2. *Si* $A_0 \cdot A_1 \neq 0 \neq \mathcal{S}_2 - (A_0 + A_1)$ *et si les ensembles* A_0 *et* A_1 *sont fermés (dans* $\mathcal{S}_2$*), on a, en posant* $B_j = \mathcal{S}_2 - A_j$,

$$b_0(B_0+B_1)+b_0(B_0 \cdot B_1)-b_0(B_0)-b_0(B_1)=$$
$$=b_0(A_0+A_1)+b_0(A_0 \cdot A_1)-b_0(A_0)-b_0(A_1)$$ [18]).

C'est une conséquence de la formule (8) rapprochée du théorème de dualité suivant [19]):

$$\text{(10)} \qquad si \quad F=\overline{F}, \quad on \ a \quad b_1(F)=b_0(\mathcal{S}_2-F).$$

Remarques. (α) Le th. 1 du N 4 reste vrai en remplaçant l'hypothèse que $A_0 \cdot A_1$ est compact par celle que $A_0 \cdot A_1$ *est un ensemble localement connexe qui coupe* $\mathcal{S}_2$ *en un nombre fini de constituants* [20]). Si, en outre, les ensembles A_0 et A_1 sont des ensembles localement connexes de ce genre, on peut remplacer dans la formule (8) $b_1(A)$ par le nombre des constituants de $\mathcal{S}_2 - A$ diminué de l'unité [21]).

(β) *A_0 et A_1 étant fermés dans $\mathcal{S}_2$ et tels que* $A_0 + A_1 \neq \mathcal{S}_2$, *on a*

$$\text{(11)} \qquad b_1(A_0 \cdot A_1)=b_1(A_0)+b_1(A_1)-d_0(\mathcal{S}_2-A_0, \mathcal{S}_2-A_1).$$

Posons, en effet, $B_j = \mathcal{S}_2 - A_j$. D'après (2) (cf. p. 194, renvoi 6), on a

$$b_0(B_0+B_1)=b_0(B_0)+b_0(B_1)-d_0(B_0,B_1),$$

d'où la formule demandée en vertu de (10).

(γ) *Dans les hypothèses du th.* 2 (N 4), *on a*

$$\text{(12)} \qquad b_0(A_0 \cdot A_1)-d_0(A_0,A_1)=b_0(B_0 \cdot B_1)-d_0(B_0,B_1).$$

Car, d'après (1), (3) et N 4, 1, on a

$$b_1(A_0+A_1)=b_1(A_0)+b_1(A_1)+b_0(A_0 \cdot A_1)-d_0(A_0,A_1)-b_1(A_0 \cdot A_1),$$

d'où la formule demandée en vertu de (11) et de l'égalité $b_1(A_0+A_1)=b_0(B_0 \cdot B_1)$, qui résulte de (10).

---

18) C'est la „formule d'indices" de M. Straszewicz, Fund. Math. **7** (1925), p. 184. Cf. aussi S. Eilenberg, l. c. p. 101.

19) S. Eilenberg, l. c. p. 93, th. 2.

20) En vertu du lemme 6, p. 105 ibid. (un *constituant* est un semicontinu saturé).

21) En vertu du th. 20, p. 106 ibid.

Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip.

Von

Andrzej Mostowski (Warszawa).

In der vorliegenden Arbeit wird das (von Fraenkel herrührende) Problem der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von dem sog. Ordnungsprinzip betrachtet [1]).

Dem formalen Beweis schicken wir einige einleitende Bemerkungen voraus, die das Verständnis der folgenden Erwägungen erleichtern mögen.

Unter axiomatischen Systemen, die eine Formalisierung und Erweiterung der Zermeloschen Mengenlehre darstellen, lassen sich bekanntlich zwei Arten von Systemen unterscheiden. Zu der ersten gehören Systeme, die die Existenz von sog. Urelementen, d. h. Dingen, die keine Mengen sind, ausschließen, zur zweiten dagegen Systeme, auf Grund deren die Existenz von unendlich vielen solchen Urelementen beweisbar ist oder wenigstens als widerspruchsfrei erwiesen werden kann [2]). Beide Gruppen enthalten Systeme, die einen formalen Aufbau der verschiedenen Teile der Mengenlehre gestatten: im System von Zermelo [3]) z. B. läßt sich die Theorie der Mengen von einer Mächtigkeit $<\aleph_0+2^{\aleph_0}+2^{2^{\aleph_0}}+\ldots$ aufbauen, auf dem Boden des Systems von Fraenkel [4]) oder von v. Neumann [5]) kann schon

---

1) Vgl. A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre* (3. Aufl., Berlin 1928), S. 320.

2) Vgl. E. Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche.* Fund. Math. **16** (1929), S. 29–47.

3) Vgl. E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.* Math. Ann. **65** (1908), S. 261–281.

4) Vgl. das unter [1]) zitierte Buch von Fraenkel, §16.

5) Vgl. J. v. Neumann, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre.* Math. Zeitschrift **27** (1928), S. 669 f.

die Theorie der Mächtigkeiten unter dem ersten unerreichbaren Aleph entwickelt werden, in letzter Zeit werden auch gelegentlich noch reichere Systeme betrachtet [6]).

Vom metamathematischen Standpunkt aus betrachtet, sind zweifellos die Systeme der ersten Art die interessantesten. Diese Systeme bleiben hier aber außer Betracht: die Beweismethode, die hier verwendet wird, knüpft ausdrücklich an die Existenz der Urelemente an. Dagegen läßt sich unsere Betrachtung auf alle Systeme zweiter Art anwenden. Den Beweis werden wir aber nur in bezug auf ein bestimmtes System $\mathfrak{S}$ durchführen, das wir im § 1 angeben werden. Dieses System rührt im wesentlichen von Bernays [7]) her und weicht von diesem vor allem durch eine andere Auffassung des Bestimmtheitsaxioms ab. Diese kleine Abänderung hat eben den Zweck, die Möglichkeit der Einführung von Urelementen zu sichern.

Im System $\mathfrak{S}$ kann ein beträchtlicher Teil der „naiven" Mengenlehre rekonstruiert werden; nämlich derjenige Teil, in dem ausschließlich Mengen mit einer Mächtigkeit unter dem ersten unerreichbaren Aleph betrachtet werden. Insbesondere läßt sich die ganze Ordnungstheorie solcher Mengen aufbauen und im Zusammenhang damit lassen sich der Wohlordnungssatz und das Ordnungsprinzip (d.h. die Behauptung, daß jede Menge geordnet werden kann) ausdrücken. Es soll nun gezeigt werden, daß der Wohlordnungssatz von sämtlichen Axiomen des Systems $\mathfrak{S}$ und vom Ordnungsprinzip unabhängig ist.

Dies geschieht durch eine Anwendung der klassischen Interpretationsmethode [8]): wir entnehmen nämlich der allgemeinen Methodologie die Tatsache, daß es zum Zwecke des Beweises genügt, eine Interpretation der Grundbegriffe des Systems $\mathfrak{S}$ in einem widerspruchsfreien System $\mathfrak{S}'$ anzugeben, bei welcher alle Axiome von $\mathfrak{S}$ und das Ordnungsprinzip in beweisbare Sätze des Systems $\mathfrak{S}'$ übergehen, der Wohlordnungssatz dagegen in die Negation eines beweisbaren Satzes. Wir werden uns also im Folgenden auf die Anführung des Modells und des Beweises, daß die Axiome

[6]) Vgl. A. Tarski, *Über unerreichbare Kardinalzahlen*. Fund. Math. **30** (1938), S. 68–89. Vgl. insbesondere §2.

[7]) Vgl. P. Bernays, *A System of Axiomatic Set Theory — part I*. Journal of Symbolic Logic **2** (1937), S. 65–77.

[8]) Vgl. das unter [1]) zitierte Buch Fraenkel's, S. 340–343.

von $\mathfrak{S}$ und das Ordnungsprinzip in diesem Modell erfüllt sind, der Wohlordnungssatz hingegen nicht, zu beschränken haben. Die Frage der Widerspruchsfreiheit des Systems $\mathfrak{S}'$ wird, als nicht zu diesem Problemkreis gehörig, außer Acht gelassen [9]); es wird als (stillschweigende) Voraussetzung für alle unsere Theoreme angenommen, daß $\mathfrak{S}'$ ein widerspruchsfreies System ist.

Wie ist nun das System $\mathfrak{S}'$ zu wählen? Es zeigt sich, daß diese Wahl im hohen Maße willkürlich getroffen werden kann: als $\mathfrak{S}'$ kann jedes System der Mengenlehre gewählt werden, das die Bildung von ebenso großen Mächtigkeiten wie $\mathfrak{S}$ erlaubt und das Auswahlaxiom unter den beweisbaren Sätzen enthält; ob $\mathfrak{S}'$ der ersten oder der zweiten der obenbetrachteten Gruppen angehört, ist dabei gleichgültig. Der Bestimmtheit halber wählen wir als $\mathfrak{S}'$ das axiomatische System von v. Neumann [10]), das offenbar den beiden Forderungen entspricht. Da es aber sehr umständlich wäre, den Beweis in der etwas gewollten Ausdrucksweise des v. Neumannschen Systems darzustellen, wollen wir lieber an der allen Mengentheoretikern geläufigeren Sprache der naiven Mengenlehre festhalten; die restlose Übertragung des Beweises in das v. Neumannsche System würde übrigens keine prinzipiellen Schwierigkeiten bieten. Dadurch erklärt sich auch, daß wir in unserer Darstellung mehrere Begriffe nicht zu vermeiden brauchen, die in der naiven Mengenlehre einen paradoxen oder nicht genügend präzisen Charakter haben, im v. Neumannschen System aber zulässig sind. Zu solchen Begriffen zählt z.B. der Begriff des Bereiches aller Mengen oder aller Ordnungszahlen. Der Begriff der Ordnungszahl, der in der naiven Mengenlehre oft nicht genug präzisiert wird, soll in dem Sinn verstanden werden, der ihm von v. Neumann unterlegt worden ist. Ebenso können wir von induktiven Definitionen unbeschränkten Gebrauch machen, da sie im v. Neumannschen System durchaus zulässig sind [11]).

[9]) Zu dieser Frage vgl. A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in formalisierten Sprachen*. Studia Philosophica **1** (1936), S. 261–405. Vgl. insbesondere „Nachwort", S. 393 ff.

[10]) Vgl. Fußnote [5]).

[11]) Außer der in [5]) angeführten Arbeit vgl. dazu noch folgende Arbeiten von v. Neumann: *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*. Acta Litt. ac scientiarum univ. Hung. Franc. Joseph. Sectio sc. math. **1** (1923), S. 199–208; *Über Definitionen durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre*. Math. Ann. **99** (1928), S. 373–391.

Auf die Frage der Konstruktion des Modells in anderen axiomatischen Systemen kommen wir noch zum Schluß dieser Arbeit zurück.

Der Grundgedanke des Beweises ist eng mit Ideen verwandt, die von Fraenkel in mehreren Arbeiten entwickelt worden sind[12]). Auch sind die von Lindenbaum und von mir durchgeführten Untersuchungen über die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms[13]) von Einfluß auf die Entstehung dieser Arbeit gewesen. Insbesondere ist die für den ganzen Beweis grundlegende Konstruktion der Mengen A_n (vgl. **15** sowie Fußnote [20])) der demnächst erscheinenden gemeinsamen Arbeit von Lindenbaum und mir entnommen, wo die Ergebnisse dieser Untersuchungen ausführlich dargestellt werden.

Was die äußere Form des Beweises anbelangt, so möchte ich noch bemerken, daß ich früher den hier besprochenen Satz mit Hilfe formal gänzlich anderer Mittel bewiesen habe: die Konstruktion des Modells wurde durch gewisse Operationen mit Ausdrücken einer formalisierten Sprache ersetzt[14]). Diese Methode hatte vielleicht in logischer Hinsicht gewisse Vorteile, war aber viel umständlicher als die hier verwendete. Die Kenntnis der jetzigen Methode, die auf der Konstruktion des Modells beruht, verdanke ich Vorlesungen von Gödel über die Axiomatik der Mengenlehre[15]), in denen Gödel diese Methode zum Beweis der Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms verwendet hat. Ich werde noch zum Schluß die Gelegenheit haben, auf dieses überaus wichtige und interessante Ergebnis von Gödel zurückzukommen.

---

[12]) Vgl. *Über den Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms*. Sitzungsb. d. Preuß. Akad. d. Wiss. Phys. Math. Klasse (1922), S. 253–257; *Sur l'axiome du choix*. L'Enseignement Math. **34** (1935), S. 32–51; *Über eine abgeschwächte Fassung des Auswahlaxioms*. The Journal of Symbolic Logic **2** (1937), S. 1–25.

[13]) Vgl. die Mitteilung von A. Lindenbaum und mir: *Über die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und einiger seiner Folgerungen*. C. R. de la Soc. des Sci. et des Lettres de Varsovie **31** (1938), S. 27–32.

[14]) Diese sog. Methode der Relativisation von All- und Seinszeichen rührt von Tarski her und ist in meiner Arbeit: *O niezależności definicji skończoności w systemie logiki* (Über die Unabhängigkeit der Endlichkeitsdefinitionen im System der Logik) dargestellt, die als Beilage zum **16.** Band der Jahresberichte der Polnischen Math. Gesellschaft erschien.

[15]) Auf der Wiener Universität im Sommersemester 1936/37.

§ 1. Das Axiomensystem $\mathfrak{S}$.

Grundbegriffe: *Individuum*, *Klasse*, ε, Λ.

Der logische Charakter dieser Grundbegriffe ist der folgende: „*Individuum*" und „*Klasse*" sind Prädikatnamen mit einer Leerstelle; „ε" ist der Name einer Relation, die zwischen zwei Individuen oder zwischen einem Individuum und einer Klasse einen Sinn hat; „Λ" ist eine Individualkonstante. Als logische Basis für das nachstehende Axiomensystem reicht der engere Funktionenkalkül (ohne Identität) vollkommen aus.

Definition I. Ein Individuum x ist mit einem Individuum y identisch (in Zeichen $xIdy$) dann und nur dann, wenn für jede Klasse A die Formeln $x\varepsilon A$ und $y\varepsilon A$ äquivalent sind.

Axiom 1. Λ ist ein Individuum.

Definition II. x ist eine Menge dann und nur dann, wenn x ein Individuum ist und entweder $xId\Lambda$ gilt, oder es ein Individuum y mit $y\varepsilon x$ gibt.

Axiom 2. (Axiom der Bestimmtheit). Sind x, y Mengen derart, daß für jedes Individuum z die Formeln $z\varepsilon x$ und $z\varepsilon y$ äquivalent sind, so gilt $xIdy$.

Axiom 3. Ist x eine Menge, y ein Individuum derart, daß $y\, non\, \varepsilon x$, so gibt es eine Menge z derart, daß für jedes Individuum t die Formel $t\varepsilon z$ mit der Disjunktion: $t\varepsilon x$ oder $tIdy$ äquivalent ist.

Axiom 4. (Axiom der Vereinigung). Für jede Menge x gibt es eine Menge y derart, daß für jedes Individuum z die Formel $z\varepsilon y$ dann und nur dann gilt, wenn es ein Individuum t gibt, für welches $z\varepsilon t$ und $t\varepsilon x$.

Axiom 5. (Axiom der Potenzmenge). Für jede Menge x gibt es eine Menge y derart, daß für jedes Individuum z die Formel $z\varepsilon y$ dann und nur dann erfüllt ist, wenn z eine Menge ist und die Formel $t\varepsilon z$ für jedes Individuum t die Formel $t\varepsilon x$ nach sich zieht.

Definition III. Für beliebige Individuen u, v bezeichnen wir mit (u,v) diejenige Menge x, welche der Bedingung genügt: für jedes Individuum t gilt $t\varepsilon x$ dann und nur dann, wenn $tIdu$ oder $tIdv$.

Definition IV. Für beliebige Individuen u,v bezeichnen wir mit $[u,v]$ diejenige Menge x, welche der Bedingung genügt: für jedes Individuum t gilt $t\varepsilon x$ dann und nur dann, wenn $tId(u,u)$ oder $tId(u,v)$.

Axiom 6. (Axiom des Unendlichen). Es gibt eine Menge x, so daß $\Lambda\varepsilon x$ und die Formel $y\varepsilon x$ für jedes Individuum y die Formel $(y,y)\varepsilon x$ zur Folge hat.

Axiom 7. (Axiom der Nullmenge). Für kein Individuum x gilt $x\varepsilon\Lambda$.

Axiom 8. (Axiom der Fundierung). Ist A eine Klasse und gibt es ein Individuum x mit $x\varepsilon A$, so gibt es ein Individuum y derart, daß $y\varepsilon A$ und die Formeln $t\varepsilon y$ und $t\varepsilon A$ für kein Individuum t gleichzeitig erfüllt sind.

Axiom 9. Ist x ein Individuum, so gibt es eine Klasse A derart, daß die Formeln $t\varepsilon A$ und $tIdx$ für jedes Individuum t äquivalent sind.

Axiom 10. Ist A eine Klasse, so gibt es eine Klasse B derart, daß die Formeln $t\varepsilon B$ und $t\,non\,\varepsilon A$ für jedes Individuum t äquivalent sind.

Axiom 11. Sind A,B Klassen, so gibt es eine Klasse C derart, daß die Formel $t\varepsilon C$ für jedes Individuum t mit der Konjunktion: $t\varepsilon A$ und $t\varepsilon B$ äquivalent ist.

Axiom 12. Es gibt eine Klasse A, die folgender Bedingung genügt: für jedes Individuum t gilt $t\varepsilon A$ dann und nur dann, wenn t eine Menge ist, $t\neq\Lambda$ und aus $x\varepsilon t, y\varepsilon t$ für beliebige Individuen x,y immer $xIdy$ folgt.

Axiom 13. Es gibt eine Klasse A, die folgender Bedingung genügt: für ein beliebiges Individuum t gilt $t\varepsilon A$ dann und nur dann, wenn es Individuen u,v gibt, für welche $u\varepsilon v$ und $tId[u,v]$.

Axiom 14. Für jede Klasse A gibt es eine Klasse B mit folgender Eigenschaft: für ein beliebiges Individuum t gilt $t\varepsilon B$ dann und nur dann, wenn es Individuen u,v gibt, für welche $u\varepsilon A$ und $tId[u,v]$.

Axiom 15. Für jede Klasse A gibt es eine Klasse B, derart, daß für ein beliebiges Individuum t die Formel $t\varepsilon B$ dann und nur dann gilt, wenn es ein Individuum u mit $[t,u]\varepsilon A$ gibt.

Axiom 16. Für jede Klasse A gibt es eine Klasse B derart, daß für ein beliebiges Individuum t die Formel $t\varepsilon B$ dann und nur dann gilt, wenn es Individuen u,v gibt, für welche $[v,u]\varepsilon A$ und $tId[u,v]$.

Axiom 17. Für jede Klasse A gibt es eine Klasse B derart, daß für ein beliebiges Individuum t die Formel $t\varepsilon B$ dann und nur dann erfüllt ist, wenn es Individuen u,v,w gibt, für welche $[u,[v,w]]\varepsilon A$ und $tId[[u,v],w]$.

Axiom 18. (Axiom der Ersetzung). Ist x eine Menge und A eine Klasse mit folgender Eigenschaft:

für beliebige Individuen u,v,w aus $[u,v]\varepsilon A$ und $[u,w]\varepsilon A$ folgt $vIdw$,

so gibt es eine Menge y derart, daß für ein beliebiges Individuum z die Formel $z\varepsilon y$ dann und nur dann gilt, wenn es ein Individuum t gibt, für welches $t\varepsilon x$ und $[t,z]\varepsilon A$.

Aus diesen Axiomen läßt sich die ganze „klassische" Mengenlehre ableiten; wir brauchen auf ihren wirklichen Aufbau nicht näher einzugehen und beschränken uns auf zwei Definitionen, betreffend die Begriffe der Ordnung und Wohlordnung.

