Posons:

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pour} \quad x\in L,\\ \psi(x) & \text{pour} \quad x\in S\\ \theta(x) & \text{pour} \quad x\in \mathrm{C}(L+S).\end{cases}$$

On prouve comme dans la démonstration des théorèmes 1 et 2 que la fonction $f(x)$ satisfait à la thèse du th. 3.

Toutefois, même en admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, le problème reste ouvert, s'il existe une fonction $f(x)$ qui transforme d'une façon biunivoque la droite en elle-même et qui, de même que sa fonction inverse $f^{-1}(x)$, transforment simultanément chaque ensemble de I-e catégorie en un ensemble de mesure nulle et chaque ensemble de mesure nulle en un ensemble de I-e catégorie.

Sur les espaces à connexité n-dimensionnelle [1]).

Par

C. Kuratowski et E. Otto (Warszawa).

Soit $\mathfrak{X}$ un espace métrique séparable (contenant plus d'un point). $\mathfrak{X}$ est dit *à connexité $\leqslant n$-dimensionnelle* lorsqu'il existe une décomposition en deux ensembles fermés M et N telle que

(1) $$\mathfrak{X}=M+N, \qquad M\neq\mathfrak{X}\neq N, \qquad \dim MN\leqslant n-1,$$

autrement dit, lorsqu'il existe un ensemble ouvert G tel que

(2) $$0\neq G, \qquad \bar{G}\neq\mathfrak{X}, \qquad \dim Fr(G)\leqslant n-1,$$

ou encore: lorsqu'il existe un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-1$ qui sépare $\mathfrak{X}$.

Le plus petit entier n de ce genre (fini ou infini) est nommé *dimension de la connexité de* $\mathfrak{X}$ et est désigné par $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}$ [2]). Par conséquent — si $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}<\infty$ — il existe un séparateur fermé de dimension $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}-1$, mais il n'en existe aucun de dimension $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}-2$.

Convenons, en outre, que $\mathrm{dc}(p)=0$ et $\mathrm{dc}\,0=-1$.

On constate aussitôt que $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}\leqslant\dim\mathfrak{X}$ et que l'inégalité $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}\geqslant1$ équivaut à l'hypothèse que $\mathfrak{X}$ est connexe et contient plus d'un point. Les espaces *compacts* $\mathfrak{X}$ satisfaisant à l'égalité $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}=\dim\mathfrak{X}$ coïncident avec les multiplicités cantoriennes (au sens d'Urysohn).

Par exemple, pour deux cubes qui n'ont en commun qu'un seul sommet, on a $\mathrm{dc}=1$; s'ils ont une arête commune, on a $\mathrm{dc}=2$; enfin, s'ils ont une face commune, on a $\mathrm{dc}=3$.

---

[1]) Présenté à la Soc. Polon. de Math., Section de Varsovie, le 27. I. 1939.

[2]) Voir C. Kuratowski, *Sur la compactification des espaces à connexité n-dimensionnelle*, Fund. Math. **30** (1938), p. 242 (on y remplacera n par $n+1$).

Comme on voit, le coefficient $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}$ permet de préciser l'idée géométrique qui attribue au polytope formé de deux cubes une connexité plus ou moins „faible", suivant que ces cubes sont unis par une face commune, une arête ou un sommet.

Une autre définition ayant le même but a été proposée par M. Menger[1]); à savoir: $\mathfrak{X}$ a le degré de connexité $\leqslant n$ (est „n-stufig zusammenhängend") s'il contient un séparateur fermé dont chaque sous-ensemble a le degré de connexité $\leqslant n-1$; ce degré est 0 si $\mathfrak{X}$ se réduit à un point individuel. L'exemple suivant prouve que ces deux notions: de dimension de connexité et de degré de connexité (au sens de M. Menger) sont différentes.

Soit A un ensemble de dimension 1, situé sur le plan XY et ne contenant aucun ensemble connexe (qui contienne plus d'un point). Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble A augmenté des points xyz tels que $z\neq 0$.

On voit aussitôt que $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}=2$, tandis que le degré de la connexité est 1.

En remplaçant A par un ensemble de dimension n dépourvu de sous-ensemble connexe[2]), on obtient d'une façon analogue (dans un espace euclidien à un nombre suffisamment grand de dimensions) un ensemble $\mathfrak{X}$ tel que $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}=n+1$ et dont le degré de connexité est 1.

Cette Note a pour but de montrer que de nombreux théorèmes de la théorie des ensembles connexes se laissent généraliser et préciser de façon à devenir des énoncés sur la dimension de connexité.

