icm©

Skolem[27]), die weniger Grundbegriffe als $\mathfrak{S}$ haben, sich aber dafür nicht auf endlich viele Axiome stützen; infolgedessen ist der Beweis in bezug auf solche Systeme keineswegs eine genaue Wiederholung des vorangehenden; um ihn durchzuführen, muß man vielmehr mehrere Beweismethoden der modernen Metamathematik in Betracht ziehen[28]).

[27]) Vgl. T. Skolem, *Über einige Grundlagenfragen der Mathematik*. Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps Akademi i Oslo. I. Mat.-Nat. Kl. (1929), nr **4**.

[28]) Vgl. hiezu meine unter [14]) angeführte Arbeit sowie die unter [13]) zitierte Mitteilung.

Sur quelques transformations biunivoques de la droite en elle-même.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

Comme j'ai démontré[1]), si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une fonction biunivoque $f(x)$ transformant la droite en elle-même qui transforme chaque ensemble E de mesure nulle en ensemble $f(E)$ de I-e catégorie et dont la fonction inverse $f^{-1}(x)$ transforme, réciproquement, tout ensemble E de I-e catégorie en ensemble $f^{-1}(E)$ de mesure nulle.

Une telle fonction $f(x)$ ne peut pas être mesurable. En effet:

(1) *Si $f(x)$ est une fonction mesurable (d'une variable réelle), il existe un ensemble N de mesure nulle, tel que le complémentaire de l'ensemble $f(N)$ (par rapport à la droite) est de I-e catégorie*[2]).

Donc, si la fonction mesurable $f(x)$ transforme chaque ensemble de mesure nulle en un ensemble de I-e catégorie, elle transforme aussi toute la droite en un ensemble de I-e catégorie et par conséquent ne peut pas transformer d'une façon biunivoque la droite en elle-même.

Or, je vais démontrer ce

Théorème 1. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une fonction mesurable $f(x)$ qui transforme d'une façon biunivoque la droite en elle-même en transformant tout ensemble de I-e catégorie en un ensemble de mesure nulle.*

[1]) W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne **4**, Warszawa-Lwów 1934, p. 77; v. aussi ma Note dans Fund. Math. **27** (1936), p. 276.

[2]) Cf. loc. cit., p. 83, lemme 2, dont (1) est une conséquence immédiate.

Démonstration. M. N. Lusin a déduit[1]) de l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ la conséquence suivante:

L. *Il existe un ensemble linéaire L de puissance $2^{\aleph_0}$ qui ne contient aucun sous-ensemble indénombrable de I-e catégorie.*

On démontre qu'un tel ensemble L est de mesure nulle. Il existe donc un G_δ linéaire de mesure nulle contenant L; désignons-le par E_1. Soient H_1 et H_2 deux ensembles linéaires de mesure nulle, parfaits et disjoints. L'ensemble CE_1 étant un F_σ de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe, comme on voit sans peine, une fonction de Baire $\varphi(x)$ qui transforme d'une façon biunivoque l'ensemble CE_1 en l'ensemble $\varphi(CE_1)=H_1$. Les ensembles L, E_1-L, H_2 et $C(H_1+H_2)$ étant chacun de puissance du continu, il existe une transformation biunivoque $\psi(x)$ de L en $C(H_1+H_2)$ et une transformation biunivoque $\theta(x)$ de E_1-L en H_2. Posons:

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pour} \quad x\in CE_1,\\ \psi(x) & \text{pour} \quad x\in L,\\ \theta(x) & \text{pour} \quad x\in E_1-L.\end{cases}$$

La fonction $f(x)$ transforme, comme on voit sans peine, la droite en elle-même et elle est mesurable, en tant qu'égale à une fonction de Baire sur l'ensemble CE_1, dont le complémentaire est de mesure nulle.

Soit maintenant K un ensemble linéaire quelconque de I-e catégorie. D'après la définition de L, l'ensemble KL est au plus dénombrable. On a évidemment $K\subset KL+(E_1-L)+CE_1$, donc $f(K)\subset f(KL)+f(E_1-L)+f(CE_1)=f(KL)+H_1+H_2$. L'ensemble $f(KL)$ étant au plus dénombrable (de même que KL) et les ensembles H_1 et H_2 étant de mesure nulle, l'ensemble $f(K)$ est de mesure nulle. La fonction $f(x)$ transforme par conséquent chaque ensemble de I-e catégorie en un ensemble de mesure nulle, c. q. f. d.

