$  gilt. (Für  $s_v^1 = s_v^2$  ist  $\lambda_v^1 = \varphi_v^1 - \varphi_v^2$ ). Im allgemeinen Falle darf angenommen werden, dass  $s_v^2 \geq s_v^1$ ,  $\lambda_v^1 \geq 0$  ist. Es sei dann  $P_v$  der Punkt  $(s_v^1, 0) = (r_v^1, \varphi_v^1 - \lambda_v^1)$ . Es gilt dann, wie soeben gezeigt wurde,

$$(6.3) \quad \Psi(P_v^1, P_v) \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad \Psi(P_v, P_v^2) \rightarrow 1.$$

Es genügt (6.2) in dem Fall zu beweisen, wo die Grenzwerte

$$(6.4) \quad \lambda = \lim \lambda_v^1, \quad \alpha = \lim \frac{e(P_v, P_v^2)}{e(P_v^1, P_v)} = \lim \frac{r(P_v, P_v^2)}{e(P_v^1, P_v)} = \lim \frac{r(P_v, P_v^2)}{r(P_v^1, P_v)}$$

existieren. Da  $r(\cdot)$  euklidisch ist, hat man

$$(6.5) \quad r(P_v^1, P_v^2) = [r^2(P_v^1, P_v) + r^2(P_v, P_v^2) + 2r(P_v^1, P_v)r(P_v, P_v^2) \sin \lambda_v^1 / 2]^{\frac{1}{2}}.$$

Ist  $\alpha = 0$  bzw.  $\alpha = \infty$ , so gilt

$$\frac{e(P_v^1, P_v)}{e(P_v^1, P_v^2)} \rightarrow 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{e(P_v, P_v^2)}{e(P_v^1, P_v^2)} \rightarrow 1$$

und (6.2) folgt aus (6.3) und (6.5).

Es sei daher  $0 < a < \infty$ . Bezeichnet  $\psi_\nu$  den Winkel, den der Strahl  $\overrightarrow{OP}$  mit dem Strahl  $\overrightarrow{P_\nu P_\nu^2}$  bildet (mit geeignetem Vorzeichen) so ist

$$\sphericalangle P_\nu^2 P_\nu P_\nu^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda_\nu^1}{2} + \psi_\nu$$

daher

$$(6.6) \quad e(P_\nu^1, P_\nu^2) = \left[ e^2(P_\nu^1, P_\nu) + e^2(P_\nu, P_\nu^2) + 2e(P_\nu^1, P_\nu)e(P_\nu, P_\nu^2) \sin\left(\frac{\lambda_\nu^1}{2} + \psi_\nu\right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass  $\psi_\nu \rightarrow 0$ . Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

1)  $\lambda \neq 0$ . Dann ist

$$(6.7) \quad \lim \frac{e(P_\nu^1, P_\nu^2)}{e(P_\nu, O)} = \sin \frac{\lambda}{2} > 0$$

und daher wegen  $0 < a < \infty$

$$(6.8) \quad 0 < \lim \frac{e(P_\nu, P_\nu^2)}{e(P_\nu, O)} < \infty.$$

Da andererseits  $O, P_\nu, P_\nu^2$  in dieser Reihenfolge auf  $k$ :  $\varphi = f(r)$  liegen (es ist  $s_\nu^2 > s_\nu^1$ ), gilt wie in der vorigen Nummer gezeigt wurde,

$$E(O, P_\nu, P_\nu^2) \rightarrow 1$$

und daher infolge (6.8)

$$\sphericalangle P_\nu^2 P_\nu O \rightarrow \pi,$$

woraus  $\psi_\nu \rightarrow 0$  folgt.

2)  $\lambda = 0$ . Hier ist das Argument ganz anders. Es gilt dann

$$\frac{e(P_\nu^1, P_\nu)}{e(P_\nu, O)} \rightarrow 0$$

und daher wegen  $0 < a < \infty$  auch

$$(6.9) \quad \lim \frac{e(P_\nu^2, O)}{e(P_\nu, O)} = \lim \frac{r(P_\nu^2, O)}{r(P_\nu, O)} = \lim \frac{s_\nu^2 - s_\nu^1}{s_\nu^1} = 0.$$

Auf dem Bogen  $\overline{P_\nu P_\nu^2}$  von  $k$  gibt es einen Punkt  $P(s_\nu^0)$  derart, dass die Tangente an  $k$  in  $P(s_\nu^0)$  parallel zu der Sehne  $\overline{P_\nu P_\nu^2}$  ist. Aus  $s_\nu^1 \leq s_\nu^0 \leq s_\nu^2$  und (6.9) folgt  $\frac{s_\nu^0}{s_\nu^1} \rightarrow 1$  und daraus nach (5.2), dass

$$(6.10) \quad \varphi(r(s_\nu^0)) - \varphi(r_\nu^1) \rightarrow 0$$

strebt. Wenn  $\mu(s)$  wie in (5.5) erklärt ist, so ist

$$\psi_\nu = \mu(s_\nu^0) - \varphi(r(s_\nu^0) + \varphi(r_\nu^1)),$$

und aus (5.5) und (6.10) folgt  $\psi_\nu \rightarrow 0$ .

Aus  $\psi_\nu \rightarrow 0$  und (6.3456) folgt nun:

$$\lim \frac{r(P_\nu^1, P_\nu^2)}{e(P_\nu^1, P_\nu)} = \left[ 1 + a^2 + 2a \sin \frac{\lambda}{2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\lim \frac{e(P_\nu^1, P_\nu^2)}{e(P_\nu^1, P_\nu)} = \left[ 1 + a^2 + 2a \sin \frac{\lambda}{2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

womit (6.2) in allen Fällen bewiesen ist.