1. dc *C pour* $C\subset\mathfrak{X}$. Soit C un ensemble contenant plus d'un point. En relativisant la définition de la dimension de connexité, on en conclut que *l'inégalité* $\mathrm{dc}\,C\leqslant n$ *équivaut à l'existence de deux ensembles* M *et* N *tels que*

(3) $$C=M+N,\qquad C-\overline{M}\neq 0\neq C-\overline{N},\qquad \dim(\overline{M}N+\overline{N}M)\leqslant n-1.$$

Car $C\overline{M}\overline{N}=\overline{M}N+\overline{N}M$.

L'inégalité $\mathrm{dc}\,C\leqslant n$ *équivaut à l'existence d'un ensemble ouvert* G *tel que*

(4) $$CG\neq 0\neq C-\overline{G},\qquad \dim C\cdot Fr(G)\leqslant n-1.$$

En effet, supposons d'abord que $\mathrm{dc}\,C\leqslant n$. Soient M et N deux ensembles satisfaisant à (3). On a évidemment

$$\overline{M-\overline{N}}\cdot(N-\overline{M})=0=\overline{N-\overline{M}}\cdot(M-\overline{N}),$$

[1]) *Dimensionstheorie* p. 214, Leipzig 1928. Dans le même ordre d'idées, comp. la notion de „composante dimensionnelle" de M. Alexandroff, Math. Ann. **106** (1932), p. 215. Cf. aussi L. Tumarkin, C. R. Paris t. **186** (1928), p. 420.

[2]) Voir S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **10** (1927), p. 311.

c. à d. que les ensembles $M-\overline{N}$ et $N-\overline{M}$ sont séparés. Il existe par conséquent[1]) un ensemble ouvert G tel que $M-\overline{N}\subset G$ et $\overline{G}(N-\overline{M})=0$; d'où $CG\neq 0\neq C-\overline{G}$, car $0\neq C-\overline{N}=M-\overline{N}\subset CG$ et $0\neq C-\overline{M}=N-\overline{M}\subset C-\overline{G}$. En outre

$$C\cdot Fr(G)=C(\overline{G}-G)=M(\overline{G}-G)+N(\overline{G}-G)\subset M-G+N\overline{G}\subset M\overline{N}+N\overline{M},$$

d'où $\dim C\cdot Fr(G)\leqslant n-1$.

Inversement, si l'ensemble ouvert G satisfait à (4), $C\cdot Fr(G)$ est un séparateur fermé de C. Donc $\mathrm{dc}\,C\leqslant n$.

2. *Addition et multiplication* [2]). 1. *Si* $\mathrm{dc}\,C\geqslant n$, $C\subset M+N$ *et* $\dim(\overline{M}N+\overline{N}M)\leqslant n-2$, *on a soit* $C\subset\overline{M}$, *soit* $C\subset\overline{N}$.

Car, autrement, en posant $M_1=CM$ et $N_1=CN$, on aurait $C=M_1+N_1$, $C-\overline{M}_1\neq 0\neq C-\overline{N}_1$ et $\dim(\overline{M}_1N_1+\overline{N}_1M_1)\leqslant n-2$, donc selon (3) $\mathrm{dc}\,C\leqslant n-1$.

2. *Etant donnée une famille* $\{C_\iota\}$ *d'ensembles tels que* $\mathrm{dc}\,C_\iota\geqslant n$ *et qui contient un ensemble* C_0 *tel que* $\dim C_0C_\iota\geqslant n-1$ *pour chaque* ι, *on a* $\mathrm{dc}(\sum_\iota C_\iota)\geqslant n$.

Considérons comme l'espace $\mathfrak{X}$ la somme $\sum_\iota C_\iota$. Soit $\mathfrak{X}=M+N$, $\overline{M}=M$, $\overline{N}=N$ et $\dim MN\leqslant n-2$. Il s'agit de prouver (conformément à (1)) qu'on a soit $\mathfrak{X}=M$, soit $\mathfrak{X}=N$. Or, comme $\mathrm{dc}\,C_0\geqslant n$, on peut poser selon 1: $C_0\subset M$. Il en résulte que $C_\iota\subset M$ quel que soit ι. Car, dans le cas contraire, on aurait (selon 1) $C_\iota\subset N$, mais alors $\dim C_0C_\iota\leqslant\dim MN\leqslant n-2$, contrairement à l'hypothèse. Il vient ainsi $\sum_\iota C_\iota\subset M$.

3. *Si* $C\subset E\subset\overline{C}$ *et* $\mathrm{dc}\,C\geqslant n$, *on a* $\mathrm{dc}\,E\geqslant n$.