Considérons la proposition suivante:

T. *Il existe une fonction $f(x)$ qui transforme d'une façon biunivoque la droite en elle-même en transformant tout ensemble de I-e catégorie en un ensemble de mesure nulle.*

[1]) Cf. C. R. Paris **158** (1914), p. 1259.

Je dis que si la fonction $f(x)$ d'une variable réelle satisfait à $\boldsymbol{T}$, sa fonction inverse $f^{-1}(x)$ est non mesurable. En effet, si la fonction $f^{-1}(x)$ était mesurable, il existerait, d'après (1), un ensemble N des mesure nulle, tel que $Cf^{-1}(N)$ serait un ensemble de I-e catégorie. La fonction $f(x)$ satisfaisant à $\boldsymbol{T}$, l'ensemble $f(Cf^{-1}(N))=CN$ serait de mesure nulle, ce qui est impossible.

On peut aussi démontrer qu'une fonction $f(x)$ satisfaisant à $\boldsymbol{T}$ est dépourvue de la propriété de Baire au sens large[1]). C'est une conséquence immédiate d'un lemme que j'ai établi ailleurs[2]) et qui peut être énoncé de la façon suivante:

(2) *Si $f(x)$ est une fonction d'une variable réelle satisfaisant à la condition de Baire au sens large, il existe un ensemble K de I-e catégorie, tel que l'ensemble $f(CK)$ est de mesure nulle.*

Or, je vais démontrer ce

Théorème 2. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une fonction $f(x)$ satisfaisant à la condition de Baire au sens large et qui transforme d'une façon biunivoque la droite en elle-même en transformant chaque ensemble de mesure nulle en un ensemble de I-e catégorie.*

Démonstration. J'ai déduit[3]) de l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ la conséquence suivante:

S. *Il existe un ensemble linéaire S de puissance $2^{\aleph_0}$ ne contenant aucun sous-ensemble indénombrable de mesure nulle.*

On démontre qu'un tel ensemble S est de I-e catégorie. Il existe donc un F_σ linéaire de I-e catégorie contenant S; désignons-le par E_1. Soient H_1 et H_2 deux ensembles linéaires disjoints, non-denses et parfaits. L'ensemble CE_1 étant un G_δ de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe, comme on voit sans peine, une fonction de Baire $\varphi(x)$ qui transforme d'une façon biunivoque l'ensemble CE_1 en l'ensemble $H_1=\varphi(CE_1)$. Les ensembles S, E_1-S, H_2 et $C(H_1+H_2)$ étant chacun de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe une transformation biunivoque $\psi(x)$ de S en $C(H_1+H_2)$ et une transformation biunivoque $\theta(x)$ de E_1-S en H_2.

[1]) c. à d. n'est pas continue, même en négligeant un ensemble de I-e catégorie.

[2]) W. Sierpiński, Mathematica **1** (Cluj 1929), p. 115.

[3]) W. Sierpiński, Fund. Math. **5** (1924), p. 184.

icm©

Posons:

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pour} \quad x\in CE_1,\\ \psi(x) & \text{pour} \quad x\in S,\\ \theta(x) & \text{pour} \quad x\in E_1-S.\end{cases}$$

La fonction $f(x)$ transforme, comme on voit sans peine, la droite en elle-même et elle satisfait à la condition de Baire au sens large, en tant qu'égale à une fonction de Baire sur l'ensemble CE_1, dont le complémentaire est de I-e catégorie.

Soit maintenant N un ensemble linéaire quelconque de mesure nulle. D'après la définition de S, l'ensemble NS est au plus dénombrable. On a évidemment $N\subset NS+(E_1-S)+CE_1$, donc $f(N)\subset f(NS)+f(E_1-S)+f(CE_1)=f(NS)+H_1+H_2$. L'ensemble $f(NS)$ étant au plus dénombrable (de même que NS) et les ensembles H_1 et H_2 étant non-denses, l'ensemble $f(N)$ est de I-e catégorie. La fonction $f(x)$ satisfait donc à la thèse du th. 2, c. q. f. d.

Ceci établi, soient $f(x)$ une fonction satisfaisant à la proposition $\boldsymbol{T}$ et S un ensemble linéaire quelconque satisfaisant à la proposition $\boldsymbol{S}$.