Definition V. Eine Menge y ordnet eine Menge x, falls $x\neq\Lambda$ und folgende Bedingungen für beliebige Individuen $u,v,w\varepsilon x$ erfüllt sind:

$[u,v]\varepsilon y$ *oder* $[v,u]\varepsilon y$;
ist $[u,v]\varepsilon y$ *und* $u\,non\,Idv$, *so ist* $[v,u]\,non\,\varepsilon y$;
ist $[u,v]\varepsilon y$ *und* $[v,w]\varepsilon y$, *so ist* $[u,w]\varepsilon y$;
$[u,u]\varepsilon y$.

Definition VI. Eine Menge y ordnet eine Menge x wohl, falls sie die Menge x ordnet und folgender Bedingung genügt: ist z eine Menge, so daß $z\,non\,Id\Lambda$ und die Formel $t\varepsilon z$ für jedes Individuum t die Formel $t\varepsilon x$ zur Folge hat, so gibt es ein Individuum $u\varepsilon z$ derart, daß $[u,v]\varepsilon y$ für jedes Individuum $v\varepsilon z$ gilt.

Mit Hilfe dieser Definitionen lassen sich das Ordnungsprinzip und der Wohlordnungssatz ausdrücken:

Ordnungsprinzip. Für jede Menge $x\neq\Lambda$ gibt es eine Menge y, die x ordnet.

Wohlordnungssatz. Für jede Menge $x\neq\Lambda$ gibt es eine Menge y, die x wohlordnet.

Wie wir schon erwähnt haben, stellt das System $\mathfrak{S}$ eine Abart des Systems von Bernays dar [7]). Die Unterschiede zwischen beiden Systemen beruhen 1^0 auf einer anderen Auffassung des Bestimmtheitsaxioms und 2^0 auf einer anderen Wahl der Grundbegriffe. Im System von Bernays treten 4 Grundbegriffe auf: „*Menge*", „*Klasse*", „η" (die Relation der Zugehörigkeit einer Menge zu einer Klasse), „ε" (die Relation der Zugehörigkeit einer Menge zu einer Menge). Zwei erste Begriffe könnte man übrigens mit Hilfe von ε und η definieren. Wir haben die Grundbegriffe anders gewählt, um mit einer Relation des Enthaltenseins auskommen zu können, was — unserer Meinung nach — besser den mathematischen Gewöhnungen entspricht. Die Konstante Λ wurde eingefügt, um die Axiomatik so fassen zu können, daß sie die Existenz der Individuen, die keine Mengen sind, nicht ausschließt.

Die „natürlichsten" Systeme der Mengenlehre sind — unserer Meinung nach — diejenigen, welche nur die zwei Grundbegriffe „*Menge*" und „ε" enthalten. Mehrere formale Systeme dieser Art, die bisher veröffentlicht worden sind, sind insofern nicht befriedigend, als sie außer den eigentlichen Axiomen noch „Axiomenschemata" enthalten, so daß sie sich eigentlich auf unendlich viele Axiome stützen. Wie wir aber gemeinsam mit Herrn Tarski bemerkt haben, kann man die durchaus endlichen Axiomensysteme dieser Art angeben, die mindestens so reich sind, wie das System von Bernays. Wir haben vor, solch ein Axiomensystem bei einer anderen Gelegenheit zu veröffentlichen.

§ 2. Die Konstruktion des Modells.

Von diesem Paragraphen an stellen wir uns auf dem Boden des von Neumannschen Systems der Mengenlehre. Mit lateinischen Buchstaben bezeichnen wir Mengen, mit deutschen Bereiche von Mengen, die im allgemeinen mit keiner Menge umfangsgleich zu sein brauchen. Mit den Buchstaben ξ,η,ζ,τ bezeichnen wir Ordnungszahlen und mit den Buchstaben φ,ψ,χ gewisse Funktionen. Außerdem wird die übliche Bezeichnungsweise der Mengenlehre verwendet.

1. Für jede Menge x bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(x)$ das System aller nicht-leeren Teilmengen von x.

2. (Induktive Definition für $\Sigma_\xi(x)$). Wir setzen für jede Menge x: a) $\Sigma_0(x)=x$; b) $\Sigma_\xi(x)$ ist für $\xi>0$ die Menge derjenigen t, für die entweder $t\varepsilon x$ gilt, oder es ein z und ein $\eta<\xi$ gibt derart, daß $t\varepsilon z\varepsilon\Sigma_\eta(x)$.

3. (Induktive Definition für $\Sigma_\xi(\mathfrak{A})$). Wir setzen für jeden Bereich $\mathfrak{A}$: a) $\Sigma_0(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}$; b) $\Sigma_\xi(\mathfrak{A})$ ist für $\xi>0$ der Bereich aller t, für die entweder $t\varepsilon\mathfrak{A}$ gilt, oder es ein $\eta<\xi$ und ein $y\varepsilon\Sigma_\eta(\mathfrak{A})$ gibt, so daß $x\varepsilon y$.

4. *Sind x,y Mengen, $y\varepsilon x$, so ist $\Sigma_\xi(y)\subset\Sigma_{\xi+1}(x)$ für jede Ordnungszahl ξ.*

Beweis. Ist $\xi=0$ und $t\varepsilon\Sigma_0(y)=y$, so gibt es ein $z\varepsilon x$ (und zwar ist $z=y$), für welches $t\varepsilon z\varepsilon x=\Sigma_0(x)$. Wir haben also $t\varepsilon\Sigma_1(x)$ d. h. es ist $\Sigma_0(y)\subset\Sigma_1(x)$. Nehmen wir an, die Behauptung gelte für alle Zahlen $\eta<\xi$. Ist $t\varepsilon\Sigma_\xi(y)$, so ist entweder $t\varepsilon y$ oder $t\varepsilon z\varepsilon\Sigma_\eta(y)$ für ein z und ein $\eta<\xi$. Im ersten Fall ist offenbar $t\varepsilon\Sigma_{\xi+1}(x)$, da $t\varepsilon y\varepsilon x=\Sigma_0(x)$; im zweiten schließen wir auf Grund der Induktionsvoraussetzung, daß $t\varepsilon z\varepsilon\Sigma_{\eta+1}(x)$ und, da $\eta+1<\xi+1$, $t\varepsilon\Sigma_{\xi+1}(x)$. Es ist also $\Sigma_\xi(y)\subset\Sigma_{\xi+1}(x)$, w. z. b. w.

5. *Sind ξ,η Ordnungszahlen und $\xi<\eta$, so gilt $\Sigma_\xi(x)\subset\Sigma_\eta(x)$ für jede Menge x und $\Sigma_\xi(\mathfrak{A})\subset\Sigma_\eta(\mathfrak{A})$ für jeden Bereich $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Ist $t\varepsilon\Sigma_\xi(x)$, so ist $t\varepsilon x$ oder $t\varepsilon z$, wo $z\varepsilon\Sigma_\zeta(x)$, $\zeta<\xi<\eta$. In beiden Fällen gilt laut **2** $t\varepsilon\Sigma_\eta(x)$. Der Beweis für Bereiche ist ganz analog.

6. Für jede Ordnungszahl ξ bezeichnen wir mit $\xi-1$ die Zahl, die ξ unmittelbar vorangeht, falls eine solche vorhanden ist. Ist ξ eine Limeszahl oder 0, so setzen wir $\xi-1=\xi$.

7. *Sind u,v Mengen, so ist $\Sigma_0(\{u,v\})=\{u,v\}$ und*

$$\Sigma_\xi(\{u,v\})=\{u,v\}+\Sigma_{\xi-1}(u)+\Sigma_{\xi-1}(v) \quad \textit{für alle } \xi>0.$$

Beweis. Die Formel für $\Sigma_0(\{u,v\})$ ist evident. Ferner gilt $t\varepsilon\Sigma_1(\{u,v\})$ dann und nur dann, wenn $t\varepsilon\{u,v\}$ oder wenn es ein $z\varepsilon\{u,v\}$ gibt, für welches $t\varepsilon z$. Dies ist aber gleichbedeutend mit $t\varepsilon\{u,v\}+u+v=\{u,v\}+\Sigma_0(u)+\Sigma_0(v)$. Die Behauptung gilt also für $\xi=1$. Setzen wir nun ihre Richtigkeit für alle $\eta<\xi$ voraus, wo $\xi>1$. Laut **2** gilt $t\varepsilon\Sigma_\xi(\{u,v\})$ dann und nur dann, wenn $t\varepsilon\{u,v\}$ oder wenn $t\varepsilon z\varepsilon\Sigma_\eta(\{u,v\})$ für gewisse z und $\eta<\xi$; dabei kann man $\eta-1<\eta$ voraussetzen. Nun ergibt nach der Induktionsvoraussetzung die zweite von diesen Bedingungen entweder $t\varepsilon z\varepsilon\{u,v\}$ oder $t\varepsilon z\varepsilon\Sigma_{\eta-1}(u)$ oder schließlich $t\varepsilon z\varepsilon\Sigma_{\eta-1}(v)$. Aus $\eta<\xi$ ergibt sich $\eta-1<\xi-1$ und aus **5** folgt $u\subset\Sigma_{\xi-1}(u)$ und $v\subset\Sigma_{\xi-1}(v)$. Wir haben also entweder $t\varepsilon u+v\subset\Sigma_{\xi-1}(u)+\Sigma_{\xi-1}(v)$ oder $t\varepsilon\Sigma_{\xi-1}(u)$ oder $t\varepsilon\Sigma_{\xi-1}(v)$, d.h. $t\varepsilon\{u,v\}+\Sigma_{\xi-1}(u)+\Sigma_{\xi-1}(v)$. Folglich ist

$$(1) \qquad \Sigma_\xi(\{u,v\})\subset\{u,v\}+\Sigma_{\xi-1}(u)+\Sigma_{\xi-1}(v).$$

Ist nun $t\epsilon\Sigma_{\xi-1}(u)+\Sigma_{\xi-1}(v)$ und ist $\xi\neq 0$ keine Limeszahl, so gilt nach **5** $t\epsilon\Sigma_\xi(u)+\Sigma_\xi(v)$. Ist aber ξ eine Limeszahl oder 0, so sind nach **6** die Formeln $t\epsilon\Sigma_{\xi-1}(u)+\Sigma_{\xi-1}(v)$ und $t\epsilon\Sigma_\xi(u)+\Sigma_\xi(v)$ direkt äquivalent. Damit ist die Inklusion $\Sigma_{\xi-1}(u)+\Sigma_{\xi-1}(v)\subset\Sigma_\xi(\{u,v\})$ bewiesen. Da auch $\{u,v\}\subset\Sigma_\xi(\{u,v\})$ für $\xi>0$ offenbar gilt, so haben wir $\{u,v\}+\Sigma_{\xi-1}(u)+\Sigma_{\xi-1}(v)\subset\Sigma_\xi(\{u,v\})$, was nach (1) die gewünschte Gleichheit ergibt.

8. *Für jede Menge x und jede Ordnungszahl ξ gilt*

$$\Sigma_\xi\big(\Sigma_1(x)\big)=\Sigma_{\xi+1}(x)=\Sigma_1\big(\Sigma_\xi(x)\big).$$

Beweis. Die Formel ist evident für $\xi=0$. Wir setzen voraus, daß sie für alle $\eta<\xi$ gilt. Ist $t\epsilon\Sigma_\xi\big(\Sigma_1(x)\big)$, so ist entweder $t\epsilon\Sigma_1(x)$ oder $t\epsilon z\epsilon\Sigma_\eta\big(\Sigma_1(x)\big)$, wo $\eta<\xi$. Im ersten Fall haben wir nach **5** $t\epsilon\Sigma_{\xi+1}(x)$. Im zweiten gilt laut der Induktionsvoraussetzung $t\epsilon z\epsilon\Sigma_{\eta+1}(x)$, woraus sich wegen **2**, **5** und $\eta+1<\xi+1$ die Formel $t\epsilon\Sigma_{\xi+1}(x)$ ergibt. Es ist also bewiesen, daß

$$\Sigma_\xi\big(\Sigma_1(x)\big)\subset\Sigma_{\xi+1}(x). \tag{1}$$

Ist nun $t\epsilon\Sigma_{\xi+1}(x)$, so gilt entweder $t\epsilon x$ oder $t\epsilon z\epsilon\Sigma_\eta(x)$ für ein gewisses z und $\eta<\xi+1$. Im ersten Fall haben wir offenbar $t\epsilon\Sigma_0(x)\subset\Sigma_1\big(\Sigma_\xi(x)\big)$. Im zweiten ist wegen **2**, **5** und $\eta\leqslant\xi$ $t\epsilon z\epsilon\Sigma_\xi(x)$ d.h. $t\epsilon\Sigma_1\big(\Sigma_\xi(x)\big)$. Es gilt also

$$\Sigma_{\xi+1}(x)\subset\Sigma_1\big(\Sigma_\xi(x)\big). \tag{2}$$

Ist schließlich $t\epsilon\Sigma_1\big(\Sigma_\xi(x)\big)$, so ist entweder $t\epsilon\Sigma_\xi(x)$ oder $t\epsilon z\epsilon\Sigma_\xi(x)$ für ein gewisses z. Im ersten Fall ist entweder $t\epsilon x\subset\Sigma_1(x)\subset\Sigma_\xi\big(\Sigma_1(x)\big)$ oder $t\epsilon u\epsilon\Sigma_\eta(x)$, wo $\eta<\xi$. Trifft das zweite zu, so erhalten wir $t\epsilon\Sigma_1\big(\Sigma_\eta(x)\big)$ also nach der Induktionsvoraussetzung $t\epsilon\Sigma_\eta\big(\Sigma_1(x)\big)$ und folglich nach **5** $t\epsilon\Sigma_\xi\big(\Sigma_1(x)\big)$, da $\eta\leqslant\xi$ ist. Im ersten Fall gilt also immer $t\epsilon\Sigma_\xi\big(\Sigma_1(x)\big)$. Ähnlich überlegen wir im zweiten Fall: es gilt nämlich entweder $t\epsilon z\epsilon x$ oder $t\epsilon z\epsilon v\epsilon\Sigma_\eta(x)$, wo $\eta<\xi$ ist. Im ersten Fall erhalten wir $t\epsilon\Sigma_1(x)\subset\Sigma_\xi\big(\Sigma_1(x)\big)$ und im zweiten $t\epsilon z\epsilon\Sigma_1\big(\Sigma_\eta(x)\big)=\Sigma_\eta\big(\Sigma_1(x)\big)$, d. h. $t\epsilon\Sigma_{\eta+1}\big(\Sigma_1(x)\big)$; da $\eta+1\leqslant\xi$ ist, folgt daraus nach **5** $t\epsilon\Sigma_\xi\big(\Sigma_1(x)\big)$. Wir erhalten somit die Inklusion

$$\Sigma_1\big(\Sigma_\xi(x)\big)\subset\Sigma_\xi\big(\Sigma_1(x)\big). \tag{3}$$

Unsere Behauptung folgt nun unmittelbar aus (1), (2) und (3).

9. *Sind u,v Mengen und $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ Bereiche, so gilt*

$$\Sigma_\xi(u+v)=\Sigma_\xi(u)+\Sigma_\xi(v) \quad \textit{und} \quad \Sigma_\xi(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})=\Sigma_\xi(\mathfrak{A})+\Sigma_\xi(\mathfrak{B})$$

für jede Ordnungszahl ξ.

Beweis. Es genügt nur die erste Formel zu betrachten, der Beweis der zweiten ist völlig analog.

Für $\xi=0$ ist die Formel offenbar richtig. Wir setzen nun ihre Richtigkeit für alle $\eta<\xi$ voraus. Ist $t\epsilon\Sigma_\xi(u+v)$, so ist entweder $t\epsilon u+v$, oder $t\epsilon z\epsilon\Sigma_\eta(u+v)$, wo $\eta<\xi$. Im ersten Fall erhalten wir nach **5** $t\epsilon\Sigma_0(u)+\Sigma_0(v)\subset\Sigma_\xi(u)+\Sigma_\xi(v)$; im zweiten gilt laut der Induktionsvoraussetzung $t\epsilon z\epsilon\Sigma_\eta(u)+\Sigma_\eta(v)$, also $t\epsilon\Sigma_\xi(u)+\Sigma_\xi(v)$. Ist umgekehrt $t\epsilon\Sigma_\xi(u)+\Sigma_\xi(v)$, so ist entweder $t\epsilon u$ oder $t\epsilon v$ oder $t\epsilon x\epsilon\Sigma_\eta(u)$ oder $t\epsilon y\epsilon\Sigma_\zeta(v)$, wo $\eta,\zeta<\xi$. In zwei ersten Fällen haben wir $t\epsilon u+v\subset\Sigma_\xi(u+v)$; im dritten Fall ist nach der Induktionsvoraussetzung $t\epsilon y\epsilon\Sigma_\eta(v)\subset\Sigma_\eta(u)+\Sigma_\eta(v)\subset\Sigma_\eta(u+v)$, also laut **2** $t\epsilon\Sigma_\xi(u+v)$. Ebenso zeigen wir im vierten Fall, daß $t\epsilon\Sigma_\xi(u+v)$. Diese Formel ist also ganz allgemein für $t\epsilon\Sigma_\xi(u)+\Sigma_\xi(v)$ gültig. Wir haben somit die Äquivalenz der Formeln $t\epsilon\Sigma_\xi(u+v)$ und $t\epsilon\Sigma_\xi(u)+\Sigma_\xi(v)$ bewiesen, w. z. b. w.

10. *Sind u,v Mengen, $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ Bereiche und ist $u\subset v$ und $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$, so ist $\Sigma_\xi(u)\subset\Sigma_\xi(v)$, $\Sigma_\xi(\mathfrak{A})\subset\Sigma_\xi(\mathfrak{B})$ für jede Ordnungszahl ξ.*

Dies folgt direkt aus **9**.

11. *Für jede Ordnungszahl ξ und jede Menge von Mengen x gilt $\Sigma_\xi(\sum_{y\epsilon x}y)\subset\Sigma_{\xi+1}(x)$.*

Beweis. Nach **2** haben wir offenbar $\sum_{y\epsilon x}y\subset\Sigma_1(x)$. Durch Anwendung von **10** und **8** schließen wir hieraus

$$\Sigma_\xi(\sum_{y\epsilon x}y)\subset\Sigma_\xi\big(\Sigma_1(x)\big)=\Sigma_{\xi+1}(x),$$

w. z. b. w.

12. *Ist x eine Menge, $\mathfrak{A}$ ein Bereich und ξ eine Ordnungszahl, so ist $\Sigma_\xi\big(\mathfrak{P}(x)\cdot\mathfrak{A}\big)-\mathfrak{P}(x)\cdot\mathfrak{A}\subset\Sigma_\xi(x)$.*

Beweis. Die Formel ist evident für $\xi=0$. Wir setzen ihre Richtigkeit für alle $\eta<\xi$ voraus. Ist $t\epsilon\Sigma_\xi\big(\mathfrak{P}(x)\cdot\mathfrak{A}\big)-\mathfrak{P}(x)\cdot\mathfrak{A}$, so gibt es $\eta<\xi$ und z derart, daß $t\epsilon z\epsilon\Sigma_\eta\big(\mathfrak{P}(x)\cdot\mathfrak{A}\big)$. Ist $z\epsilon\mathfrak{P}(x)\cdot\mathfrak{A}$, so haben wir $t\epsilon z\subset x=\Sigma_0(x)\subset\Sigma_\xi(x)$. Ist z *non* $\epsilon\,\mathfrak{P}(x)\cdot\mathfrak{A}$, so gilt laut der Induktionsvoraussetzung $t\epsilon z\epsilon\Sigma_\eta(x)$, es ist also $t\epsilon\Sigma_\xi(x)$. Die Formel $t\epsilon\Sigma_\xi(x)$ gilt also in allen Fällen, w. z. b. w.

13. (Induktive Definition für a_n). a) $a_0=0$; b) $a_{n+1}=\{a_n\}$.

14. $Z=\underset{a_n}{E}[n=0,1,2,\ldots]$.

15. $A_n=Z-\{a_n\}$ *für* $n=0,1,2,\ldots$.

16. $K=\underset{A_n}{E}[n=1,2,\ldots]$.

17. (Induktive Definition für K_ξ).

a) $K_0=K+\{A_0\}$; b) $K_\xi=\sum_{\eta<\xi}K_\eta+\mathfrak{P}(\sum_{\eta<\xi}K_\eta)$ für $\xi>0$.