Supposons que $\mathrm{dc}\,E<n$. Soit conformément à (3):

$$E=M+N,\qquad E-\overline{M}\neq 0\neq E-\overline{N},\qquad \dim(\overline{M}N+\overline{N}M)\leqslant n-2.$$

Comme $C\subset M+N$, on a, selon 1, p. ex. $C\subset\overline{M}$; donc $E\subset\overline{C}\subset\overline{M}$ contrairement à l'inégalité $E-\overline{M}\neq 0$.

4. $\mathrm{dc}(\mathfrak{X}-C)\geqslant\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}-\dim C-1$.

[1]) Voir C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne **3**, Warszawa–Lwów 1933, p. 99 (6).

[2]) Pour le cas $n=1$ des énoncés qui suivent, cf. B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes* § 1, Fund. Math. **2** (1921).

Posons $\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}=n$ et $\dim C=k$. Soit G un ensemble ouvert tel que $G-C\neq 0\neq\mathfrak{X}-C-\bar{G}$. Conformément à (4), il s'agit de prouver que $\dim(\mathfrak{X}-C)\cdot Fr(G)\geqslant n-k-2$. Or, comme $G\neq 0\neq\mathfrak{X}-\bar{G}$, il vient $\dim Fr(G)\geqslant n-1$ et comme [1])

$$\dim Fr(G)\leqslant\dim C\cdot Fr(G)+\dim(\mathfrak{X}-C)\cdot Fr(G)+1\leqslant$$
$$\leqslant k+\dim(\mathfrak{X}-C)\cdot Fr(G)+1,$$

on a $\dim(\mathfrak{X}-C)\cdot Fr(G)\geqslant n-k-2$.

5. *Si* $\mathfrak{X}-C=M+N$, $\bar{M}N+\bar{N}M=0$ *et* $\mathrm{dc}\,C\leqslant\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}$, *on a* $\mathrm{dc}\,C\leqslant\mathrm{dc}(C+M)$ *et* $\mathrm{dc}\,C\leqslant\mathrm{dc}(C+N)$.

Posons $\mathrm{dc}\,C=n$. Soit $C+M=A+B$ et $\dim(\bar{A}B+\bar{B}A)\leqslant n-2$. Il s'agit de prouver que soit $C+M\subset\bar{A}$, soit $C+M\subset\bar{B}$. Conformément à 1, on peut poser $C\subset\bar{B}$. Il vient $A+B=C+M\subset\bar{B}+M$, d'où $A\subset\bar{B}+M$, donc $A-\bar{B}\subset M$ et $\overline{A-\bar{B}}\cdot N\subset\bar{M}N=0$. Parsuite $\overline{A-\bar{B}}\cdot\bar{N}=\overline{A-\bar{B}}\cdot\bar{N}\cdot(C+M)=\overline{A-\bar{B}}\cdot\bar{N}\cdot C\subset\overline{A-\bar{B}}\cdot\bar{B}$.

Or, on a $\mathfrak{X}=(C+M)+N=\overline{A-\bar{B}}+(\bar{B}+\bar{N})$ et

$$\overline{A-\bar{B}}\cdot(\bar{B}+\bar{N})=\overline{A-\bar{B}}\cdot\bar{B}=\overline{A-\bar{B}}\cdot\bar{B}\cdot(A+B+N)\subset\bar{A}B+\bar{B}A,$$

puisque $\overline{A-\bar{B}}\cdot N=0$. Donc $\dim[\overline{A-\bar{B}}\cdot(\bar{B}+\bar{N})]\leqslant n-2\leqslant\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}-2$ et par conséquent, on a soit $\overline{A-\bar{B}}=\mathfrak{X}$, d'où $C+M\subset\overline{A-\bar{B}}\subset\bar{A}$, soit $\bar{B}+\bar{N}=\mathfrak{X}$, d'où $C+M\subset\bar{B}+\bar{N}$, donc $C+M\subset\bar{B}$, puisque $C\subset\bar{B}$ et $M\bar{N}=0$.

6. *A et B étant deux ensembles fermés tels que* $\mathrm{dc}\,AB\leqslant\mathrm{dc}(A+B)$, *on a* $\mathrm{dc}(AB)\leqslant\mathrm{dc}\,A$ *et* $\mathrm{dc}(AB)\leqslant\mathrm{dc}\,B$.

On n'a qu'à poser dans 5: $\mathfrak{X}=A+B$, $C=AB$, $M=A-B$ et $N=B-A$.