Je dis que l'ensemble

$$L=f^{-1}(S)$$

satisfait à la proposition $\boldsymbol{L}$.

En effet, soit K un ensemble linéaire quelconque de I-e catégorie. L'ensemble LK est donc aussi de I-e catégorie et, d'après la définition de la fonction $f(x)$, l'ensemble $f(KL)$ est de mesure nulle, de sorte que l'ensemble $Sf(KL)$ est au plus dénombrable, de même que l'ensemble $f^{-1}\big(Sf(KL)\big)=f^{-1}(S)f^{-1}f(KL)=LKL=KL$. Ainsi l'ensemble L satisfait à la proposition $\boldsymbol{L}$.

En désignant par $\rightarrow$ l'implication, par $\boldsymbol{XY}$ l'affirmation simultanée des propositions $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$, et par $\boldsymbol{H}$ l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ *(hypothèse du continu)*, nous pouvons donc écrire $\boldsymbol{TS}\rightarrow\boldsymbol{L}$, donc aussi $\boldsymbol{TS}\rightarrow\boldsymbol{LS}$. M. F. Rothberger a démontré [1]) que $\boldsymbol{LS}\rightarrow\boldsymbol{H}$. On a ainsi $\boldsymbol{TS}\rightarrow\boldsymbol{H}$. Or, nous avons démontré (cf. p. 253) que $\boldsymbol{H}\rightarrow\boldsymbol{T}$; comme, d'autre part, on a $\boldsymbol{H}\rightarrow\boldsymbol{S}$, on trouve $\boldsymbol{TS}\rightleftarrows\boldsymbol{H}$, c. à d. que *la réunion des propositions* $\boldsymbol{T}$ *et* $\boldsymbol{S}$ *équivaut à l'hypothèse du continu* [2]).

[1]) F. Rothberger, Fund. Math. **30** (1938), p. 215.

[2]) D'après une remarque due à M^lle^ S. Braun, on peut remplacer ici la proposition $\boldsymbol{T}$ par la proposition $\boldsymbol{U}$ qu'on obtient en supprimant dans $\boldsymbol{T}$ les mots „*d'une façon biunivoque*". Pour montrer que $\boldsymbol{US}\rightleftarrows\boldsymbol{H}$, il suffit de modifier un peu la démonstration précédente, en entendant par $f^{-1}(y)$, pour tout y réel, un x quelconque tel que $f(x)=y$.

Il en résulte qu'une démonstration de la proposition $\boldsymbol{T}$ sans l'hypothèse du continu serait en même temps une démonstration que la proposition $\boldsymbol{S}$ équivaut à l'hypothèse du continu. On doit donc regarder comme un problème très difficile celui de démontrer la proposition $\boldsymbol{T}$ sans faire appel à l'hypothèse du continu.

Envisageons à présent la proposition

$\boldsymbol{T^*}$. *Il existe une fonction $f(x)$ qui transforme d'une façon biunivoque la droite en elle-même en transformant tout ensemble de mesure nulle en un ensemble de I-e catégorie.*

D'une façon analogue à l'équivalence $\boldsymbol{TS}\rightleftarrows\boldsymbol{H}$, on peut démontrer que $\boldsymbol{T^*L}\rightleftarrows\boldsymbol{H}$, c. à d. que *la réunion des propositions* $\boldsymbol{T^*}$ *et* $\boldsymbol{L}$ *équivaut à l'hypothèse du continu* [1]).

Pour terminer, je vais démontrer ce

Théorème 3. *Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *il existe une fonction $f(x)$ qui transforme d'une façon biunivoque la droite en elle-même en transformant à la fois chaque ensemble de mesure nulle en un ensemble de I-e catégorie et chaque ensemble de I-e catégorie en un ensemble de mesure nulle.*

Démonstration. Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe, comme on sait, deux ensembles, L_1 et S_1, satisfaisant aux propositions $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{S}$ respectivement. L'ensemble L_1 étant de mesure nulle, l'ensemble L_1S_1 est au plus dénombrable, Il en résulte que les ensembles $L=L_1-S_1$ et $S=S_1-L_1$ satisfont encore aux propositions $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{S}$ respectivement. L'ensemble L étant de mesure nulle, l'ensemble CL contient un sous-ensemble parfait P de mesure nulle. L'ensemble PS est donc au plus dénombrable et par suite l'ensemble $P-S$ est de puissance $2^{\aleph_0}$. Donc, à plus forte raison, l'ensemble $C(L+S)\supset P-S$ est de puissance $2^{\aleph_0}$.