18. *Sind ξ,η Ordnungszahlen und $\xi<\eta$, so ist $K_\xi\subset K_\eta$.*

Der Beweis durch Induktion bietet keine Schwierigkeiten.

19. *Für beliebige Ordnungszahlen ξ,η ist $\Sigma_\xi(K_\eta)\subset K_\eta+Z$.*

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $\xi=0$, denn $\Sigma_0(K_\eta)=K_\eta$. Wir setzen voraus, daß die Behauptung für alle $\zeta<\xi$ richtig ist. Ist $t\in\Sigma_\xi(K_\eta)$, so ist entweder $t\in K_\eta$, oder es gibt ein z und ein $\zeta<\xi$ derart, daß $t\in z\in\Sigma_\zeta(K_\eta)$. Im ersten Fall haben wir $t\in K_\eta+Z$. Im zweiten Fall schließen wir aus der Induktionsvoraussetzung, daß $t\in z\in K_\eta+Z$. Ist nun $z\in Z$, so ist nach **14** $z=a_n$ für ein gewisses n und folglich nach **13** $t=a_{n-1}\in Z$. Ist aber $z\in K_\eta$, so gibt es eine kleinste Zahl $\tau\leqslant\eta$, für die $z\in K_\tau$. Ist $\tau=0$, so haben wir nach **17** $z=A_m$ für ein gewisses m, wonach wegen **15** $t\in A_m\subset Z$ d.h. $t\in Z$. Ist aber $\tau>0$, so ist nach **17** $K_\tau=\sum_{\nu<\tau}K_\nu+\mathfrak{P}(\sum_{\nu<\tau}K_\nu)$ und, da t *non* $\in K_\nu$ für $\nu<\tau$, $z\in\mathfrak{P}(\sum_{\nu<\tau}K_\nu)$, d.h. nach **1** $0\neq z\subset\sum_{\nu<\tau}K_\nu$. Daraus ergibt sich $t\in\sum_{\nu<\tau}K_\nu$, also nach **18** $t\in K_\eta$. Jedenfalls ist also $t\in K_\eta+Z$, w. z. b. w.

20. Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir den Bereich aller x, für die es ein ξ mit $x\in K_\xi$ gibt. Ist $x\in\mathfrak{M}$, so bezeichnen wir mit $\tau(x)$ die kleinste Ordnungszahl ξ, für welche $x\in K_\xi$.

21. *Ist $x\in\mathfrak{M}$ und $\tau(x)>0$, so ist $0\neq x\subset\sum_{\eta<\tau(x)}K_\eta$ und $\tau(y)<\tau(x)$ für jedes $y\in x$.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus **17** und **20**.

22. *Ist x eine Menge und $0\neq x\subset K_\xi$, so ist $x\in K_{\xi+1}$ und folglich $x\in\mathfrak{M}$.*

Beweis. Aus $0\neq x\subset K_\xi$ folgt $0\neq x\subset\sum_{\eta<\xi+1}K_\eta$, d.h. $x\in\mathfrak{P}(\sum_{\eta<\xi+1}K_\eta)\subset K_{\xi+1}$.

23. *Ist $u\in\mathfrak{M}-K_0$, so ist $\mathfrak{P}(u)\in\mathfrak{M}$.*

Beweis. Nach **21** ist $0\neq\mathfrak{P}(u)\subset\mathfrak{P}(\sum_{\eta<\tau(u)}K_\eta)\subset K_{\tau(u)}$, wonach wegen **22** $\mathfrak{P}(u)\in\mathfrak{M}$.

24. *Ist u eine Menge und $0\neq u\subset\mathfrak{M}-K_0$, so ist $\sum_{x\in u}x\in\mathfrak{M}$.*

Beweis. Für $x\in u$ haben wir $\tau(x)>0$, also nach **21** $0\neq x\subset\sum_{\eta<\tau(x)}K_\eta$. Ist also ζ eine Ordnungszahl, welche alle $\tau(x)$ mit $x\in u$ übertrifft, so folgt $x\subset\sum_{\eta<\zeta}K_\eta$ für alle $x\in u$, wonach wegen **18** $0\neq\sum_{x\in u}x\subset K_\zeta$. Nach **22** ergibt sich daraus $\sum_{x\in u}x\in\mathfrak{M}$, w. z. b. w.

25. $0,\{0\}$ *non* $\in\mathfrak{M}$.

Beweis. Es ist offenbar $0,\{0\}$ *non* $\in K_0$. Ist nun $\xi>0$ und gilt 0 *non* $\in K_\eta$ für alle $\eta<\xi$, so gilt 0 *non* $\in\sum_{\eta<\xi}K_\eta$ und nach **1** 0 *non* $\in\mathfrak{P}(\sum_{\eta<\xi}K_\eta)$. Nach **17** folgt daraus 0 *non* $\in K_\xi$, also durch Induktion 0 *non* $\in\mathfrak{M}$.

Wäre $\{0\}\in\mathfrak{M}$, so würde nach **21** $\{0\}\subset\sum_{\eta<\xi}K_\eta$ für $\xi=\tau(\{0\})$ gelten. Das ist aber unmöglich, da 0 *non* $\in\sum_{\eta<\xi}K_\eta$, w. z. b. w.

26. *Ist $x\in K_0$ und $y\in x$, so ist y non $\in\mathfrak{M}$.*

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so würde nach **14**, **15**, **17** und **20** $a_n\in K_\xi$ für gewisse n und ξ gelten. Nach **13** und **21** würde daraus $\{0\}\in K_\xi$ folgen, was zu **25** im Widerspruch steht.

27. *Ist ξ eine Ordnungszahl und $x\in\mathfrak{M}$, so ist* a) $\Sigma_\xi(x)-\mathfrak{M}\subset Z$; b) $\Sigma_\xi(\mathfrak{M})\subset\mathfrak{M}+Z$.

Beweis. a) Ist $\tau(x)=0$, so ist $x=A_m$ für ein gewisses m und unsere Behauptung ist evident. Ist $\tau(x)>0$, so haben wir nach **18** und **21** $x\subset K_{\tau(x)}$, wonach wegen **10** und **19** $\Sigma_\xi(x)\subset K_{\tau(x)}+Z$, also $\Sigma_\xi(x)-K_{\tau(x)}\subset Z$. Da $K_{\tau(x)}\subset\mathfrak{M}$, so folgt daraus $\Sigma_\xi(x)-\mathfrak{M}\subset Z$, w.z.b.w.

b) die Formel ist offenbar richtig für $\xi=0$. Ist nun $\xi>0$ und gilt $\Sigma_\eta(\mathfrak{M})\subset\mathfrak{M}+Z$ für alle $\eta<\xi$, so erfüllt jedes $x\in\Sigma_\xi(\mathfrak{M})$ entweder die Formel $x\in\mathfrak{M}$ oder die Formel $x\in y\in\Sigma_\eta(\mathfrak{M})$, wo $\eta<\xi$. In diesem zweiten Fall erhalten wir auf Grund der Induktionsvoraussetzung $y\in\mathfrak{M}+Z$. Ist $y\in Z$, so ist $x\in Z$ nach **13** und **14**. Ist $y\in\mathfrak{M}$ und $\tau(y)=0$, so ist $x\in Z$ nach **15**, **16** und **17**. Ist schließlich $\tau(y)>0$, so ist nach **18** und **21** $x\in y\subset K_{\tau(y)}\subset\mathfrak{M}$. In allen Fällen gilt also $x\in\mathfrak{M}+Z$, w.z.b.w.

28. Mit $\mathfrak{G}_0$ bezeichnen wir das System aller eineindeutigen Abbildungen von K auf sich selbst. Die Abbildung, die durch Zusammensetzung von zwei Abbildungen $\varphi,\psi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$ entsteht, wird mit $\varphi\psi$ bezeichnet[16]); mit φ^{-1} bezeichnen wir die zu φ inverse Abbildung.

29. Für $x\,\epsilon\,K$ und $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$ bezeichnen wir mit $\varphi(x)$ dasjenige Element von K, welches aus x durch die Abbildung φ entsteht.

30. (Induktive Definition für $|\varphi,x|$). Wir setzen für $x\,\epsilon\,\mathfrak{M}$ und $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$: [a]) $|\varphi,\Lambda_0|=\Lambda_0$; [b]) $|\varphi,x|=\varphi(x)$ für $x\,\epsilon\,K$; [c]) $|\varphi,x|=\underset{|\varphi,y|}{E}[y\,\epsilon\,x]$ falls $\tau(x)>0$.

31. *Ist $x\,\epsilon\,\mathfrak{M}$ und $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$, so ist $|\varphi,x|\,\epsilon\,\mathfrak{M}$.*

Beweis. Ist $\tau(x)=0$, so folgt die Behauptung sofort aus **30** [a]), [b]). Wir setzen die Richtigkeit der Behauptung für alle x mit $\tau(x)<\xi$ voraus und betrachten ein x, für welches $\tau(x)=\xi$. Aus **25**, **30** [c]) und der Induktionsvoraussetzung ergibt sich $0\neq|\varphi,x|\subset\mathfrak{M}$, wonach wegen **22** $|\varphi,x|\,\epsilon\,\mathfrak{M}$, w. z. b. w.

32. *Ist x eine Menge und $0\neq x\subset\mathfrak{M}$, so ist $|\varphi,x|=\underset{|\varphi,y|}{E}[y\,\epsilon\,x]$.*

Beweis. Aus **22** ergibt sich leicht die Existenz einer Ordnungszahl ξ, für welche $x\,\epsilon\,K_\xi$. Folglich ist $x\,\epsilon\,\mathfrak{M}$. Nach **26** muß $\tau(x)>0$ sein und unsere Behauptung ergibt sich sofort aus **30** [c]).

33. *Ist $x\,\epsilon\,\mathfrak{M}$ und $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$ so ist $\big|\varphi^{-1},|\varphi,x|\big|=x$.*

Beweis. Wir verfahren durch Induktion in bezug auf $\tau(x)$. Ist $\tau(x)=0$, so ist die Behauptung evident. Wir setzen nun voraus, daß sie für alle x mit $\tau(x)<\xi$ gilt und sei x ein Element von $\mathfrak{M}$ mit $\tau(x)=\xi$. Da $\xi>0$ ist, so erhalten wir aus **21** $0\neq x\subset\mathfrak{M}$, wonach wegen **32** und **31** $0\neq|\varphi,x|=\underset{|\varphi,y|}{E}[y\,\epsilon\,x]\subset\mathfrak{M}$. Durch nochmalige Anwendung von **32** folgt $\big|\varphi^{-1},|\varphi,x|\big|=\underset{|\varphi^{-1},|\varphi,y||}{E}[y\,\epsilon\,x]$. Da aber nach **21** $\tau(y)<\xi$ für $y\,\epsilon\,x$ ist, so erhalten wir laut der Induktionsvoraussetzung $\big|\varphi^{-1},|\varphi,x|\big|=x$, w. z. b. w.

34. *Ist $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$ und $x,y\,\epsilon\,\mathfrak{M}$, so sind die Formeln $x\,\epsilon\,y$ und $|\varphi,x|\,\epsilon\,|\varphi,y|$ äquivalent.*

---

[16]) D.h. zuerst wird die Abbildung ψ und dann φ ausgeführt.

Beweis. Es sei zuerst $x\,\epsilon\,y$. Aus **26** folgt $y\ \mathit{non}\,\epsilon\,K_0$, also $\tau(y)>0$, also nach **21** $0\neq y\subset\mathfrak{M}$ und daher laut **32** $|\varphi,y|=\underset{|\varphi,t|}{E}[t\,\epsilon\,y]$. Aus $x\,\epsilon\,y$ folgt also $|\varphi,x|\,\epsilon\,|\varphi,y|$. Es sei nun $|\varphi,x|\,\epsilon\,|\varphi,y|$. Nach **31** ist $|\varphi,y|\,\epsilon\,\mathfrak{M}$, wir können also ganz ähnlich wie oben schließen, daß $0\neq|\varphi,y|\subset\mathfrak{M}$, woraus nach **32** $\big|\psi,|\varphi,y|\big|=\underset{|\psi,t|}{E}[t\,\epsilon\,|\varphi,y|]$ für $\psi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$. Setzt man hier $\psi=\varphi^{-1}$, so folgt nach **33** $x\,\epsilon\,y$, w. z. b. w.

35. *Ist $x\,\epsilon\,\mathfrak{M}$ und $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$, so ist $\tau(x)=\tau(|\varphi,x|)$.*

Beweis. Wir verfahren durch Induktion in bezug auf $\tau(x)$. Für $\tau(x)=0$ ist die Behauptung evident wegen **30** [a]), [b]). Es sei nun $\xi>0$, $\tau(x)=\xi$ und nehmen wir an, die Behauptung sei richtig für alle y mit $\tau(y)<\xi$. Nach **21** ist $0\neq x\subset\sum_{\eta<\xi}K_\eta$, wonach laut **32** und der Induktionsvoraussetzung $0\neq|\varphi,x|\subset\sum_{\eta<\xi}K_\eta$ d.h. $|\varphi,x|\,\epsilon\,K_\xi$. Es ist also jedenfalls $\tau(|\varphi,x|)\leqslant\xi$. Wäre $\tau(|\varphi,x|)<\xi$, so hätten wir nach der Induktionsvoraussetzung $\tau\big(\big|\varphi^{-1},|\varphi,x|\big|\big)<\xi$ d.h. nach **33** $\tau(x)<\xi$. Da dies mit unseren Voraussetzungen im Widerspruch steht, so ist $\tau(|\varphi,x|)=\xi=\tau(x)$, w. z. b. w.

36. *Ist $x\,\epsilon\,\mathfrak{M}$ und $\varphi,\psi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$ so ist $\big|\varphi,|\psi,x|\big|=|\varphi\psi,x|$.*

Beweis. Wir wenden wieder eine Induktion in bezug auf $\tau(x)$ an. Ist $\tau(x)=0$, so ist der Satz richtig. Wir nehmen also an, daß $\xi>0$ ist und der Satz für alle $y\,\epsilon\,\mathfrak{M}$ mit $\tau(y)<\xi$ gilt. Es sei $\tau(x)=\xi$. Nach **32** haben wir $|\psi,x|=\underset{|\psi,y|}{E}[y\,\epsilon\,x]$, wobei wegen **21** und **35** $\tau(|\psi,y|)<\xi$ für $y\,\epsilon\,x$. Folglich ist $0\neq|\psi,x|\subset\mathfrak{M}$, woraus sich nach **32** die Formel $\big|\varphi,|\psi,x|\big|=\underset{|\varphi,t|}{E}[t\,\epsilon\,|\psi,x|]=\underset{|\varphi,|\psi,y||}{E}[y\,\epsilon\,x]$ ergibt. Die Induktionsvoraussetzung liefert nun $\big|\varphi,|\psi,x|\big|=\underset{|\varphi\psi,y|}{E}[y\,\epsilon\,x]=|\varphi\psi,x|$, w. z. b. w.

37. *Ist $x\,\epsilon\,\mathfrak{M}$ und $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$, ist ferner ξ eine Ordnungszahl und $\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}\,\epsilon\,\mathfrak{M}$, so ist $|\varphi,\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}|=\Sigma_\xi(|\varphi,x|)\cdot\mathfrak{M}$.*

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $\xi=0$. Wir haben in der Tat $\Sigma_0(x)=x$, $\Sigma_0(|\varphi,x|)=|\varphi,x|$. Ferner ist $x\ \mathit{non}\,\epsilon\,K_0$, da wir sonst nach **26** $x\cdot\mathfrak{M}=0$ hätten und die Voraussetzung $\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}\,\epsilon\,\mathfrak{M}$ würde, wie aus **25** ersichtlich, nicht erfüllt sein können. Es ist also $\tau(x)>0$, wonach wegen **21** $0\neq x\subset\mathfrak{M}$. Aus **32** folgern wir nun

(1) $$|\varphi,x\cdot\mathfrak{M}|=\underset{|\varphi,y|}{E}[y\,\epsilon\,x\cdot\mathfrak{M}].$$

Ist also $z\epsilon|\varphi,x\cdot\mathfrak{M}|$, so gilt $z=|\varphi,y|$, wo $y\epsilon x\cdot\mathfrak{M}$. Danach ist $|\varphi,y|\epsilon|\varphi,x|$ laut **34** und $|\varphi,y|\epsilon\mathfrak{M}$ laut **31**. Folglich haben wir $z\epsilon|\varphi,x|\cdot\mathfrak{M}$; es gilt also

(2) $$|\varphi,x\cdot\mathfrak{M}|\subset|\varphi,x|\cdot\mathfrak{M}.$$

Ist nun $z\epsilon|\varphi,x|\cdot\mathfrak{M}$, so gilt nach **33**, **34** und **31** $|\varphi^{-1},z|\epsilon x\cdot\mathfrak{M}$, woraus sich nach (1) $\big|\varphi,|\varphi^{-1},z|\big|\epsilon|\varphi,x\cdot\mathfrak{M}|$, d.h. mit Rücksicht auf **33** $z\epsilon|\varphi,x\cdot\mathfrak{M}|$, ergibt. Es folgt daraus die Inklusion $|\varphi,x|\cdot\mathfrak{M}\subset|\varphi,x\cdot\mathfrak{M}|$, die mit (2) zusammen beweist, daß die Behauptung unseres Satzes für $\xi=0$ erfüllt ist. Wir setzen nun die Richtigkeit dieser Behauptung für alle $\eta<\xi$ voraus. Es sei $\varphi\epsilon\mathfrak{G}_0$, $x\epsilon\mathfrak{M}$, $\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}\epsilon\mathfrak{M}$. Es ist dann $\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}\,non\,\epsilon K_0$, da wir sonst nach **25** und **26** $\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}=0\,non\,\epsilon\mathfrak{M}$ hätten. Die Zahl $\tau\big(\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}\big)$ ist also >0, woraus nach **21** $0\neq\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ und folglich laut **32**

(3) $$|\varphi,\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}|=\underset{|\varphi,y|}{E}[y\epsilon\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}].$$

Ist also $z\epsilon|\varphi,\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}|$, so gibt es ein $y\epsilon\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}$, für welches $z=|\varphi,y|$. Es sind nun laut **2** zwei Fälle zu unterscheiden: entweder $y\epsilon x$ oder es gibt ein t und eine Zahl $\eta<\xi$, so daß $y\epsilon t\epsilon\Sigma_\eta(x)$. Im ersten Fall erhalten wir aus **31** und **34** $z\epsilon|\varphi,x|\cdot\mathfrak{M}$, also umsomehr $z\epsilon\Sigma_\xi(|\varphi,x|)\cdot\mathfrak{M}$. Im zweiten Fall überlegen wir folgendermaßen: wäre $t\,non\,\epsilon\mathfrak{M}$, so hätten wir nach **27** $t\epsilon Z$, wonach $y\epsilon Z$ und $y\epsilon u\epsilon K_0$ für ein gewisses u. Aus **26** erhielten wir also $y\,non\,\epsilon\mathfrak{M}$, was unserer Voraussetzung widerspricht. Es ist also $y\epsilon t\epsilon\Sigma_\eta(x)\cdot\mathfrak{M}$. Nach **34** erhalten wir daraus $z=|\varphi,y|\epsilon|\varphi,t|\epsilon|\varphi,\Sigma_\eta(x)\cdot\mathfrak{M}|$, woraus sich durch Anwendung der Induktionsannahme $z\epsilon\Sigma_\xi(|\varphi,x|)\cdot\mathfrak{M}$ ergibt. Damit ist bewiesen:

(4) $$|\varphi,\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}|\subset\Sigma_\xi(|\varphi,x|)\cdot\mathfrak{M}.$$

Es sei nun umgekehrt $y\epsilon\Sigma_\xi(|\varphi,x|)\cdot\mathfrak{M}$. Wir haben wieder zwei Fälle zu unterscheiden: entweder $y\epsilon|\varphi,x|\cdot\mathfrak{M}$ oder es gibt ein t und eine Zahl $\eta<\xi$, so daß $y\epsilon t\epsilon\Sigma_\eta(|\varphi,x|)$. Im ersten Fall erhalten wir aus **31**, **33** und **34** $|\varphi^{-1},y|\epsilon x\cdot\mathfrak{M}\subset\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}$, wonach mit Rücksicht auf **33** und **34** $y\epsilon|\varphi,\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}|$. Im zweiten Fall schließen wir ganz ähnlich wie oben, daß $t\epsilon\mathfrak{M}$. Aus $y\epsilon t\epsilon\Sigma_\eta(|\varphi,x|)\cdot\mathfrak{M}$ folgt nun durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung $y\epsilon t\epsilon|\varphi,\Sigma_\eta(x)\cdot\mathfrak{M}|$, woraus nach **33** und **34** $|\varphi^{-1},y|\epsilon|\varphi^{-1},t|\epsilon\Sigma_\eta(x)\cdot\mathfrak{M}$. Folglich ist $|\varphi^{-1},y|\epsilon\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}$, woraus sich durch nochmalige Anwendung von **33** und **34** $y\epsilon|\varphi,\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}|$ ergibt. Es ist damit bewiesen, daß

(5) $$\Sigma_\xi(|\varphi,x|)\cdot\mathfrak{M}\subset|\varphi,\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}|,$$

und die Formeln (4) und (5) beweisen die Richtigkeit des Satzes für die Zahl ξ, w. z. b. w.