3. Transformations continues. *Soit f une transformation continue d'un continu $\mathfrak{X}$. Si, pour chaque $y\in f(\mathfrak{X})$, on a $\dim f^{-1}(y)\leqslant k$, alors $\mathrm{dc}\,f(\mathfrak{X})\geqslant\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}-k$.*

Soit H un sous-ensemble ouvert de $f(\mathfrak{X})$ tel que $0\neq H$ et $\bar{H}\neq f(\mathfrak{X})$. Il s'agit de prouver que $\dim Fr(H)\geqslant\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}-k-1$.

Or, l'ensemble fermé $f^{-1}[Fr(H)]=f^{-1}(\bar{H})-f^{-1}(H)$ décompose l'espace $\mathfrak{X}$ en deux ensembles ouverts, disjoints et non vides $f^{-1}(H)$ et $\mathfrak{X}-f^{-1}(\bar{H})$. Par conséquent, $\dim f^{-1}[Fr(H)]\geqslant\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}-1$ et l'inégalité $\dim f^{-1}(y)\leqslant k$ implique en vertu d'un théorème de M. Hurewicz [2]) que $\dim ff^{-1}[Fr(H)]\geqslant\mathrm{dc}\,\mathfrak{X}-1-k$, d'où la conclusion demandée, puisque $ff^{-1}[Fr(H)]=Fr(H)$.

[1]) On a, d'une façon générale, $\dim(A+B)\leqslant\dim A+\dim B+1$.

[2]) Cf. K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 235.

4. *Connexité n-dimensionnelle entre deux ensembles* [1]).

$\mathfrak{X}$ est dit *à connexité n-dimensionnelle entre deux sous-ensembles A et B*, en symboles $\mathrm{dc}_{A,B}\,\mathfrak{X}=n$, lorsque n est le plus petit entier tel qu'il existe deux ensembles fermés M et N assujettis aux conditions:

$$\mathfrak{X}=M+N,\qquad AN=0=BM,\qquad \dim MN\leqslant n-1,$$

c. à d. qu'il existe un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-1$ qui sépare $\mathfrak{X}$ entre A et B.

On démontre facilement (cf. p. 260) que

1. *Pour qu'un ensemble C (situé dans $\mathfrak{X}$) soit à connexité $\leqslant n$-dimensionnelle entre deux sous-ensembles A et B, il faut et il suffit qu'il existe un G ouvert tel que*

$$A\subset G,\qquad \bar{G}B=0,\qquad \dim C\cdot Fr(G)\leqslant n-1.$$

2. *Si* $\mathrm{dc}_{A_1,B}\,\mathfrak{X}\leqslant n$ *et* $\mathrm{dc}_{A_2,B}\,\mathfrak{X}\leqslant n$, *on a* $\mathrm{dc}_{A_1+A_2,B}\,\mathfrak{X}\leqslant n$ [2]).

En effet, G_i (où $i=1,2$) étant un ensemble ouvert tel que $B\subset G_i$, $\bar{G}_i\cdot A_i=0$ et $\dim Fr(G_i)\leqslant n-1$, posons $G=G_1\cdot G_2$. Il vient

$$B\subset G,\qquad \bar{G}\cdot(A_1+A_2)\subset\bar{G}_1\cdot\bar{G}_2\cdot(A_1+A_2)=0$$

et

$$\dim Fr(G)\leqslant\dim[Fr(G_1)+Fr(G_2)]\leqslant n-1.$$

3. *Etant donnés dans un espace compact un ensemble C et deux sous-ensembles A et B de C, il existe deux points $a\in\bar{A}$ et $b\in\bar{B}$ tels que*

$$\mathrm{dc}_{A,B}\,C\leqslant\mathrm{dc}_{a,b}(C+a+b).$$

Nous allons établir d'abord l'existence d'un $a\in\bar{A}$ tel que

(i) $$\mathrm{dc}_{A,B}\,C\leqslant\mathrm{dc}_{a,B}(C+a).$$

Supposons qu'un tel a n'existe pas. A chaque $a\in\bar{A}$ correspond alors un $G(a)$ ouvert tel que

$$a\in G(a),\qquad \overline{G(a)}\cdot B=0\quad\text{et}\quad\dim C\cdot Fr[G(a)]\leqslant\mathrm{dc}_{A,B}\,C-2.$$

$\bar{A}$ étant compact, on peut extraire de la famille $\{G(a)\}$ un nombre fini d'ensembles $G_1,\dots,G_n$ tels qu'en posant $G=G_1+\dots+G_n$, on ait $A\subset G$. Il vient $\bar{G}\cdot B=0$ et $C\cdot Fr(G)\subset C\cdot Fr(G_1)+\dots+C\cdot Fr(G_n)$; les ensembles $C\cdot Fr(G_i)$ étant fermés dans C, il en résulte que $\dim C\cdot Fr(G)\leqslant\mathrm{dc}_{A,B}\,C-2$, contrairement à 1.