Or, comme on voit sans peine, il existe une décomposition de la droite en une somme de trois ensembles disjoints $H_1+H_2+H_3$ dont chacun est de puissance $2^{\aleph_0}$ et dont H_1 est de I-e catégorie, H_2 de mesure nulle et H_3 à la fois de I-e catégorie et de mesure nulle. Les ensembles L, S et $C(L+S)$ étant chacun de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe trois fonctions $\varphi(x),\psi(x)$ et $\theta(x)$, qui transforment d'une façon biunivoque L en H_1, S en H_2 et $C(L+S)$ en H_3 respectivement.

[1]) Ici on peut encore remplacer $\boldsymbol{T^*}$ par la proposition $\boldsymbol{U^*}$ qui s'obtient de $\boldsymbol{T^*}$ en y supprimant les mots „*d'une façon biunivoque*".

icm©

Posons:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{pour} \quad x \epsilon L, \\ \psi(x) & \text{pour} \quad x \epsilon S \\ \theta(x) & \text{pour} \quad x \epsilon \mathrm{C}(L+S). \end{cases}$$

On prouve comme dans la démonstration des théorèmes 1 et 2 que la fonction $f(x)$ satisfait à la thèse du th. 3.

Toutefois, même en admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, le problème reste ouvert, s'il existe une fonction $f(x)$ qui transforme d'une façon biunivoque la droite en elle-même et qui, de même que sa fonction inverse $f^{-1}(x)$, transforment simultanément chaque ensemble de I-e catégorie en un ensemble de mesure nulle et chaque ensemble de mesure nulle en un ensemble de I-e catégorie.

Sur les espaces à connexité n-dimensionnelle[1]).

Par

C. Kuratowski et E. Otto (Warszawa).

Soit $\mathcal{X}$ un espace métrique séparable (contenant plus d'un point). $\mathcal{X}$ est dit *à connexité $\leqslant n$-dimensionnelle* lorsqu'il existe une décomposition en deux ensembles fermés M et N telle que

(1) $$\mathcal{X} = M + N, \qquad M \neq \mathcal{X} \neq N, \qquad \dim MN \leqslant n-1,$$

autrement dit, lorsqu'il existe un ensemble ouvert G tel que

(2) $$0 \neq G, \qquad \bar{G} \neq \mathcal{X}, \qquad \dim Fr(G) \leqslant n-1,$$

ou encore: lorsqu'il existe un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-1$ qui sépare $\mathcal{X}$.

Le plus petit entier n de ce genre (fini ou infini) est nommé *dimension de la connexité de* $\mathcal{X}$ et est désigné par $\mathrm{dc}\,\mathcal{X}$[2]). Par conséquent — si $\mathrm{dc}\,\mathcal{X} < \infty$ — il existe un séparateur fermé de dimension $\mathrm{dc}\,\mathcal{X} - 1$, mais il n'en existe aucun de dimension $\mathrm{dc}\,\mathcal{X} - 2$.

Convenons, en outre, que $\mathrm{dc}(p) = 0$ et $\mathrm{dc}\,0 = -1$.

On constate aussitôt que $\mathrm{dc}\,\mathcal{X} \leqslant \dim \mathcal{X}$ et que l'inégalité $\mathrm{dc}\,\mathcal{X} \geqslant 1$ équivaut à l'hypothèse que $\mathcal{X}$ est connexe et contient plus d'un point. Les espaces *compacts* $\mathcal{X}$ satisfaisant à l'égalité $\mathrm{dc}\,\mathcal{X} = \dim \mathcal{X}$ coïncident avec les multiplicités cantoriennes (au sens d'Urysohn).

Par exemple, pour deux cubes qui n'ont en commun qu'un seul sommet, on a $\mathrm{dc} = 1$; s'ils ont une arête commune, on a $\mathrm{dc} = 2$; enfin, s'ils ont une face commune, on a $\mathrm{dc} = 3$.

---

[1]) Présenté à la Soc. Polon. de Math., Section de Varsovie, le 27. I. 1939.

[2]) Voir C. Kuratowski, *Sur la compactification des espaces à connexité n-dimensionnelle*, Fund. Math. **30** (1938), p. 242 (on y remplacera n par $n+1$).