38. Eine Menge $\mathfrak{G}\subset\mathfrak{G}_0$ heißt Gruppe, wenn aus $\varphi,\psi\epsilon\mathfrak{G}_0$ immer $\varphi\psi^{-1}\epsilon\mathfrak{G}$ folgt. Das System aller Gruppen wird mit $\mathcal{G}$ bezeichnet.

39. Ist $A\subset K$, $\mathfrak{G}\epsilon\mathcal{G}$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}(A)$ die Untergruppe von $\mathfrak{G}$, bestehend aus Funktionen $\varphi\epsilon\mathfrak{G}$ die der Bedingung $\varphi(x)=x$ für $x\epsilon A$ genügen.

40. Für $A\subset K$ und $\mathfrak{G}\epsilon\mathcal{G}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A)$ den Bereich der Mengen $x\epsilon\mathfrak{M}$, so daß $|\varphi,x|=x$ für alle $\varphi\epsilon\mathfrak{G}(A)$.

41. *Ist* $A\subset K$, $\mathfrak{G}\epsilon\mathcal{G}$, $x\epsilon\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A)$ *und* $\varphi\epsilon\mathfrak{G}_0$, *so ist* $|\varphi,x|\epsilon\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}\big(\varphi(A)\big)$ [17].

Beweis. Erstens gilt nach **31** $|\varphi,x|\epsilon\mathfrak{M}$. Aus der Voraussetzung ergibt sich weiter, daß

(1) $$|\psi,x|=x \quad \text{für} \quad \psi\epsilon\mathfrak{G}(A).$$

Ist nun $\chi\epsilon\mathfrak{G}\big(\varphi(A)\big)$, so gehört nach **39** die Funktion $\varphi^{-1}\chi\varphi$ der Gruppe $\mathfrak{G}(A)$ an. Nach (1) ist also $|\varphi^{-1}\chi\varphi,x|=x$, wonach wegen **33** und **36** $\big|\chi,|\varphi,x|\big|=|\varphi,x|$. Da dies für jedes $\chi\epsilon\mathfrak{G}\big(\varphi(A)\big)$ gilt, so erhalten wir nach **40** $|\varphi,x|\epsilon\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}\big(\varphi(A)\big)$, w. z. b. w.

42. Eine Menge $M\subset\mathfrak{P}(K)$ wird als $\mathfrak{G}$-Ring bezeichnet, falls $\mathfrak{G}\epsilon\mathcal{G}$ und folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $$\text{aus } X,Y\epsilon M \text{ folgt } X+Y\epsilon M;$$

(2) $$\sum_{X\epsilon M}X=K;$$

(3) $$\text{aus } X\epsilon M,\ \varphi\epsilon\mathfrak{G} \text{ folgt } \varphi(X)\epsilon M.$$

Das System aller $\mathfrak{G}$-Ringe wird mit $R(\mathfrak{G})$ bezeichnet.

43. (Definition des Modells). Es sei $\mathfrak{G}\epsilon\mathcal{G}$ und $M\epsilon R(\mathfrak{G})$. Ein Element $x\epsilon\mathfrak{M}$ wird als ein $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnetes Element bezeichnet, falls es zwei folgende Eigenschaften hat:

(1) $$\text{es gibt ein } A\epsilon M, \text{ so daß } x\epsilon\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A);$$

(2) $$\text{für jede Ordnungszahl } \xi \text{ ist } \Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}\subset\sum_{B\epsilon M}\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B)\ ^{18)}.$$

Der Bereich aller $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneten Elemente wird mit $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ bezeichnet.

---

[17]) $\varphi(A)$ steht wie gewöhnlich für $\underset{\varphi(x)}{E}[x\epsilon A]$. Es ist übrigens $|\varphi,A|=\varphi(A)$.

[18]) Diese Formel ist wie folgt zu lesen: für jedes $t\epsilon\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}$ gibt es eine Menge $B\epsilon M$, so daß $t\epsilon\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B)$.

Einen Bereich $\mathfrak{A}$ nennen wir $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnet, wenn er gleich A_0 ist oder folgende Bedingungen erfüllt:

(3) $$0 \neq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}};$$

(4) es gibt eine Menge $A \epsilon M$, so daß die Formeln $x \epsilon \mathfrak{A}$ und $|\varphi, x| \epsilon \mathfrak{A}$ für jede Funktion $\varphi \epsilon \mathfrak{G}(A)$ äquivalent sind.

44. *Ist* $\mathfrak{G} \epsilon \mathcal{G}$ *und* $M \epsilon R(\mathfrak{G})$, *so ist* $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} \subset \sum_{A \epsilon M} \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A)$.

Der Beweis ergibt sich sofort aus **43**.

45. *Ist* $\mathfrak{G} \epsilon \mathcal{G}$ *und* $M \epsilon R(\mathfrak{G})$, *so ist* $K_0 \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$.

Beweis. Ist $x \epsilon K_0$, so ist $x \epsilon \mathfrak{M}$. Aus **42** folgt ferner, daß es eine Menge $A \epsilon M$ gibt, für die $x \epsilon A$. Daher gilt nach **39**, **40** und **30** b) $x \epsilon \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A)$. Ist schließlich ξ eine Ordnungszahl und $y \epsilon \Sigma_\xi(x)$, so ist $y \operatorname{non} \epsilon \mathfrak{M}$, denn die Elemente von $\Sigma_\xi(x)$ sind, wie leicht festzustellen, immer mit einem a_n identisch, können also nach **26** nicht zu $\mathfrak{M}$ gehören. Es ist also $\Sigma_\xi(x) \cdot \mathfrak{M} = 0$. Daraus folgt nach **43**, daß x ein $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnetes Element ist, w. z. b. w.

46. *Ist* $\mathfrak{G} \epsilon \mathcal{G}$, $M \epsilon R(\mathfrak{G})$ *und* $x \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K_0$, *so ist* $x \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$.

Beweis. Aus $x \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K_0$ folgt $x \epsilon \mathfrak{M} - K_0$, also $\tau(x) > 0$. Wenn also $y \epsilon x$, so ist nach **21** $y \epsilon \mathfrak{M}$. Da x ein $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnetes Element ist, so gibt es für jedes $t \epsilon \Sigma_0(x)$ und insbesondere für $t = y$ eine Menge $A \epsilon M$, so daß $y \epsilon \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A)$. Nach **4** gilt ferner für jede Ordnungszahl ξ $\Sigma_\xi(y) \cdot \mathfrak{M} \subset \Sigma_{\xi+1}(x) \cdot \mathfrak{M}$, wonach $\Sigma_\xi(y) \cdot \mathfrak{M} \subset \sum_{B \epsilon M} \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B)$. Nach **43** schließen wir also, daß $y \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, w. z. b. w.

47. *Ist* $\mathfrak{G} \epsilon \mathcal{G}$, $M \epsilon R(\mathfrak{G})$, $x \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ *und* $\varphi \epsilon \mathfrak{G}$, *so ist* $|\varphi, x| \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$.

Beweis. Laut **31** haben wir erstens $|\varphi, x| \epsilon \mathfrak{M}$. Da es ferner eine Menge $A \epsilon M$ gibt, so daß $x \epsilon \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A)$, so erhalten wir nach **41** $|\varphi, x| \epsilon \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(\varphi(A))$, wobei nach **42** $\varphi(A) \epsilon M$. Es gibt also ein $B \epsilon M$, so daß

(1) $$|\varphi, x| \epsilon \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B).$$

Es sei nun ξ eine Ordnungszahl. Laut Voraussetzung gilt

(2) $$\Sigma_\xi(x) \cdot \mathfrak{M} \subset \sum_{B \epsilon M} \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B).$$

Ist $\Sigma_\xi(|\varphi, x|) \cdot \mathfrak{M} = 0$, so haben wir offenbar

(3) $$\Sigma_\xi(|\varphi, x|) \cdot \mathfrak{M} \subset \sum_{B \epsilon M} \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B).$$

Ist $\Sigma_\xi(|\varphi, x|) \cdot \mathfrak{M} \neq 0$, so haben wir vor allem

(4) $$\Sigma_\xi(|\varphi, x|) \cdot \mathfrak{M} \epsilon \mathfrak{M}.$$

Wenn wir nämlich mit ζ eine beliebige Ordnungszahl bezeichnen, die alle $\tau(y)$, wo $y \epsilon \Sigma_\xi(|\varphi, x|) \cdot \mathfrak{M}$, übertrifft[19]), so erhalten wir aus **20**: $0 \neq \Sigma_\xi(x) \cdot \mathfrak{M} \subset K_\zeta$, woraus sich nach **22** die Formel (4) ergibt.

Es sei nun $y \epsilon \Sigma_\xi(|\varphi, x|) \cdot \mathfrak{M}$. Mit Rücksicht auf (4) und **37** erhalten wir $y \epsilon |\varphi, \Sigma_\xi(x) \cdot \mathfrak{M}|$ also nach **33** und **34** $|\varphi^{-1}, y| \epsilon \Sigma_\xi(x) \cdot \mathfrak{M}$. Aus (2) schließen wir ferner, daß es eine Menge $C \epsilon M$ gibt, für welche $|\varphi^{-1}, y| \epsilon \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(C)$, wonach wegen **33** und **41** $y \epsilon \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(\varphi(C))$. Da dabei nach **42** $\varphi(C) \epsilon M$, so folgt $y \epsilon \sum_{B \epsilon M} \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B)$ und da dies für jedes $y \epsilon \Sigma_\xi(|\varphi, x|) \cdot \mathfrak{M}$ zutrifft, so erkennen wir, daß (3) auch in diesem Fall erfüllt ist. Aus (1) und (3) folgt nun nach **43** $|\varphi, x| \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, w. z. b. w.

48. *Ist* $\mathfrak{G} \epsilon \mathcal{G}$, $M \epsilon R(\mathfrak{G})$ und $u, v \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, *so ist* $\{u, v\}$, $\langle u, v \rangle \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$.

Beweis. Ist $u \epsilon K_\xi$ und $v \epsilon K_\eta$ so ist nach **18** $0 \neq \{u, v\} \subset K_\zeta$, wo $\zeta = \max(\xi, \eta)$, also nach **22**

(1) $$\{u, v\} \epsilon \mathfrak{M}.$$

Da $u, v \epsilon \mathfrak{M}$, so ist $0 \neq \{u, v\} \subset \mathfrak{M}$, also nach **32** $|\varphi, \{u, v\}| = \{|\varphi, u|, |\varphi, v|\}$ für $\varphi \epsilon \mathfrak{G}_0$. Nun gibt es nach der Voraussetzung zwei Mengen $A, B \epsilon M$, so daß $|\varphi, u| = u$ für $\varphi \epsilon \mathfrak{G}(A)$ und $|\psi, v| = v$ für $\psi \epsilon \mathfrak{G}(B)$. Setzen wir also $C = A + B$, so haben wir nach **42**

(2) $$C \epsilon M;$$

ist $\varphi \epsilon \mathfrak{G}(C)$, so ist nach **39** $\varphi \epsilon \mathfrak{G}(A) \cdot \mathfrak{G}(B)$, also $|\varphi, u| = u$ und $|\varphi, v| = v$ d. h. $\{|\varphi, u|, |\varphi, v|\} = \{u, v\}$ oder

(3) $$|\varphi, \{u, v\}| = \{u, v\} \qquad \text{für} \quad \varphi \epsilon \mathfrak{G}(C).$$

Es sei jetzt ξ eine Ordnungszahl und $y \epsilon \Sigma_\xi(\{u, v\}) \cdot \mathfrak{M}$. Ist $\xi = 0$, so ist $y = u$ oder $y = v$; es gibt daher eine Menge $B \epsilon M$, so daß

(4) $$|\varphi, y| = y \qquad \text{für} \quad \varphi \epsilon \mathfrak{G}(B).$$

---

[19]) Die Existenz einer solchen Zahl ζ ergibt sich aus folgendem Satz, der in der v. Neumannschen Mengenlehre beweisbar ist: *für jede Menge der Ordnungszahlen gibt es eine Ordnungszahl, die dieser Menge nicht angehört.* Man beachte, daß $\Sigma_\xi(x) \cdot \mathfrak{M}$ eine Menge ist.

Ist $\xi>0$, so haben wir laut **7** $y=u$ oder $y=v$ oder $y\in\Sigma_{\xi-1}(u)\cdot\mathfrak{M}$ oder $y\in\Sigma_{\xi-1}(v)\cdot\mathfrak{M}$. Zwei erste Fälle haben wir oben betrachtet; im dritten und vierten Fall folgt die Existenz einer Menge $B\in M$, für welche (4) erfüllt ist, direkt aus der Voraussetzung $u,v\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Die Formel (4) gilt also ganz allgemein und es folgt daraus nach **40**

(5) $$\Sigma_\xi(\{u,v\})\cdot\mathfrak{M}\subset\sum_{B\in M}\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B).$$

Aus (1), (2), (3) und (5) ergibt sich nach **43** $\{u,v\}\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Durch zweimalige Anwendung dieser Formel erhalten wir $\langle u,v\rangle\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, da $\langle u,v\rangle=\{\{u,v\},\{u,u\}\}$.

49. *Ist $\mathfrak{G}\in\mathcal{G}$ und $M\in R(\mathfrak{G})$, so ist jedes Element von $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ ein ausgezeichneter Bereich.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus **32** und der Definition der ausgezeichneten Bereiche.

50. *Ist $\mathfrak{G}\in\mathcal{G}$ und $M\in R(\mathfrak{G})$, so ist $\Sigma_\xi(\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}})\cdot\mathfrak{M}=\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ für jede Ordnungszahl ξ.*

Beweis. Die Formel ist offenbar richtig für $\xi=0$. Wir setzen ihre Richtigkeit für alle $\eta<\xi$ voraus. Nach **5** haben wir

(1) $$\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}\subset\Sigma_\xi(\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}})\cdot\mathfrak{M}.$$

Ist nun $x\in\Sigma_\xi(\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}})\cdot\mathfrak{M}$, so gilt entweder $x\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ oder, für ein gewisses $\eta<\xi$ und y, $x\in y\in\Sigma_\eta(\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}})$. Es muß dabei nach **27** [b]) und **26** $y\in\mathfrak{M}-K_0$ sein, da sonst nicht $x\in\mathfrak{M}$ gelten könnte. Laut der Induktionsvoraussetzung folgt hieraus $x\in y\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K_0$, wonach wegen **46** $x\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Es ist also $\Sigma_\xi(\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}})\cdot\mathfrak{M}\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, was zusammen mit (1) die gewünschte Gleichheit ergibt.

§ 3. Das Haupttheorem.

Das Haupttheorem lautet:

Ist $\mathfrak{G}\in\mathcal{G}$ und $M\in R(\mathfrak{G})$ und ersetzt man in Axiomen des Systems $\mathfrak{S}$ die Worte „Individuum“, „Klasse“, „ε“, „Λ“ beziehungsweise durch die Worte „$M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnetes Element“, „$M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneter Bereich“, „ϵ“, „Λ_0“, so gehen alle Axiome des Systems $\mathfrak{S}$ in richtige Aussagen über.

Ehe wir an den Beweis dieses Theorems herantreten, müssen wir feststellen, was für einen Sinn die definierten Begriffe des Systems $\mathfrak{S}$ bekommen, wenn wir die Grundbegriffe auf die im Haupttheorem beschriebene Weise interpretieren.

51. *Ist $\mathfrak{G}\in\mathcal{G}$, $M\in R(\mathfrak{G})$ und $x,y\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so gilt $x=y$ dann und nur dann, wenn die Formeln $x\in\mathfrak{A}$ und $y\in\mathfrak{A}$ für jeden $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneten Bereich $\mathfrak{A}$ äquivalent sind.*

Beweis. Ist $x=y$, so sind die Formeln $x\in\mathfrak{A}$ und $y\in\mathfrak{A}$ offenbar für jeden Bereich äquivalent. Es seien nun die Formeln $x\in\mathfrak{A}$, $y\in\mathfrak{A}$ für jeden $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneten Bereich äquivalent. Betrachten wir den Bereich $\mathfrak{A}=\{x\}$, der übrigens auch eine Menge ist. Aus **26**, **48** und **49** folgt, daß $\mathfrak{A}$ ein ausgezeichneter Bereich ist. Nun ist $x\in\mathfrak{A}$, es muß also $y\in\mathfrak{A}$ d. h. $y=x$ sein, w. z. b. w.

Aus **51** geht hervor, daß es die Relation der Identität ist, die in unserem Modell der Relation Id des Systems $\mathfrak{S}$ entspricht.

52. *Es sei $\mathfrak{G}\in\mathcal{G}$, $M\in R(\mathfrak{G})$ und $x\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $x=\Lambda_0$ oder daß es ein $y\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ mit $y\in x$ gibt, besteht darin, daß $x\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus **25**, **26**, **45**, **46**, **17** [a]) und der Formel Λ_0 *non* $\in K$.

Dem Begriff der „Menge“, der in Definition II eingeführt wurde, entspricht somit in unserem Modell der Begriff: „Element von $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$“ [20]).

53. *Ist $\mathfrak{G}\in\mathcal{G}$, $M\in R(\mathfrak{G})$ und $u,v\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so ist $\{u,v\}$ das einzige Element x von $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$, das folgender Bedingung genügt:*

(*) *für ein beliebiges $t\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ gilt $t\in x$ dann und nur dann, wenn $t=u$ oder $t=v$ ist.*

Beweis. Aus **48** schließen wir, daß $\{u,v\}$ dem Bereich $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ angehört. Ferner ist nach **26** $\{u,v\}$ *non* $\in K$, da z. B. $u\in\{u,v\}\cdot\mathfrak{M}$. Da schließlich ein beliebiges t dann und nur dann zu $\{u,v\}$ gehört, wenn $t=u$ oder $t=v$, so folgern wir, daß das Paar $x=\{u,v\}$ die Bedingung (*) erfüllt und dem Bereiche $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ angehört. Sei nun

---

[20]) Aus **52** und **45** könnte man leicht schließen, daß in unserem Modell der Mengenlehre gewisse Sätze erfüllt sind, die weder in $\mathfrak{S}$ noch im v. Neumannschen System beweisbar sind. Zu solchen Sätzen gehört z.B. die Aussage: *„es gibt unendlich viele Urelemente (d.h. Individuen, die keine Mengen sind)“*. Es folgt daraus u.a., daß die Hinzufügung dieser Aussage zum Axiomensystem $\mathfrak{S}$ zu keinem Widerspruch führen kann, falls die v. Neumannsche Mengenlehre widerspruchsfrei ist. Der Grundgedanke dieses Beweises, der auf der geeigneten Wahl der Mengen Λ_n (vgl. **15**) beruht, rührt von Herrn A. Lindenbaum her und wurde zum ersten Male zum Beweis der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms in der in Fußnote [13]) zitierten Arbeit verwendet.