[1]) Voir C. Kuratowski, Fund. Math. **30**, op. cit. D'après un théorème qui s'y trouve établi, chaque espace se laisse compactifier sans augmenter la dimension de la connexité entre aucun couple de ses points.

[2]) Pour $n=1$, voir C. Kuratowski, Fund. Math. **31** (1938), p. 244 (où les deux ensembles Z_j doivent être identifiés).

La formule (i) établie, on en déduit, en remplaçant A par a et C par $C+a$, l'existence d'un $b \epsilon \bar{B}$ tel que $\mathrm{dc}_{a,B}(C+a) \leqslant \mathrm{dc}_{a,b}(C+a+b)$, d'où la conclusion demandée.

De là résulte que

4. *Pour tout espace compact, la connexité n-dimensionnelle entre deux ensembles fermés A et B entraîne la connexité n-dimensionnelle entre un couple de points $a \epsilon A$ et $b \epsilon B$.*

En désignant par $\dim_a \mathfrak{X}$ la dimension de $\mathfrak{X}$ au point a, on a l'équivalence évidente:

5. *Pour que $\dim_a \mathfrak{X} \leqslant n$, il faut et il suffit que chaque ensemble fermé B tel que $a \epsilon \mathfrak{X}-B$ satisfasse à la condition $\mathrm{dc}_{a,B} \mathfrak{X} \leqslant n$.*

Rapproché de 3, cet énoncé entraîne que

6. *C étant un sous-ensemble d'un espace compact, à chaque $a \epsilon C$ correspond un point $b \neq a$ tel que*

$$\mathrm{dc}_{a,b}(C+b) = \dim_a C, \quad \textit{pourvu que} \quad \dim_a C < \infty \text{ [1]}.$$

Car, d'une part, l'inégalité $\mathrm{dc}_{a,b}(C+b) \leqslant \dim_a C$ est valable toujours pour $a \neq b$ et, d'autre part, en substituant dans 3 à B un ensemble fermé dans C tel que $a \epsilon C-B$ et que $\dim_a C \leqslant \mathrm{dc}_{a,B} C$, on en déduit l'existence d'un $b \neq a$ pour lequel $\mathrm{dc}_{a,B} C \leqslant \mathrm{dc}_{a,b}(C+b)$. D'où l'égalité demandée.

[1]) Pour un cas particulier, voir K. Menger, l. c. p. 207.

Lokale Eigenschaften der zu Variationsproblemen gehörigen metrischen Räume.

Von

Herbert Busemann (Princeton, U. S. A.).

1. Einem positiv definiten, quasiregulären Variationsproblem mit hinreichend glattem Integranden kann in bekannter Weise ein Finslerscher Raum zugeordnet werden. Wenn der Integrand $F(P, \varphi)$ nicht genügend regulär ist, sondern etwa wie bei den Mengerschen [1]) [2]) Untersuchungen nur stetig von Punkt und Richtung abhängt, so gelangt man, wenn man den Wert des Integrals über $F(P, \varphi)$ längs einer gerichteten Minimanten von A nach B als Abstand von A und B einführt (die Existenz solcher Minimanten ist durch die erwähnten Mengerschen Resultate gesichert) zu einem nicht notwendig symmetrischen metrischen Raum R. $F(P, \varphi)$ definiert an jeder Stelle die Indikatrix des Variationsproblems, und Quasiregularität ist als (schwache) Konvexität der Indikatrix erklärt. Gołąb [3]) hat kürzlich unter den Mengerschen Differenzierbarkeitsannahmen gezeigt, dass die Konvexität der Indikatrix notwendig ist, damit der Raum R metrisch (bezw. fastmetrisch) wird.

In dieser Note möchte ich einige Zusätze zu den Ergebnissen von Menger und Gołąb machen, die, wie ich glaube, zur Klärung der Zusammenhänge geeignet sind. Ich gehe aus von einem metrischen Raum der obigen Art, d. h. ich betrachte einen auf einen Euklidischen Raum topologisch abgebildeten, nicht notwendig

[1]) K. Menger, *Metrische Geometrie und Variationsrechnung*, Fund. Math. **25** (1935), pp. 441–458.

[2]) K. Menger, *Die metrische Methode in der Variationsrechnung*, Erg. Math. Kolloq. **8** (1937), pp. 1–32.

[3]) St. Gołąb, *Ein Beitrag zum Mengerschen Begriff des fastmetrischen Raumes*, Fund. Math. **31** (1938), pp. 67–73.