(1) $$y \in \mathfrak{M}_{M,\mathfrak{G}} - K$$

ein Element, das die Bedingung (*) erfüllt. Es ist also

(2) $$u, v \in y,$$

wonach sich wegen **26** und (1) die Formel $y \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K_0$ ergibt. Aus **46** folgt nun, daß jedes $t \in y$ dem Bereich $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ angehört, woraus wegen (*): $y \subset \{u,v\}$. Mit Rücksicht auf (2) erhalten wir also $y = \{u,v\}$, w. z. b. w.

54. *Ist $\mathfrak{G} \in \mathcal{G}$, $M \in R(\mathfrak{G})$ und $u, v \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so ist $\langle u,v \rangle = \{\{u,v\},\{u\}\}$ das einzige Element x von $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K$, das folgender Bedingung genügt:*

für ein beliebiges $t \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ gilt $t \in x$ dann und nur dann, wenn $t = \{u,v\}$ oder $t = \{u\}$.

Zum Beweis setzt man in **53** $\{u,v\}$ für u und $\{u\}$ für v ein und wendet **48** an.

Wie aus **51**, **53** und **54** erhellt, entsprechen den Begriffen (u,v) bzw. $[u,v]$, die in Definitionen III und IV des Systems $\mathfrak{S}$ eingeführt wurden, in unserem Modell die Begriffe des ungeordneten bzw. des geordneten Paares.

Wir gehen jetzt zum Beweis des Haupttheorems für die einzelnen Axiome des Systems $\mathfrak{S}$ über.

55. *Ist $\mathfrak{G} \in \mathcal{G}$ und $M \in R(\mathfrak{G})$, so ist $\Lambda_0 \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$.*

Satz **55**, der sofort aus **45** und **17** [a]) folgt, stellt die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 1 dar.

56. *Es sei $\mathfrak{G} \in \mathcal{G}$, $M \in R(\mathfrak{G})$ und $x, y \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K$; sind die Formeln $z \in x$ und $z \in y$ für jedes $z \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ äquivalent, so gilt $x = y$.*

Beweis. Es sind vier Fälle möglich:

(1) $x, y \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K_0$, (2) $x = \Lambda_0 = y$,
(3) $x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K_0$ *und* $y = \Lambda_0$, (4) $x = \Lambda_0$ *und* $y \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K_0$.

Im ersten Fall ist nach **46** $x, y \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Aus der Voraussetzung ergibt sich also, daß x und y alle Elemente gemeinsam haben; somit ist $x = y$. Im zweiten Fall ist nichts zu beweisen. Der Fall (3) ist unmöglich, denn x enthält nach **46** und **25** ein $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnetes Element und y nach **26** keines. Ebenso kann (4) nicht gelten, w. z. b. w.

Mit Rücksicht auf **51** stellt **56** die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 2 dar.

57. *Ist $\mathfrak{G} \in \mathcal{G}$, $M \in R(\mathfrak{G})$, $x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K$, $y \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und y non $\in x$, so gibt es ein $z \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K$, das folgender Bedingung genügt:*

(*) *für ein beliebiges $t \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ gilt $t \in z$ dann und nur dann, wenn $t \in x$ oder $t = y$.*

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) $x = \Lambda_0$, (2) $x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K_0$.

Im Falle (1) setzen wir $z = \{y\}$ und haben laut **48** $z \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$; dabei ist $y \in z \cdot \mathfrak{M}$, was nach **26** beweist, daß

(3) $$z \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K_0.$$

Ist $t \in z$, so haben wir $t = y$. Ist nun t ein Element von $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und gilt entweder $t \in \Lambda_0$ oder $t = y$, so kann die erste Bedingung wegen **26** ausgelassen werden, und es bleibt $t = y$, d. h. $t \in z$. z erfüllt also die Bedingung (*), was nach (3) die Richtigkeit von **57** im Fall (1) beweist.

Im Fall (2) setzen wir $z = x + \{y\}$. Da $x \in \mathfrak{M} - K_0$ und $y \in \mathfrak{M}$, so ist nach **21** und **22**

(4) $$x + \{y\} \in \mathfrak{M}.$$

Aus $y \in (x + \{y\}) \cdot \mathfrak{M}$ folgt nach **26**

(5) $$x + \{y\} \text{ non } \in K_0.$$

Aus der Voraussetzung ergibt sich ferner die Existenz der Mengen $A, B \in M$, so daß

(6) $$|\varphi, x| = x \quad \text{und} \quad |\psi, y| = y \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathfrak{G}(A) \quad \text{und} \quad \psi \in \mathfrak{G}(B).$$

Wir setzen $C = A + B$ und haben nach **39** und **42**

(7) $$C \in M \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}(C) \subset \mathfrak{G}(A) \cdot \mathfrak{G}(B).$$

Nun ist $0 \neq z \subset \mathfrak{M}$, da nach **46** $x \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{M}$ und $y \in \mathfrak{M}$ gilt. Mit Rücksicht auf **32** schließen wir also, daß

(8) $$|\varphi, z| = \underset{|\varphi,t|}{E}[t \in z] = \underset{|\varphi,t|}{E}[t \in x] + \{|\varphi, y|\} = |\varphi, x| + \{|\varphi, y|\}$$

für $\varphi \in \mathfrak{G}_0$. Aus (6), (7) und (8) folgt $|\varphi, z| = z$ für $\varphi \in \mathfrak{G}(C)$, wonach

(9) $$|\varphi, z| \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(C).$$

Es sei jetzt ξ eine Ordnungszahl. Nach **7** und **9** gilt

$$\Sigma_\xi(z) \cdot \mathfrak{M} = \Sigma_\xi(x) \cdot \mathfrak{M} + \Sigma_{\xi-1}(y) \cdot \mathfrak{M}.$$

Nun sind laut der Voraussetzung $\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}$ und $\Sigma_{\xi-1}(y)\cdot\mathfrak{M}$ beide in $\sum_{B\epsilon M}\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B)$ enthalten. Es ist also

(10) $$\Sigma_\xi(z)\cdot\mathfrak{M}\subset\sum_{B\epsilon M}\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B).$$

Aus (4), (5), (9) und (10) folgt nach **43** $z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K_0$. Da für jedes beliebige t die Formel $t\epsilon z$ dann und nur dann gilt, wenn $t\epsilon x$ oder $t=y$, so erfüllt z die Bedingung (*). **57** ist also richtig auch im Fall (2).

Aus **57**, **51** und **52** folgt die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 3.

58. *Ist* $\mathfrak{G}\epsilon\mathcal{G}$, $M\epsilon R(\mathfrak{G})$ *und* $x\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$, *so gibt es ein* $y\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ *derart, daß ein* $t\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ *dann und nur dann zu* y *gehört, wenn es ein* $z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ *gibt, für welches* $t\epsilon z\epsilon y$.

Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle:

(1) $x=\Lambda_0$; (2) $x\subset K_0$; (3) $x\neq\Lambda_0$ und $x\,non\subset K_0$.

In den beiden ersten Fällen setzen wir $y=\Lambda_0$ und haben dann nach **45** und **17** [a]) $y\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$. Da nach **26** sowohl die Formel $t\epsilon y$ als auch die Formel $t\epsilon z\epsilon y\cdot\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ für kein $t\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ wahr ist, so sind diese Formeln für jedes $t\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ äquivalent. Die Behauptung von **58** ist also in diesen beiden Fällen richtig.

Im Fall (3) setzen wir $y=\sum_{z\epsilon x-K_0}z$. Da $x\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K_0$, so gehört nach **46** jedes $z\epsilon x$ dem Bereich $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ an. Ist also $t\epsilon y$, so gibt es ein $z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so daß $t\epsilon z\epsilon x$. Es sei nun umgekehrt t ein Element von $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ derart, daß $t\epsilon z\epsilon x$ für ein gewisses $z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ gilt. Nach **26** ist $z\,non\,\epsilon\,K_0$, also $t\epsilon z\epsilon x-K_0$ d. h. $t\epsilon y$. Somit ist die Bedingung $t\epsilon y$ für jedes $t\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ mit der Existenz eines z äquivalent, für welches $t\epsilon z\epsilon x$. Um **58** zu beweisen, genügt es also zu zeigen, daß $y\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$. Dies geschieht folgendermaßen: da $\tau(x)>0$, so gibt es nach (3) und **21** ein $z\epsilon x\cdot\mathfrak{M}$. Nach **25** ist $z\neq0$ also

(4) $$y\neq0.$$

Aus $x\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K_0$ folgt nach **46** $x\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, also $x-K_0\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K_0$, und wir schließen durch nochmalige Anwendung von **46**, daß

(5) $$y\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}\subset\mathfrak{M}.$$

Bezeichnen wir mit ζ eine beliebige Ordnungszahl, die alle $\tau(z)$ mit $z\epsilon y$ übertrifft, so wird nach **18**, **21** und (4) $0\neq y\subset K_\zeta$ und folglich nach **22**

(6) $$y\,\epsilon\,\mathfrak{M}.$$

Aus (4) und (5) erhalten wir $y\cdot\mathfrak{M}\neq0$, was nach **26** beweist, daß

(7) $$y\,non\,\epsilon\,K_0.$$

Da $x\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so gibt es eine Menge A derart, daß $|\varphi,x|=x$ für alle $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}(A)$ gilt. Da, wie leicht festzustellen, $|\varphi,K_0|=K_0$ für jede Funktion $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$ gilt, schließen wir hieraus mit Hilfe von **32**, daß

(8) $$|\varphi,x-K_0|=x-K_0 \quad \text{für} \quad \varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}(A).$$

Es sei nun $\varphi\epsilon\mathfrak{G}(A)$ und $t\epsilon y$. Es gibt daher ein z, so daß $t\epsilon z\epsilon x-K_0$; wenden wir **34** und (8) an, so erhalten wir $|\varphi,t|\,\epsilon\,|\varphi,z|\,\epsilon\,x-K_0$, also $|\varphi,t|\,\epsilon\,y$. Ist umgekehrt $|\varphi,t|\,\epsilon\,y$, so gilt für ein gewisses z: $|\varphi,t|\,\epsilon\,z\,\epsilon\,x-K_0$, woraus wir nach **33**, **34** und (8) schließen, daß $t\,\epsilon\,|\varphi^{-1},z|\,\epsilon\,x-K_0$, also $t\epsilon y$. Die Formeln $t\epsilon y$ und $|\varphi,t|\,\epsilon\,y$ sind also äquivalent, was nach **32** beweist, daß $|\varphi,y|=y$ für $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}(A)$, oder

(9) $$y\,\epsilon\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A).$$

Es sei nun ξ eine Ordnungszahl. Aus **11** und **10** folgt $\Sigma_\xi(y)\cdot\mathfrak{M}\subset\Sigma_{\xi+1}(x-K_0)\cdot\mathfrak{M}\subset\Sigma_{\xi+1}(x)\cdot\mathfrak{M}$. Da laut unserer Voraussetzung $\Sigma_{\xi+1}(x)\cdot\mathfrak{M}\subset\sum_{B\epsilon M}\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B)$ ist, so erhalten wir

(10) $$\Sigma_\xi(y)\cdot\mathfrak{M}\subset\sum_{B\epsilon M}\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B).$$

Aus (6), (7), (9) und (10) folgt $y\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K_0$, w. z. b. w.

Satz **58** stellt mit Rücksicht auf **52** die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 4 dar.

59. *Ist* $\mathfrak{G}\epsilon\mathcal{G}$, $M\epsilon R(\mathfrak{G})$ *und* $x\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$, *so gibt es ein* $y\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ *derart, daß folgende Bedingung erfüllt ist:*

(*) *ein beliebiges* $z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ *gehört der Menge* y *dann und nur dann an, wenn* $z\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ *und die Formel* $t\epsilon z$ *für jedes* $t\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ *die Formel* $t\epsilon x$ *zur Folge hat.*

Beweis. Wir setzen

(1) $$y=\mathfrak{P}(x)\cdot\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}+\{\Lambda_0\}.$$

Wir wollen zuerst zeigen, daß (*) erfüllt ist. Es sei also $z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und $z\epsilon y$. Nach (1) ist dies mit der Disjunktion: entweder $z=\Lambda_0$ oder $0\neq z\subset x$ und $z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ äquivalent. Im ersten Fall gilt nach **45** $z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ und nach **26** $z\cdot\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}=0\subset x$. Die Formeln $t\epsilon z$ und $t\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ ziehen somit die Formel $t\epsilon x$ nach sich. Im zweiten Fall schließen wir wie folgt: ist $\tau(x)>0$, so gilt nach **21** $0\neq z\subset x\subset\mathfrak{M}$ und folglich ist $z\cdot\mathfrak{M}=z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}\subset\mathfrak{M}$, woraus nach **26** folgt, daß z nicht zu K_0 gehören kann. Wir haben also $z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ und $\tau(z)>0$. Danach ist wegen **46** $z\cdot\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}=z\subset x$ und die Formeln $t\,\epsilon\,z$ und $t\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ ziehen $t\,\epsilon\,x$ nach sich. Ist nun $\tau(x)=0$, so muß $x=\Lambda_0$ sein, da $x\,\mathrm{non}\,\epsilon\,K$. Wir wollen folgendes zeigen:

(2) *ist* $0\neq z\subset\Lambda_0$ *und* $z\,\epsilon\,\mathfrak{M}$, *so ist* $z=\Lambda_0$.

Wäre nämlich $z\,\epsilon\,\mathfrak{M}-\{\Lambda_0\}$, so würde, wie aus **15**, **16** und **17** [a]) ersichtlich, $\tau(z)>0$, also nach **21** $z\subset\mathfrak{M}$ sein, was mit Rücksicht auf **26** offenbar unmöglich ist. Aus (2) folgt, daß, wenn $\tau(x)=0$ ist, $z=\Lambda_0$ sein muß, wodurch dieser Fall auf einen vorher betrachteten zurückgeführt ist.

Nehmen wir jetzt an, z gehöre dem Bereich $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ an und erfülle die Bedingung: aus $t\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und $t\,\epsilon\,z$ folgt $t\,\epsilon\,x$. Wir haben also $z\cdot\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}\subset x$. Ist $z\neq\Lambda_0$, so ist $z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K_0$, also nach **46** und **25** $0\neq z=z\cdot\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}\subset x$, d. h. $z\,\epsilon\,\mathfrak{P}(x)\cdot\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Damit ist das Bestehen von (*) bewiesen.

Es bleibt also noch, zu zeigen, daß $y\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$; dies zeigen wir wie folgt: ist $x=\Lambda_0$, so ist nach (1) und (2) $y=\{\Lambda_0\}$, also nach **45**, **48** und **26**

$$\{\Lambda_0\}=y\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K. \tag{3}$$

Wir können also voraussetzen, daß $x\neq\Lambda_0$ d. h. $\tau(x)>0$ ist. Nach **23** haben wir $\mathfrak{P}(x)\,\epsilon\,\mathfrak{M}$, wobei nach **26** $\xi=\tau(\mathfrak{P}(x))>0$. Aus **21** und **18** folgt also, daß jedes Element von y der Menge K_ξ angehört; nach **22** ist also

$$y\,\epsilon\,\mathfrak{M}. \tag{4}$$

Da $\Lambda_0\,\epsilon\,y$, so haben wir laut **26**

$$y\ \mathrm{non}\,\epsilon\,K_0. \tag{5}$$

Aus $x\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ folgt die Existenz einer Menge $A\,\epsilon\,M$ derart, daß $|\varphi,x|=x$ für $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}(A)$. Ist nun $z\,\epsilon\,y$ so ist entweder $z=\Lambda_0$ also nach **30** [a]) $|\varphi,z|=z$ für alle $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$ oder $0\neq z\subset x$, $z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und $z\neq\Lambda_0$. In diesem zweiten Fall erhalten wir auf Grund von **32**, **47** und (*) $0\neq|\varphi,z|\subset x$ und $|\varphi,z|\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ für $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}(A)$ d. h. $|\varphi,z|\,\epsilon\,y$. Ganz ähnlich zeigt man mit Hilfe von **33**, daß umgekehrt aus $|\varphi,z|\,\epsilon\,y$ immer $z\,\epsilon\,y$ für $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}(A)$ folgt. Auf Grund von **32**, (4), (5) und **21** beweist dies, daß $|\varphi,y|=y$ für $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}(A)$, also nach **40**

$$y\,\epsilon\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A). \tag{6}$$

Es sei nun ξ eine Ordnungszahl und $z\,\epsilon\,\Sigma_\xi(y)\cdot\mathfrak{M}-y$. Da, wie leicht festzustellen, $\Sigma_\xi(\{\Lambda_0\})\cdot\mathfrak{M}=\{\Lambda_0\}$ ist, erhalten wir auf Grund von (1), **9**, **12**, und der Formel $x\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$:

$$z\,\epsilon\,\mathfrak{M}\cdot\Big(\Sigma_\xi\big(\mathfrak{P}(x)\cdot\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}\big)-\mathfrak{P}(x)\cdot\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}\Big)\subset\Sigma_\xi(x)\subset\sum_{B\epsilon M}\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B).$$

Daher ist

$$\Sigma_\xi(y)\cdot\mathfrak{M}-y\subset\sum_{B\epsilon M}\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B). \tag{7}$$

Ist $z\,\epsilon\,y$, so gilt nach (1), (3) und **44** $z\,\epsilon\sum_{B\epsilon M}\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B)$, was nach (7) $\Sigma_\xi(y)\cdot\mathfrak{M}\subset\sum_{B\epsilon M}\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B)$ ergibt. Hieraus wegen (4), (5) und (6) folgt nun $y\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$, w. z. b. w.

Aus **59** und **52** ergibt sich die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 5.

60. *Ist* $\mathfrak{G}\,\epsilon\,\mathcal{G}$ *und* $M\,\epsilon\,R(\mathfrak{G})$, *so gibt es ein* $x\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ *derart, daß* $\Lambda_0\,\epsilon\,x$ *und die Formel* $y\,\epsilon\,x$ *für jedes* $y\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ *die Formel* $\{y\}\,\epsilon\,x$ *zur Folge hat.*

Beweis. Wir setzen $x_0=\Lambda_0$, $x_{n+1}=\{x_n\}$ und bezeichnen mit x die Menge aller x_n. Es ist evident, daß $\Lambda_0\,\epsilon\,x$ und die Formel $y\,\epsilon\,x$ immer $\{y\}\,\epsilon\,x$ zur Folge hat. Auf Grund von **22** beweist man durch Induktion, daß $x_n\,\epsilon\,K_n$ für $n=0,1,2,\ldots$, woraus sich nach **18** und **21** $x\subset K_\omega$, $x\,\epsilon\,K_{\omega+1}$ und folglich

$$x\,\epsilon\,\mathfrak{M} \tag{1}$$

ergibt. Nach **26** ist ferner

$$x\ \mathrm{non}\,\epsilon\,K_0. \tag{2}$$

Aus **30** [a]) erhalten wir $|\varphi,\Lambda_0|=\Lambda_0$ für $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$, woraus es leicht ist, durch eine einfache Induktion zu schließen, daß $|\varphi,x_n|=x_n$ für $n=0,1,2,\ldots$ Nach **32** erhalten wir daraus für eine beliebige Menge $A\,\epsilon\,M$

$$x\,\epsilon\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A). \tag{3}$$

Auf Grund von **26** sieht man leicht ein, daß $\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}=x$ für alle ξ ist. Da jedes Element x_n von x die Bedingung $|\varphi,x_n|=x_n$ für $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0$ erfüllt, schließen wir daraus, daß $\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}\subset\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A)$ für eine beliebige Menge $A\,\epsilon\,M$. Wir haben somit

$$\Sigma_\xi(x)\cdot\mathfrak{M}\subset\sum_{B\epsilon M}\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(B). \tag{4}$$

Aus (1)-(4) folgt $x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K$, w. z. b. w.

Aus **60** ergibt sich mit Rücksicht auf **53** und **52** die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 6.

61. *Ist* $\mathfrak{G} \in \mathcal{G}$ *und* $M \in R(\mathfrak{G})$, *so ist* $\Lambda_0 \cdot \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} = 0$.

Dieser Satz, der sich direkt aus **26** ergibt, stellt die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 7 dar.

62. *Ist* $\mathfrak{G} \in \mathcal{G}$ *und* $M \in R(\mathfrak{G})$, *ist ferner* $\mathfrak{A}$ *ein* $M, \mathfrak{G}$*-ausgezeichneter Bereich und gibt es ein* $x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, *das dem Bereich* $\mathfrak{A}$ *angehört, so gibt es ein* $y \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ *derart, daß* $y \in \mathfrak{A}$ *und die Formeln* $t \in \mathfrak{A}$ *und* $t \in y$ *für kein* $t \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ *gleichzeitig erfüllt sind.*

Beweis. Da $\mathfrak{A} \neq \Lambda_0$, so ist $0 \neq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{M}$. Es gibt daher Zahlen ξ, für die $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} \cdot K_\xi \neq 0$. Die kleinste von diesen Zahlen bezeichnen wir mit ξ_0. Ist nun y irgendein Element von $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} \cdot K_{\xi_0}$, so ist zuerst $y \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Ist $\xi_0 = 0$, so haben wir nach **26** $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} \cdot \mathfrak{A} \cdot y = 0$; ist $\xi_0 > 0$, so ist offenbar $\tau(y) = \xi_0$ und folglich nach **21** $\tau(z) < \xi_0$ für $z \in y$. Kein Element von y kann also dem Bereich $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ angehören, d. h. es ist auch in diesem Fall $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} \cdot y = 0$, w. z. b. w.

62 stellt die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 8 dar.

63. *Ist* $\mathfrak{G} \in \mathcal{G}$, $M \in R(\mathfrak{G})$, *und* $x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ *so ist* $\mathfrak{A} = \{x\}$ *ein* $M, \mathfrak{G}$*-ausgezeichneter Bereich, der folgender Bedingung genügt:*

(*) *für jedes* $t \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ *gilt* $t \in \mathfrak{A}$ *dann und nur dann, wenn* $t = x$.

Beweis. Nach **48** und **26** ist $\{x\} \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K_0$, woraus nach **49** folgt, daß $\mathfrak{A}$ ein $M, \mathfrak{G}$-ausgezeichneter Bereich ist. Daß die Bedingung (*) erfüllt ist, ist evident.

Aus **63**, **51** und **52** ergibt sich die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 9.

64. *Ist* $\mathfrak{G} \in \mathcal{G}$ *und* $M \in R(\mathfrak{G})$, *ist ferner* $\mathfrak{A}$ *ein* $M, \mathfrak{G}$*-ausgezeichneter Bereich, so gibt es einen* $M, \mathfrak{G}$*-ausgezeichneten Bereich* $\mathfrak{B}$ *derart, daß die Bedingungen* $t \in \mathfrak{B}$ *und* $t \operatorname{non} \in \mathfrak{A}$ *für jedes* $t \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ *äquivalent sind.*

Beweis. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so setzen wir $\mathfrak{B} = \Lambda_0$ und schließen leicht aus **26**, daß $\mathfrak{B}$ alle in **64** behaupteten Eigenschaften hat. Ist $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so setzen wir $\mathfrak{B} = \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - \mathfrak{A}$. Es gilt dann $0 \neq \mathfrak{B} \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und die Bedingungen $t \in \mathfrak{B}$ und $t \operatorname{non} \in \mathfrak{A}$ sind offenbar für jedes $t \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ äquivalent. Nun gibt es eine Menge $A \in M$ derart, daß die Formeln $x \in \mathfrak{A}$ und $|\varphi, x| \in \mathfrak{A}$ für jedes $x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und jedes $\varphi \in \mathfrak{G}(A)$ äquivalent

sind. Wir folgern daraus ohne weiteres, daß die Bedingungen $x \in \mathfrak{B}$ und $|\varphi, x| \in \mathfrak{B}$ für jedes $x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und jedes $\varphi \in \mathfrak{G}(A)$ äquivalent sind. Der Bereich $\mathfrak{B}$ ist also $M, \mathfrak{G}$-ausgezeichnet, w. z. b. w.

64 stellt die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 10 dar.

65. *Ist* $\mathfrak{G} \in \mathcal{G}$, $M \in R(\mathfrak{G})$ *und sind* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *zwei* $M, \mathfrak{G}$*-ausgezeichnete Bereiche derart, daß* $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} \neq 0$, *so ist* $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ *ein* $M, \mathfrak{G}$*-ausgezeichneter Bereich.*

Beweis. Nach **26** haben wir $\mathfrak{A} \neq \Lambda_0 \neq \mathfrak{B}$, also nach **43** $0 \neq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und $0 \neq \mathfrak{B} \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, woraus

(1) $$0 \neq \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}.$$

Nach der Voraussetzung gibt es Mengen $A, B \in M$ derart, daß für ein beliebiges $x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ die Bedingungen

(2) $$x \in \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad |\varphi, x| \in \mathfrak{A} \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathfrak{G}(A)$$

bzw. die Bedingungen

(3) $$x \in \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad |\varphi, x| \in \mathfrak{B} \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathfrak{G}(B)$$

äquivalent sind. Wir setzen $C = A + B$ und haben nach **42** $C \in M$. Aus (2), (3) und der Inklusion $\mathfrak{G}(C) \subset \mathfrak{G}(A) \cdot \mathfrak{G}(B)$ folgt, daß die Bedingungen $x \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ und $|\varphi, x| \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ für jedes $x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und jedes $\varphi \in \mathfrak{G}(C)$ äquivalent sind. Mit Rücksicht auf (1) schließen wir daraus, daß $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ ein $M, \mathfrak{G}$-ausgezeichneter Bereich ist, w. z. b. w.

66. *Ist* $\mathfrak{G} \in \mathcal{G}$, $M \in R(\mathfrak{G})$ *und* $x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K_0$, *ist ferner* $\mathfrak{A}$ *ein* $M, \mathfrak{G}$*-ausgezeichneter Bereich derart, daß* $\mathfrak{A} \cdot x \neq 0$, *so ist* $\mathfrak{A} \cdot x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K$.

Beweis. Nach **46** haben wir $x \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Ferner ist $0 \neq x \cdot \mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ und nach **22**, da $x \cdot \mathfrak{A}$ eine Menge ist, $x \cdot \mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$. Aus der Voraussetzung $\mathfrak{A} \cdot x \neq 0$ ergibt sich noch nach **26** $x \cdot \mathfrak{A} \operatorname{non} \in K_0$. Fassen wir nun x als einen Bereich auf, so schließen wir aus **65** auf die Existenz einer Menge $A \in M$ derart, daß die Bedingungen $t \in \mathfrak{A} \cdot x$ und $|\varphi, t| \in \mathfrak{A} \cdot x$ für alle $t \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und $\varphi \in \mathfrak{G}(A)$ äquivalent sind. Nach **32** erhalten wir hieraus $|\varphi, \mathfrak{A} \cdot x| = \mathfrak{A} \cdot x$ für $\varphi \in \mathfrak{G}(A)$, d. h.

(1) $$\mathfrak{A} \cdot x \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A).$$

Ist nun ξ eine Ordnungszahl, so gilt laut der Voraussetzung und **10**

(2) $$\Sigma_\xi(\mathfrak{A} \cdot x) \cdot \mathfrak{M} \subset \Sigma_\xi(x) \cdot \mathfrak{M} \subset \sum_{A \in M} \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}(A).$$

Aus (1) und (2) folgt $\mathfrak{A} \cdot x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, es ist also $\mathfrak{A} \cdot x \in \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}} - K$, w. z. b. w.

67. *Ist $\mathfrak{G}\in\mathcal{G}$ und $M\in R(\mathfrak{G})$, sind ferner $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnete Bereiche, so gibt es einen $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneten Bereich $\mathfrak{C}$ derart, daß für ein beliebiges $t\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ die Formel $t\in\mathfrak{C}$ dann und nur dann gilt, wenn $t\in\mathfrak{A}$ und $t\in\mathfrak{B}$.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{C}=\Lambda_0$ falls $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=0$ und $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ falls $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\neq0$. Nach **65** ist $\mathfrak{C}$ in beiden Fällen $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnet, und man folgert leicht aus **26**, daß dieser Bereich allen Bedingungen von **67** entspricht.

67 stellt die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 11 dar.

68. *Es sei $\mathfrak{G}\in\mathcal{G}$ und $M\in R(\mathfrak{G})$. Es gibt einen $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneten Bereich $\mathfrak{A}$ mit folgender Eigenschaft:*

(*) *für ein beliebiges $t\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ gilt $t\in\mathfrak{A}$ dann und nur dann, wenn $t\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K_0$ und aus $x\varepsilon t$ und $y\varepsilon t$ für beliebige $x,y\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ immer $x=y$ folgt.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$ den Bereich der Mengen $\{x\}$, wo $x\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Aus **46** schließen wir leicht, daß $\mathfrak{A}$ der Bedingung (*) genügt. Um zu beweisen, daß $\mathfrak{A}$ ein $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneter Bereich ist, bezeichnen wir mit A eine beliebige Menge, die dem Ring M angehört. Für $\varphi\in\mathfrak{G}(A)$ und $x\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ haben wir nach **32** und **47** $|\varphi,\{x\}|=\{|\varphi,x|\}$ und $|\varphi,x|\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Wenn also $y\in\mathfrak{A}$ und $\varphi\in\mathfrak{G}(A)$, so gehört auch $|\varphi,y|$ dem Bereich $\mathfrak{A}$ an. Setzen wir hier $|\varphi,y|$ für y und φ^{-1} für φ ein, so schließen wir mit Rücksicht auf **33**, daß aus $|\varphi,y|\in\mathfrak{A}$ die Formel $y\in\mathfrak{A}$ folgt. Die Formeln: $y\in\mathfrak{A}$ und $|\varphi,y|\in\mathfrak{A}$ sind somit für $y\in\mathfrak{A}$ und $\varphi\in\mathfrak{G}(A)$ äquivalent. Da laut **45** und **48** $0\neq\mathfrak{A}\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ ist, schließen wir daraus, daß $\mathfrak{A}$ ein $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneter Bereich ist.

Aus **68**, **51** und **52** ergibt sich die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 12.

69. *Ist $\mathfrak{G}\in\mathcal{G}$ und $M\in R(\mathfrak{G})$, so gibt es einen $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneten Bereich $\mathfrak{A}$, der folgender Bedingung genügt:*

(*) *ist $t\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so gilt $t\in\mathfrak{A}$ dann und nur dann, wenn es Elemente $u,v\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ gibt, so daß $u\varepsilon v$ und $t=\langle u,v\rangle$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$ den Bereich aller Paare $\langle u,v\rangle$, wo $u,v\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und $u\varepsilon v$. Es ist klar, daß die Bedingung (*) erfüllt ist. Es sei nun A eine beliebige Menge aus M, $\varphi\in\mathfrak{G}(A)$, $t\in\mathfrak{A}$. Für gewisse $u,v\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ haben wir $t=\langle u,v\rangle$ und $u\varepsilon v$. Mit Rücksicht auf **32**, **34** und **47** erhalten wir $|\varphi,t|=\langle|\varphi,u|,|\varphi,v|\rangle$, $|\varphi,u|\varepsilon|\varphi,v|$ und $|\varphi,u|,|\varphi,v|\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, was beweist, daß $|\varphi,t|\in\mathfrak{A}$. Ist umgekehrt $|\varphi,t|\in\mathfrak{A}$, so haben wir für gewisse $u,v\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$: $|\varphi,t|=\langle u,v\rangle$ und $u\varepsilon v$.

Nach **32**, **33**, **34** und **47** schließen wir hieraus: $t=\langle|\varphi^{-1},u|,|\varphi^{-1},v|\rangle$, $|\varphi^{-1},u|\varepsilon|\varphi^{-1},v|$ und $|\varphi^{-1},u|$, $|\varphi^{-1},v|\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, wonach $t\in\mathfrak{A}$. Die Formeln $t\in\mathfrak{A}$ und $|\varphi,t|\in\mathfrak{A}$ sind also für $\varphi\in\mathfrak{G}(A)$ und $t\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ äquivalent. Dabei ist nach **45** und **48** $0\neq\mathfrak{A}\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Der Bereich $\mathfrak{A}$ ist also $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnet, w. z. b. w.

Aus **69**, **51** und **54** folgt die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 13.

70. *Ist $\mathfrak{G}\in\mathcal{G}$ und $M\in R(\mathfrak{G})$, so gibt es für jeden $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneten Bereich $\mathfrak{A}$ einen $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneten Bereich $\mathfrak{B}$ mit der Eigenschaft:*

(*) *ist $t\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so gilt $t\in\mathfrak{B}$ dann und nur dann, wenn es Elemente $u,v\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ gibt derart, daß $u\in\mathfrak{A}$ und $t=\langle u,v\rangle$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{A}=\Lambda_0$, so setzen wir $\mathfrak{B}=\Lambda_0$ und schließen leicht aus **26**, daß der $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnete Bereich $\mathfrak{B}$ die Bedingung (*) erfüllt. Ist nun $\mathfrak{A}\neq\Lambda_0$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}$ den Bereich der Paare $\langle u,v\rangle$ wo $u\in\mathfrak{A}$ und $v\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Nach **43** und **48** gilt

$$\mathfrak{B}\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}. \tag{1}$$

Da weder $\mathfrak{A}$ noch $\mathfrak{B}$ leer ist, gilt ferner

$$0\neq\mathfrak{B}. \tag{2}$$

Nach Voraussetzung gibt es eine Menge $A\in M$ derart, daß die Bedingungen $u\in\mathfrak{A}$ und $|\varphi,u|\in\mathfrak{A}$ für jedes $u\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und jedes $\varphi\in\mathfrak{G}(A)$ äquivalent sind. Es sei nun $\varphi\in\mathfrak{G}(A)$ und $t\in\mathfrak{B}$; für gewisse $u\in\mathfrak{A}$ und $v\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ haben wir dann $t=\langle u,v\rangle$, wonach wegen **32** und **47** $|\varphi,t|=\langle|\varphi,u|,|\varphi,v|\rangle$ und $|\varphi,v|\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Da $|\varphi,u|\in\mathfrak{A}$, so folgt daraus $|\varphi,t|\in\mathfrak{B}$. Ganz ähnlich wird mit Rücksicht auf **32**, **34** und **47** gezeigt, daß aus $|\varphi,t|\in\mathfrak{B}$, die Formel $t\in\mathfrak{B}$ folgt. Diese Formeln sind somit äquivalent, was nach (1) und (2) beweist, daß $\mathfrak{B}$ ein $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneter Bereich ist. Da er offenbar die Bedingung (*) erfüllt, so folgt daraus die Richtigkeit von **70**.

Aus **70**, **51** und **54** folgt die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 14.

71. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Bereich; enthält $\mathfrak{A}$ kein geordnetes Paar, so setzen wir $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})=\Lambda_0$; andernfalls bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ den Bereich derjenigen x, für die es ein y gibt, so daß $\langle x,y\rangle\in\mathfrak{A}$.

72. *Ist $\mathfrak{G}\in\mathcal{G}$, $M\in R(\mathfrak{G})$ und ist $\mathfrak{A}$ ein $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneter Bereich, so ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ ein $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneter Bereich, und es gilt:*

(*) *ein $t\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{D}(A)$, wenn es ein $u\in\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ mit $\langle t,u\rangle\in\mathfrak{A}$ gibt.*

Beweis. Enthält $\mathfrak{A}$ kein geordnetes Paar, so gilt nach **26** und **71** weder $\langle t,u\rangle\epsilon\mathfrak{A}$ noch $t\epsilon\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ für $u,t\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Die Bedingung (*) ist also erfüllt und $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ ist nach **71** und **43** ein $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneter Bereich.

Wir setzen nun voraus, daß $\mathfrak{A}$ ein geordnetes Paar enthält. Es ist also $\mathfrak{A}\neq\Lambda_0$ d.h. nach **43**

(1) $$0\neq\mathfrak{A}\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}.$$

Ist $t\epsilon\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ und $t\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so gibt es nach **71** ein u, so daß $\langle t,u\rangle\epsilon\mathfrak{A}$. Mit Rücksicht auf (1) erhalten wir hieraus durch zweimalige Anwendung von **46** und **26** $u\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Ist umgekehrt $\langle t,u\rangle\epsilon\mathfrak{A}$, wo $t,u\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so gilt nach **71** $t\epsilon\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. Der Bereich $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ erfüllt somit die Bedingung (*). Bleibt zu zeigen, daß dieser Bereich $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnet ist. Zu diesem Zweck bemerken wir, daß es laut Voraussetzung eine Menge $A\epsilon M$ derart gibt, daß die Bedingungen $x\epsilon\mathfrak{A}$ und $|\varphi,x|\epsilon\mathfrak{A}$ für $x\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und $\varphi\epsilon\mathfrak{G}(A)$ äquivalent sind. Es sei $t\epsilon\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, und $\varphi\epsilon\mathfrak{G}(A)$. Wir haben dann für ein gewisses $u\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$: $\langle t,u\rangle\epsilon\mathfrak{A}$, wonach wegen (1) und **46**: $|\varphi,\langle t,u\rangle|\epsilon\mathfrak{A}$. Durch Anwendung von **32** bekommen wir hieraus $\langle|\varphi,t|,|\varphi,u|\rangle\epsilon\mathfrak{A}$, was nach **71** beweist, daß $|\varphi,t|\epsilon\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. Ist umgekehrt $|\varphi,t|\epsilon\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, so gilt laut (*) $\langle|\varphi,t|,u\rangle\epsilon\mathfrak{A}$ für ein gewisses $u\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Da $\varphi^{-1}\epsilon\mathfrak{G}(A)$, so folgt daraus nach **32** und **33** $|\varphi^{-1},\langle|\varphi,t|,u\rangle|=\langle t,|\varphi^{-1},u|\rangle\epsilon\mathfrak{A}$ und folglich $t\epsilon\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. Die Formeln $t\epsilon\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ und $|\varphi,t|\epsilon\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ sind also für $t\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und $\varphi\epsilon\mathfrak{G}(A)$ äquivalent, was nach (1) beweist, daß $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ ein $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneter Bereich ist, w. z. b. w.

Aus **72** und **54** ergibt sich die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 15.

73. *Ist $\mathfrak{G}\epsilon\mathcal{G}$ und $M\epsilon R(\mathfrak{G})$, so gibt es für jeden $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneten Bereich $\mathfrak{A}$ einen $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneten Bereich $\mathfrak{B}$ mit der Eigenschaft:*

(*) *ist $t\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so gilt $t\epsilon\mathfrak{B}$ dann und nur dann, wenn es Elemente $u,v\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ gibt, so daß $t=\langle u,v\rangle$ und $\langle v,u\rangle\epsilon\mathfrak{A}$.*

Beweis. Enthält $\mathfrak{A}$ kein geordnetes Paar, so setzen wir $\mathfrak{B}=\Lambda_0$. Dieser Bereich ist $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnet und erfüllt die Bedingung (*), da nach Voraussetzung $\langle u,v\rangle\epsilon\mathfrak{A}$ für keine u,v gilt und $\mathfrak{B}$ laut **26** keine Elemente von $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ enthält. Wir können also voraussetzen, daß $\mathfrak{A}$ mindestens ein geordnetes Paar enthält; es gilt dann nach **43**

(1) $$0\neq\mathfrak{A}\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}.$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{B}$ den Bereich der Paare $\langle u,v\rangle$, für welche $\langle v,u\rangle\epsilon\mathfrak{A}$. Es ist also

(2) $$\mathfrak{B}\neq 0.$$

Aus (1) schließen wir mit Rücksicht auf **26**, **46** und **48**, daß

(3) $$\mathfrak{B}\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}.$$

Aus den Voraussetzungen unseres Satzes ergibt sich die Existenz einer Menge $A\epsilon M$ derart, daß die Formeln $x\epsilon\mathfrak{A}$ und $|\varphi,x|\epsilon\mathfrak{A}$ für $x\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und $\varphi\epsilon\mathfrak{G}(A)$ äquivalent sind. Es sei nun $t\epsilon\mathfrak{B}$ und $\varphi\epsilon\mathfrak{G}(A)$. Für gewisse $u,v\epsilon\mathfrak{A}$ gilt $t=\langle u,v\rangle$ und $\langle v,u\rangle\epsilon\mathfrak{A}$; nach (1), **26** und **46** ist dabei $u,v\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, wonach wegen **32** $\langle|\varphi,v|,|\varphi,u|\rangle\epsilon\mathfrak{A}$. Da laut **32** $|\varphi,t|=\langle|\varphi,u|,|\varphi,v|\rangle$, so erhalten wir $|\varphi,t|\epsilon\mathfrak{B}$. Ganz ähnlich können wir zeigen, daß aus $|\varphi,t|\epsilon\mathfrak{B}$ die Formel $t\epsilon\mathfrak{B}$ folgt. Beide Formeln sind somit äquivalent, was nach (2) und (3) beweist, daß der Bereich $\mathfrak{B}$ $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnet ist.

Es sei nun $t\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Ist $t\epsilon\mathfrak{B}$, so gibt es u und v derart, daß $t=\langle u,v\rangle$ und $\langle v,u\rangle\epsilon\mathfrak{A}$. Dabei kann $\langle u,v\rangle\epsilon K_0$ nicht gelten, da die Elemente von K_0 unendliche Mengen sind. Aus **46** ergibt sich also $\{u,v\}\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, und eine nochmalige Anwendung desselben Schlusses zeigt, daß $u,v\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Ist umgekehrt $u,v\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und $\langle v,u\rangle\epsilon\mathfrak{A}$, so gilt $\langle u,v\rangle\epsilon\mathfrak{B}$ laut der Definition von $\mathfrak{B}$. Dies beweist, daß $\mathfrak{B}$ die Bedingung (*) erfüllt, w. z. b. w.

Aus **73**, **51** und **54** folgt die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 16.

74. *Ist $\mathfrak{G}\epsilon\mathcal{G}$ und $M\epsilon R(\mathfrak{G})$, so gibt es für jeden $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneten Bereich $\mathfrak{A}$ einen $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneten Bereich $\mathfrak{B}$ mit der Eigenschaft:*

(*) *ist $t\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, so gilt $t\epsilon\mathfrak{B}$ dann und nur dann, wenn es Elemente $u,v,w\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ gibt, so daß $t=\langle\langle u,v\rangle,w\rangle$ und $\langle u,\langle v,w\rangle\rangle\epsilon\mathfrak{A}$.*

Beweis. Man setzt $\mathfrak{B}=\Lambda_0$ falls $\mathfrak{A}$ keine Menge von der Form $\langle x,\langle y,z\rangle\rangle$ enthält. Andernfalls bezeichnet man mit $\mathfrak{B}$ den Bereich der Tripel $\langle\langle x,y\rangle,z\rangle$, wo $\langle x,\langle y,z\rangle\rangle\epsilon\mathfrak{A}$. Der Rest der Überlegung verläuft genau so, wie im Beweis von **73**.

Aus **74**, **51** und **54** folgt die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 17.

75. *Es sei $\mathfrak{G}\epsilon\mathcal{G}$, $M\epsilon R(\mathfrak{G})$ und $x\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$. Es sei ferner $\mathfrak{A}$ ein $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneter Bereich mit folgender Eigenschaft: aus $\langle u,v\rangle$, $\langle u,w\rangle\epsilon\mathfrak{A}$ folgt für beliebige $u,v,w\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ die Gleichung $v=w$. Unter diesen Voraussetzungen gibt es ein $y\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ derart, daß für ein beliebiges $z\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ die Bedingung $z\epsilon y$ dann und nur dann erfüllt ist, wenn es ein $t\epsilon\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ gibt, für welches $t\epsilon x$ und $\langle t,z\rangle\epsilon\mathfrak{A}$.*

Beweis. Gibt es kein $t \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}} \cdot x$ oder kein $z \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$, so daß $\langle t,z \rangle \epsilon \mathfrak{A}$, so genügt es, $y = A_0$ zu setzen. Nach **45** ist y ein $M,\mathfrak{S}$-ausgezeichnetes Element, das offenbar allen Forderungen von **75** entspricht.

Wir nehmen also an, daß es ein $t_0 \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}} \cdot x$ und ein $z_0 \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$ gibt derart, daß $\langle t_0, z_0 \rangle \epsilon \mathfrak{A}$. Es folgt daraus nach **26**, **48** und **43**

(1) $$0 \neq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}},$$

(2) $$x \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}} - K_0.$$

Wir bezeichnen mit x_1 die Menge derjenigen $t \epsilon x$, für die es ein $z \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$ gibt, so daß $\langle t,z \rangle \epsilon \mathfrak{A}$. Diese Menge ist also nicht leer, da $t_0 \epsilon x_1$, und wir schließen aus (2), **46** und **48** mit Rücksicht auf die Voraussetzungen unseres Satzes, daß es für $t \epsilon x_1$ genau ein $z \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$ gibt, so daß $\langle t,z \rangle \epsilon \mathfrak{A}$. Dieses einzige z bezeichnen wir mit t^* und setzen $y = \underset{t^*}{E}[t \epsilon x_1]$. Ist $z \epsilon y$, so gibt es ein $t \epsilon x_1$, für welches $z = t^*$, wonach wegen (2) und **46** $t \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$ und $\langle t,z \rangle \epsilon \mathfrak{A}$. Gilt umgekehrt $z, t \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$ und $t \epsilon x$ sowie $\langle t,z \rangle \epsilon \mathfrak{A}$, so haben wir $t \epsilon x_1$ und $t^* = z$, also $z \epsilon y$. Die Formel $z \epsilon y$ gilt also für $z \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$ dann und nur dann, wenn es ein $t \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$ gibt, so daß $t \epsilon x$ und $\langle t,z \rangle \epsilon \mathfrak{A}$. Es bleibt also noch übrig zu zeigen, daß $y \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}} - K$.

Für jedes $t \epsilon x_1$ ist $t^* \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}} \subset \mathfrak{M}$; ist ξ eine beliebige Ordnungszahl, welche alle $\tau(t^*)$ mit $t \epsilon x_1$ übertrifft [19]), so folgt aus **18** und **20**: $y \subset K_\xi$. Da $z_0 \epsilon y$, so ist $0 \neq y$ und wir schließen auf Grund von **22**, daß

(3) $$y \epsilon \mathfrak{M}.$$

Da $z_0 \epsilon y \cdot \mathfrak{M}$, so erhalten wir aus **26**

(4) $$y \, non \, \epsilon K_0.$$

Es gilt offenbar $x_1 \subset x \cdot \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. Ist nun $u \epsilon x \cdot \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, so gilt $\langle u,v \rangle \epsilon \mathfrak{A}$ für ein gewisses v. Nach (1) folgt hieraus $\langle u,v \rangle \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$, wobei nach **26** $\langle u,v \rangle$ nicht zu K_0 gehört, da laut (2) und **48** $\{u,u\} \epsilon \langle u,v \rangle \cdot \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$ ist. Nach **46** gilt also $\langle u,v \rangle \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$, wonach $\{u,v\} \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$. Es gilt wieder $\{u,v\} \, non \, \epsilon K_0$, da $u \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$ nach (2) und **46**. Folglich ist $\{u,v\} \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$, d. h. $v \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$. Da $\langle u,v \rangle \epsilon \mathfrak{A}$, so folgt hieraus $u \epsilon x_1$. Folglich haben wir $x \cdot \mathfrak{D}(\mathfrak{A}) \subset x_1$, wonach

(5) $$x_1 = x \cdot \mathfrak{D}(\mathfrak{A}).$$

Aus (5), (2), **66** und **72** folgt $x_1 \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$, und da $t_0 \epsilon x_1 \cdot \mathfrak{M}$, so ist laut **26**

(6) $$x_1 \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}} - K_0.$$

Mit Rücksicht auf **46** und **32** schließen wir aus (6) auf die Existenz einer Menge $A_1 \epsilon M$ derart, daß die Formeln

(7) $$t \epsilon x_1 \quad \text{und} \quad |\varphi, t| \epsilon x_1 \qquad \text{für} \quad t \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}} \quad \text{und} \quad \varphi \epsilon \mathfrak{S}(A_1)$$

äquivalent sind. Da ferner $\mathfrak{A}$ ein $M,\mathfrak{S}$-ausgezeichneter Bereich ist und $\mathfrak{A} \neq A_0$ ist, so gibt es eine Menge $A_2 \epsilon M$ derart, daß die Formeln

(8) $$t \epsilon \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad |\varphi, t| \epsilon \mathfrak{A} \qquad \text{für} \quad t \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}} \quad \text{und} \quad \varphi \epsilon \mathfrak{S}(A_2)$$

äquivalent sind.

Wir setzen nun $A = A_1 + A_2$ und haben laut **42**

(9) $$A \epsilon M.$$

Es sei nun $\varphi \epsilon \mathfrak{S}(A) \subset \mathfrak{S}(A_1) \cdot \mathfrak{S}(A_2)$ und $z \epsilon y$. Es gibt dann ein $t \epsilon x_1$, so daß $\langle t,z \rangle \epsilon \mathfrak{A}$. Mit Rücksicht auf (7), (8) und **32** folgt hieraus $|\varphi, t| \epsilon x_1$ und $\langle |\varphi, t|, |\varphi, z| \rangle \epsilon \mathfrak{A}$, also $|\varphi, z| \epsilon y$. Ist umgekehrt $|\varphi, z| \epsilon y$, so gilt $\langle t, |\varphi, z| \rangle \epsilon \mathfrak{A}$ für ein $t \epsilon x_1$, wonach wir auf Grund von (7), (8), **32** und **33** schließen, daß $\langle |\varphi^{-1}, t|, z \rangle \epsilon \mathfrak{A}$ und $|\varphi^{-1}, t| \epsilon x_1$. Folglich ist $z \epsilon y$. Diese Bedingung ist also für jedes $\varphi \epsilon \mathfrak{S}(A)$ mit der Bedingung $|\varphi, z| \epsilon y$ äquivalent; daraus ergibt sich mit Rücksicht auf (4), **32** und **40** die Formel

(10) $$y \epsilon \mathfrak{K}_{\mathfrak{S}}(A).$$

Es sei nun ξ eine Ordnungszahl. Wir haben offenbar $y \subset \Sigma_2(\mathfrak{A})$. Nach (1), **10** und **50** folgt daraus $y \cdot \mathfrak{M} \subset \Sigma_2(\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}) \cdot \mathfrak{M} \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}$. Da, wie wir oben gesehen haben, $y \subset \mathfrak{M}$ ist, so erhalten wir hieraus nach **50** und **44**: $\Sigma_\xi(y) \subset \Sigma_\xi(\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}}) \subset \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}} \subset \sum_{B \epsilon M} \mathfrak{K}_{\mathfrak{S}}(B)$. Dies beweist auf Grund von (3), (4), (9), (10) und **43** daß $y \epsilon \mathfrak{W}_{M,\mathfrak{S}} - K_0$, w. z. b. w.

Aus **75**, **51** und **54** ergibt sich die Behauptung des Haupttheorems für Axiom 18. Das Haupttheorem ist somit vollständig bewiesen.

Das soeben bewiesene Haupttheorem setzt uns in den Stand, gewisse Unabhängigkeitsbeweise durchzuführen.

Stellen wir uns eine Menge μ von Sätzen vor, die sich in der Sprache des Systems $\mathfrak{S}$ ausdrücken lassen, und sei α ein Satz von derselben Natur, der der Menge μ nicht angehört. Um zu beweisen, daß α von allen Axiomen des Systems $\mathfrak{S}$ und Sätzen aus μ unabhängig ist, genügt es im Lichte des Haupttheorems, eine Gruppe $\mathfrak{G} \epsilon \mathcal{G}$ und einen Ring $M \epsilon R(\mathfrak{G})$ anzugeben, die zwei folgende Eigenschaften haben: (1) bei der Interpretation der Grundbegriffe des Systems $\mathfrak{S}$, die im Haupttheorem beschrieben wurde, gehen alle Sätze aus μ in richtige Aussagen über; (2) bei derselben Interpretation geht α in einen falschen Satz über. Ein Beispiel für dieses Verfahren werden wir im nächsten § angeben.

§ 4. Die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip.

76. Es sei $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ irgendeine aber ein für allemal fest gewählte Folge aller rationalen Zahlen.

77. Ist r eine rationale Zahl, so setzen wir $f(r) = A_n$, wo n die Nummer der Zahl r in der Folge **76** bedeutet.

78. *Die Funktion f bildet die Menge der rationalen Zahlen auf die Menge K eineindeutig ab.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus **77** und **16**.

79. $x \lesssim y$ gilt dann und nur dann, wenn $x, y \,\epsilon\, K$ und $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$.

80. *Die Relation $\lesssim$ hat in der Menge K den Typus η.*

Der Beweis ergibt sich aus **78** und **79**.

81. $\mathfrak{G}^+$ bezeichnet die Untergruppe von $\mathfrak{G}_0$, bestehend aus Funktionen, die die Relation $\lesssim$ fest lassen.

82. M^+ bezeichnet das System der endlichen Teilmengen von K.

83. $\mathfrak{G}^+ \epsilon\, \mathcal{G}$ *und* $M^+ \epsilon\, R(\mathfrak{G}^+)$.

Diese Behauptung folgt aus **81**, **82**, **38** und **42**.

84. Für jede Teilmenge $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{G}_0$ bezeichnen wir mit $|\mathfrak{T}|$ die kleinste Untergruppe von $\mathfrak{G}_0$, die $\mathfrak{T}$ umfaßt.

85. *Ist* $A, B \,\epsilon\, M^+$, $A \cdot B = 0$ und $a, b \,\epsilon\, K$, *so gibt es eine Funktion* $\varphi \,\epsilon\, |\mathfrak{G}^+(A) + \mathfrak{G}^+(B)|$, *so daß* $\varphi(a) = b$.

Beweis. Wir können offenbar voraussetzen, daß $a \neq b$ also etwa $a \lesssim b$ ist. Setzen wir $\varrho_1 = f^{-1}(a)$, $\varrho_2 = f^{-1}(b)$, so haben wir nach **79** $\varrho_1 < \varrho_2$. Alle Elemente von $A + B$ sind Werte der Funktion f für gewisse rationale Zahlen, die wir mit $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ bezeichnen wollen. Die Anzahl der σ_i, die den Ungleichungen $\varrho_1 \leqslant \sigma_i \leqslant \varrho_2$ genügen, nennen wir p. Wir wenden nun eine Induktion in bezug auf p an.

Es sei zuerst $p = 0$. Wir können dann eine rationale Zahl $\varepsilon > 0$ so bestimmen, daß das abgeschlossene Intervall $I = [\varrho_1 - \varepsilon, \varrho_2 + \varepsilon]$ kein σ_i enthält. Es gibt offenbar eine eineindeutige und ordnungstreue Abbildung g von I auf sich selbst, die den Bedingungen $g(\varrho_1 - \varepsilon) = \varrho_1 - \varepsilon$, $g(\varrho_1) = \varrho_2$, $g(\varrho_2 + \varepsilon) = \varrho_2 + \varepsilon$ genügt. Erweitern wir g durch die Festsetzung $g(x) = x$ für rationale x, die dem Intervall I nicht angehören, so erhalten wir eine eineindeutige und ordnungstreue Abbildung der Menge der rationalen Zahlen auf sich selbst, die alle σ_i fest läßt und ϱ_1 in ϱ_2 überführt. Die Funktion $\varphi = fgf^{-1}$ gehört also offenbar dem System $\mathfrak{G}^+(A)$ und umsomehr dem System $|\mathfrak{G}^+(A) + \mathfrak{G}^+(B)|$ an und führt a in b über. Unsere Behauptung ist also richtig für $p = 0$.

Setzen wir nun voraus, daß $q > 0$ ist und der Satz für $p < q$ gilt. Es seien $a, b \,\epsilon\, K$ zwei Elemente, für welche die Zahl p den Wert q hat. Ist $a \,\epsilon\, A$, so gilt a non $\epsilon\, B$, woraus es leicht zu schließen ist, daß die Gruppe $\mathfrak{G}^+(B)$ eine Funktion φ enthält, für welche $a \lesssim \varphi(a) \lesssim b$. Die Anzahl der $x \,\epsilon\, A + B$, für die $\varphi(a) \lesssim x \lesssim b$ bzw. $\varphi(a) = x$, bzw. $x = b$ ist, ist offenbar kleiner als q. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es also eine Funktion $\psi \,\epsilon\, |\mathfrak{G}^+(A) + \mathfrak{G}^+(B)|$, für welche $\psi(\varphi(a)) = b$. Die Funktion $\chi = \psi\varphi$ hat also alle behaupteten Eigenschaften. Ganz ähnlich kann man schließen, wenn $a \,\epsilon\, B$. Ist nun a non $\epsilon\, A + B$, so gibt es ein $c \,\epsilon\, A + B$ und ein c' non $\epsilon\, A + B$ derart, daß $a \lesssim c \lesssim c' \lesssim b$ und kein $x \,\epsilon\, A + B$ die Bedingungen $a \lesssim x \lesssim c$, $c \lesssim x \lesssim c'$ erfüllt. Wir können etwa voraussetzen, daß $c \,\epsilon\, A$. Es gibt dann offenbar eine Funktion $\varphi \,\epsilon\, \mathfrak{G}^+(B)$, so daß $\varphi(a) = c'$. Laut der Induktionsvoraussetzung gibt es eine Funktion $\psi \,\epsilon\, |\mathfrak{G}^+(A) + \mathfrak{G}^+(B)|$, für die $\psi(c') = b$. Die Funktion $\varphi\psi$ hat also alle behaupteten Eigenschaften, w. z. b. w.

86. *Ist* $A, B \,\epsilon\, M^+$, $A \cdot B = 0$, $n \geqslant 1$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \,\epsilon\, K$ *und* $a_1 \lesssim a_2 \lesssim \dots \lesssim a_n$, $b_1 \lesssim b_2 \lesssim \dots \lesssim b_n$, *so gibt es eine Funktion* $\varphi \,\epsilon\, |\mathfrak{G}^+(A) + \mathfrak{G}^+(B)|$, *so daß* $\varphi(a_i) = b_i$ *für* $i = 1, 2, \dots, n$.

Beweis. Für $n = 1$ ist unsere Behauptung richtig laut **85**. Wir setzen voraus, daß $p \geqslant 1$ ist und die Behauptung für $n \leqslant p$ richtig ist. Es seien $a_1, \dots, a_{p+1}, b_1, \dots, b_{p+1}$ $2p + 2$ Elemente von K, so daß

$$a_1 \lesssim a_2 \lesssim \dots \lesssim a_{p+1}, \quad b_1 \lesssim b_2 \lesssim \dots \lesssim b_{p+1}.$$

Nach der Voraussetzung gibt es eine Funktion $\psi \,\epsilon\, |\mathfrak{G}^+(A) + \mathfrak{G}^+(B)|$, für welche $\psi(a_i) = b_i$ $(i = 1, 2, \dots, p)$. Wir setzen $\psi(a_{p+1}) = b^*_{p+1}$; da $\psi \,\epsilon\, \mathfrak{G}^+$, so gilt offenbar $b_p \lesssim b^*_{p+1}$. Wir betrachten nun die Menge $I = K \cdot \underset{x}{E}[b_p \lesssim x]$.

Aus **80** folgt leicht, daß es eine Funktion g gibt, die I auf die ganze Menge K eineindeutig abbildet und dabei die Relation $\lesssim$ fest läßt. Nach **85** gibt es ferner eine Funktion $\chi \,\epsilon\, \big|\mathfrak{G}^+(g(A \cdot I)) + \mathfrak{G}^+(g(B \cdot I))\big|$, so daß $\chi(g(b_{p+1})) = g(b_{p+1})$. Die Funktion $h = g^{-1}\chi g$ bildet also I auf sich eineindeutig ab, läßt die Relation $\lesssim$ fest und genügt der Bedingung $h(b^*_{p+1})=b_{p+1}$. Wir erweitern die Funktion h auf die ganze Menge K durch die Festsetzung $h(x)=x$ für $x\epsilon K-I$ und setzen $\varphi=h\psi$. Diese Funktion erfüllt ersichtlich die Bedingungen $\varphi(a_l)=b_l$ $(i=1,2,\dots,p+1)$. Es bleibt zu zeigen, daß $\varphi\epsilon|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$. Da aber $\psi\epsilon|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$, genügt es dazu, zu beweisen, daß $h\epsilon|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$.

Als Element von

$$\left|\mathfrak{S}^+\big(g(A\cdot I)\big)+\mathfrak{S}^+\big(g(B\cdot I)\big)\right|$$

läßt sich die Funktion χ in der Form $\chi_1\chi_2\dots\chi_k$ darstellen, wo die χ_l mit geradem Index etwa zu $\mathfrak{S}^+\big(g(A\cdot I)\big)$ und die χ_l mit ungeradem Index zu $\mathfrak{S}^+\big(g(B\cdot I)\big)$ gehören mögen. Wir schließen hieraus, daß

$$h(x)=g^{-1}\chi g(x)=(g^{-1}\chi_1 g)(g^{-1}\chi_2 g)\dots(g^{-1}\chi_k g)(x)$$

für $x\epsilon I$.

Die Funktionen $g^{-1}\chi_l g$ $(l=1,2,\dots,k)$ bilden die Menge I auf sich selbst ab und lassen die Ordnungsrelation $\lesssim$ fest. Ist $a\epsilon A\cdot I$, so ist $g(a)\epsilon g(A\cdot I)$ und folglich $\chi_l\big(g(a)\big)=g(a)$ für gerade $l\leqslant k$. Setzen wir also $\omega_l(x)=g^{-1}\chi_l g(x)$ für $x\epsilon I$ und $\omega_l(x)=x$ für $x\epsilon K-I$ $(l=1,2,\dots,k)$, so wird $\omega_l\epsilon\mathfrak{S}^+(A)$ für gerade $l\leqslant k$. Ähnlich können wir zeigen, daß für ungerade $l\leqslant k$ $\omega_l\epsilon\mathfrak{S}^+(B)$. Danach ist $\omega_1\omega_2\dots\omega_k\epsilon|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$. Nun behaupten wir, daß

(1) $$h(x)=\omega_1\dots\omega_k(x) \quad \text{für} \quad x\epsilon K.$$

Ist nämlich $x\epsilon I$, so ist

$$\omega_k(x)=g^{-1}\chi_k g(x)\epsilon I, \quad \omega_{k-1}\omega_k(x)=(g^{-1}\chi_{k-1}g)(g^{-1}\chi_k g)(x)\epsilon I,$$

u. s. w., so daß wir schließlich durch Induktion zur Formel

$$\omega_1\dots\omega_k(x)=(g^{-1}\chi_1 g)\dots(g^{-1}\chi_k g)(x)=h(x)\epsilon I$$

kommen. Ist aber $x\epsilon K-I$, so schließen wir Schritt für Schritt

$$\omega_k(x)=x,\ \omega_{k-1}\omega_k(x)=\omega_k(x)=x,\dots,\omega_1\dots\omega_k(x)=x=h(x).$$

Die Formel (1) ist somit bewiesen und es folgt daraus

$$h\epsilon|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|,$$

w. z. b. w.

87. *Ist* $A,B\epsilon M^+$ *und* $A\cdot B=0$, *so ist* $\mathfrak{S}^+=|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$.

Beweis. Ist $A=0$ oder $B=0$, so ist die Behauptung trivial. Wir setzen also voraus, daß weder A noch B leer ist; diese Mengen lassen sich dann in der Form darstellen

$$A=\{a_1^{(1)},\dots,a_{i_1}^{(1)},a_1^{(2)},\dots,a_{i_2}^{(2)},\dots,a_1^{(p)},\dots,a_{i_p}^{(p)}\},$$

$$B=\{b_1^{(1)},\dots,b_{j_1}^{(1)},b_1^{(2)},\dots,b_{j_2}^{(2)},\dots,b_1^{(p)},\dots,b_{j_p}^{(p)}\},$$

wo

$$a_1^{(1)}\lesssim\dots\lesssim a_{i_1}^{(1)}\lesssim b_1^{(1)}\lesssim\dots\lesssim b_{j_1}^{(1)}\lesssim\dots\lesssim a_1^{(p)}\lesssim\dots\lesssim a_{i_p}^{(p)}\lesssim b_1^{(p)}\lesssim\dots\lesssim b_{j_p}^{(p)}$$

(i_1 oder j_p kann dabei gleich 0 sein).

Es sei nun $\varphi\epsilon\mathfrak{S}^+$; wir setzen $c_l^{(k)}=\varphi(a_l^{(k)})$, $d_m^{(k)}=\varphi(b_m^{(k)})$ $(k=1,2,\dots,p,\ l=1,2,\dots,i_k,\ m=1,2,\dots,j_k)$ und haben dann

$$c_1^{(1)}\lesssim\dots\lesssim c_{i_1}^{(1)}\lesssim d_1^{(1)}\lesssim\dots\lesssim d_{j_1}^{(1)}\lesssim\dots\lesssim c_1^{(p)}\lesssim\dots\lesssim c_{i_p}^{(p)}\lesssim d_1^{(p)}\lesssim\dots\lesssim d_{j_p}^{(p)}.$$

Nach **86** gibt es eine Funktion $\psi\epsilon|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$, so daß

$$\psi(c_l^{(k)})=a_l^{(k)},\quad \psi(d_m^{(k)})=b_m^{(k)} \qquad (k=1,2,\dots,p,\ l=1,2,\dots,i_k,\ m=1,2,\dots,j_k).$$

Wir haben also $\psi\varphi(a_l^{(k)})=a_l^{(k)}$ und $\psi\varphi(b_m^{(k)})=b_m^{(k)}$ für $k=1,2,\dots,p$, $l=1,2,\dots,i_k$, $m=1,2,\dots,j_k$, wonach $\psi\varphi\epsilon\mathfrak{S}^+(A+B)\subset|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$. Da $\varphi=\psi^{-1}(\psi\varphi)$ und $\psi^{-1}\epsilon|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$, so folgt daraus $\varphi\epsilon|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$. Da dies für jedes $\varphi\epsilon\mathfrak{S}^+$ zutrifft, so haben wir $\mathfrak{S}^+\subset|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$ und folglich $\mathfrak{S}^+=|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$, w. z. b. w.

88. *Ist* $A,B\epsilon M^+$, *so ist* $\mathfrak{S}^+(A\cdot B)=|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$.

Beweis. Die Inklusion

(1) $$\mathfrak{S}^+(A\cdot B)\supset|\mathfrak{S}^+(A)+\mathfrak{S}^+(B)|$$

ist evident. Um die inverse Inklusion zu beweisen, schließen wir durch Induktion in bezug auf die Anzahl p der Elemente von $A\cdot B$. Ist $p=0$, so folgt alles aus **87**. Wir setzen nun voraus, daß $p\geqslant 1$ ist und unsere Behauptung für solche $A,B\epsilon M^+$, deren Durchschnitt weniger als p Elemente enthält, richtig ist.

Es seien A,B zwei Mengen aus M^+ deren Durchschnitt genau p Elemente hat und es sei a das früheste (in bezug auf die Relation $\lesssim$) Element von $A\cdot B$. Wir setzen $I_1=K\cdot\underset{x}{E}[x\lesssim a]$, $I_2=K\cdot\underset{x}{E}[a\lesssim x]$.

Es sei nun φ eine Funktion aus $\mathfrak{G}^+(A\cdot B)$. Aus $\varphi(a)=a$ folgt leicht, daß φ die Mengen I_1 und I_2 in sich überführt. Wir bezeichnen für $i=1,2$ mit φ_i die Funktion, deren Werte in I_i mit denjenigen von φ übereinstimmen (und die außerhalb I_i nicht erklärt ist).

Nach **80** gibt es zwei Funktionen f_1 und f_2 die beziehungsweise die Mengen I_1 und I_2 eineindeutig auf K abbilden und dabei die Relation $\lessdot$ fest lassen. Die Funktion $f_i\varphi_i f_i^{-1}$ $(i=1,2)$ gehört offenbar der Gruppe $\mathfrak{G}^+$ an.

Ist $x\in f_i(A\cdot I_i)\cdot f_i(B\cdot I_i)$, so ist $f_i^{-1}(x)\in A\cdot B\cdot I_i$, wonach $\varphi_i f_i^{-1}(x)=\varphi f_i^{-1}(x)=f_i^{-1}(x)$, d. h. $f_i\varphi_i f_i^{-1}(x)=x$. Wir haben also $f_i\varphi_i f_i^{-1}\in\mathfrak{G}^+(f_i(A\cdot I_i)\cdot f_i(B\cdot I_i))$ für $i=1,2$. Da aber die Menge $f_i(A\cdot I_i)\cdot f_i(B\cdot I_i)$ weniger als p Elemente hat, so folgt daraus laut der Induktionsvoraussetzung $f_i\varphi_i f_i^{-1}\in|\mathfrak{G}^+(f_i(A\cdot I_i))+\mathfrak{G}^+(f_i(B\cdot I_i))|$; $f_i\varphi_i f_i^{-1}$ hat also die Form einer zusammengesetzten Funktion:

(2) $$f_i\varphi_i f_i^{-1}=\omega_1^{(i)}\dots\omega_{k_i}^{(i)}\qquad (i=1,2),$$

wo die $\omega_l^{(i)}$ mit ungeradem Index l etwa der Gruppe $\mathfrak{G}^+(f_i(A\cdot I_i))$ und die $\omega_l^{(i)}$ mit geradem Index l der Gruppe $\mathfrak{G}^+(f_i(B\cdot I_i))$ angehören.

Wir setzen für $i=1,2$ und $l=1,2,\dots,k_i$

(3) $$\chi_l^{(i)}(x)=f_i^{-1}\omega_l^{(i)}f_i(x)\qquad \text{falls}\quad x\in I_i,$$

(4) $$\chi_l^{(i)}(x)=x\qquad \text{falls}\quad x\in K-I_i.$$

Ferner setzen wir für $i=1,2$

$$\psi_i(x)=\varphi_i(x)\qquad \text{falls}\quad x\in I_i,$$

$$\psi_i(x)=x\qquad \text{falls}\quad x\in K-I_i.$$

Es gilt dann offenbar $\chi_l^{(i)},\psi_i\in\mathfrak{G}^+$ für $l=1,2,\dots,k_i$ und $i=1,2$ und

(5) $$\varphi=\psi_1\psi_2.$$

Wir behaupten nun, daß

(6) $$\psi_i=\chi_1^{(i)}\dots\chi_{k_i}^{(i)}\qquad (i=1,2).$$

Ist in der Tat $x\in K-I_i$, so erhalten wir sukzessiv $\chi_{k_i}^{(i)}(x)=x\in K-I_i$, $\chi_{k_i-1}^{(i)}(\chi_{k_i}^{(i)}(x))=\chi_{k_i-1}^{(i)}(x)=x\in K-I_i$ u. s. w. $\chi_1^{(i)}\dots\chi_{k_i}^{(i)}(x)=x=\psi_i(x)$. Ist dagegen $x\in I_i$, so ist

$$\chi_{k_i}^{(i)}(x)=f_i^{-1}\omega_{k_i}^{(i)}f_i(x)\in I_i,\qquad \chi_{k_i-1}^{(i)}\chi_{k_i}^{(i)}(x)=f_i^{-1}\omega_{k_i-1}^{(i)}\omega_{k_i}^{(i)}f_i(x)\in I_i,$$

u. s. w., so daß wir schließlich zur Formel $\chi_1^{(i)}\dots\chi_{k_i}^{(i)}(x)=f_i^{-1}\omega_1^{(i)}\dots\omega_{k_i}^{(i)}f_i(x)$ kommen. Nach (2) folgt daraus $\chi_1^{(i)}\dots\chi_{k_i}^{(i)}(x)=\varphi_i(x)=\psi_i(x)$, da $x\in I_i$. Damit ist (6) begründet.

Nun zeigen wir folgendes:

(7) *für ungerade* $l\leqslant k_i$ *ist* $\chi_l^{(i)}\in\mathfrak{G}^+(A)$,

(8) *für gerade* $l\leqslant k_i$ *ist* $\chi_l^{(i)}\in\mathfrak{G}^+(B)$.

Es genügt nur eine von diesen Formeln, z. B. die erste, zu beweisen. Es sei also $x\in A$; ist $x\in A\cdot I_i$, so ist $f_i(x)$ definiert und $f_i(x)\in f_i(A\cdot I_i)$. Da $\omega_l^{(i)}\in\mathfrak{G}^+(f_i(A\cdot I_i))$, so folgt daraus $\omega_l^{(i)}f_i(x)=f_i(x)$, d. h. $f_i^{-1}\omega_l^{(i)}f_i(x)=x=\chi_l^{(i)}(x)$. Ist dagegen $x\in A-I_i$, so haben wir nach (4) $\chi_l^{(i)}(x)=x$. Die Funktion $\chi_l^{(i)}$ läßt also alle Elemente von A fest, d. h. es ist $\chi_l^{(i)}\in\mathfrak{G}^+(A)$. Der Beweis von (8) ist völlig analog.

Aus (6), (7) und (8) folgt nun $\psi_i\in|\mathfrak{G}^+(A)+\mathfrak{G}^+(B)|$, wonach wegen (5) $\varphi\in|\mathfrak{G}^+(A)+\mathfrak{G}^+(B)|$. Da φ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{G}^+(A\cdot B)$ war, so folgt daraus $\mathfrak{G}^+(A\cdot B)\subset|\mathfrak{G}^+(A)+\mathfrak{G}^+(B)|$ und mit Rücksicht auf (1) $\mathfrak{G}^+(A\cdot B)=|\mathfrak{G}^+(A)+\mathfrak{G}^+(B)|$, w. z. b. w.

89. *Ist* $0\neq X\subset M^+$, *so ist* $\mathfrak{G}^+(\prod_{A\in X}A)=|\sum_{A\in X}\mathfrak{G}^+(A)|$.

Beweis. Ist $A\in X$ und $\varphi\in\mathfrak{G}^+(A)$, so gilt $\varphi(x)=x$ für alle $x\in A$ und umsomehr für alle $x\in\prod_{A\in X}A$. Es ist also $\varphi\in\mathfrak{G}^+(\prod_{A\in X}A)$, wonach

(1) $$\Big|\sum_{A\in X}\mathfrak{G}^+(A)\Big|\subset\mathfrak{G}^+\Big(\prod_{A\in X}A\Big).$$

Bezeichnen wir nun mit A_0 ein beliebiges Element von X und es sei $S=\underset{A_0\cdot A}{E}[A\in X]$. Das System S besteht aus lauter endlichen Teilmengen von A_0 und, da A_0 endlich ist, so ist auch S endlich. Aus **88** folgt also durch eine einfache Induktion:

(2) $$\mathfrak{G}^+\Big(\prod_{A\in S}A\Big)=\Big|\sum_{A\in S}\mathfrak{G}^+(A)\Big|.$$

Ist $A\in S$, so ist $A=A_0\cdot B$ für ein $B\in X$ und folglich nach **88** $\mathfrak{G}^+(A)=|\mathfrak{G}^+(A_0)+\mathfrak{G}^+(B)|\subset|\sum_{B\in X}\mathfrak{G}^+(B)|$. Es ergibt sich daraus die Inklusion

(3) $$\Big|\sum_{A\in S}\mathfrak{G}^+(A)\Big|\subset\Big|\sum_{A\in X}\mathfrak{G}^+(A)\Big|.$$

Wir behaupten nun, daß

(4) $$\prod_{A\epsilon S} A = \prod_{A\epsilon X} A.$$

Erstens nämlich ist die Inklusion $\prod_{A\epsilon X} A \subset \prod_{A\epsilon S} A$ einleuchtend. Ist umgekehrt $x\epsilon \prod_{A\epsilon S} A$ und $B\epsilon X$, so ist $B\cdot A_0 \epsilon S$, also $x\epsilon B\cdot A_0 \subset B$. Da B beliebig gewählt werden kann, so erhalten wir $x\epsilon \prod_{A\epsilon X} A$, d.h. $\prod_{A\epsilon X} A \subset \prod_{A\epsilon S} A$. (4) ist damit bewiesen. Aus (2), (3) und (4) folgt

$$\mathfrak{G}^+(\prod_{A\epsilon X} A) \subset |\sum_{A\epsilon X} \mathfrak{G}^+(A)|,$$

woraus sich mit Rücksicht auf (1) die Richtigkeit von **89** ergibt.

90. Für $A\epsilon M^+$ bezeichnen wir mit $n(A)$ die Anzahl der Elemente von A.

91. Für $A, B\epsilon M^+$ schreiben wir $A\,\varrho\, B$, wenn entweder $n(A)<n(B)$ oder $n(A)=n(B)$ und A in der lexikographischen Ordnung aller $n(A)$-Tupel der Elemente von K der Menge B vorangeht.

92. *Ist* $A, B\epsilon M^+$, $A\,\varrho\, B$ *und* $\varphi\epsilon\mathfrak{G}^+$, *so ist* $\varphi(A)\,\varrho\,\varphi(B)$.

Beweis. Aus **91** folgt, daß $n(\varphi(A))=n(A)$ und $n(\varphi(B))=n(B)$. Ist also $n(A)<n(B)$, so ist auch $n(\varphi(A))<n(\varphi(B))$ und folglich nach **91** $\varphi(A)\,\varrho\,\varphi(B)$. Ist dagegen $n(A)=n(B)$, so steht laut **91** das früheste Element von $A-B$ in der Beziehung $\precsim$ zum frühesten Element von $B-A$. Die Abbildung φ läßt die Relation $\precsim$ invariant; daraus schließen wir, daß das früheste Element von $\varphi(A)-\varphi(B)$ in der Beziehung $\precsim$ zum frühesten Element von $\varphi(B)-\varphi(A)$ steht, was nach **91** beweist, daß $\varphi(A)\,\varrho\,\varphi(B)$ ist, w. z. b. w.

93. Die Menge der $A\epsilon M^+$, für welche $n(A)=n$ ist, bezeichnen wir mit M_n^+ $(n=0,1,2,\ldots)$.

94. Wir setzen für $n=1,2,\ldots$: $A_0=0$, $A_n=\{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$. (vgl. **77**).

95. $A_n\epsilon M_n^+$ *für* $n=0,1,2,\ldots$.

Der Beweis ergibt sich sofort aus **93**, **94** und **77**.

96. Es seien $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ rationale Zahlen, so daß $\sigma_1<\sigma_2<\ldots<\sigma_n$. Wir setzen für ein rationales x:

$$g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}(x) = x-\sigma_1+1 \qquad \text{falls} \quad x\leqslant\sigma_1,$$
$$g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}(x) = \frac{x-\sigma_{i-1}}{\sigma_i-\sigma_{i-1}}+i-1 \qquad \text{falls} \quad \sigma_{i-1}<x\leqslant\sigma_i,$$
$$g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}(x) = x-\sigma_n+n \qquad \text{falls} \quad x>\sigma_n.$$

97. Es sei $A\epsilon M_n^+$ und $A=\{x_1,\ldots,x_n\}$, wo $x_1\precsim\ldots\precsim x_n$. Wir setzen $\sigma_i=f^{-1}(x_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ und $\varphi_A=fg_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}f^{-1}$ falls $n>0$; für $n=0$ bezeichnen wir mit φ_A die Funktion, welche die Gleichung $\varphi_A(x)=x$ für alle $x\epsilon K$ erfüllt.

98. *Ist* $A\epsilon M_n^+$, *so ist* $\varphi_A\epsilon\mathfrak{G}^+$ *und* $\varphi_A(A)=A_n$.

Der Beweis ergibt sich mühelos aus **93**, **94**, **96**, **97** und **77**.

99. Zwecks Abkürzung setzen wir $\mathfrak{W}_{M^+,\mathfrak{G}^+}=\mathfrak{W}^+$ und $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}^+}(A)=\mathfrak{K}^+(A)$.

100. Für $x\epsilon\mathfrak{W}^+$ bezeichnen wir mit $A(x)$ den Durchschnitt aller $A\epsilon M^+$, für welche $x\epsilon\mathfrak{K}^+(A)$.

101. *Ist* $x\epsilon\mathfrak{W}^+$, *so ist* $x\epsilon\mathfrak{K}^+(A(x))$.

Beweis. Wir bezeichnen mit X das System aller $A\epsilon M^+$, für welche $x\epsilon\mathfrak{K}^+(A)$. Nach **43** und **99** ist also $0\neq X\subset M^+$, was nach **89** und **100** beweist, daß $\mathfrak{G}^+(A(x))=|\sum_{A\epsilon X}\mathfrak{G}^+(A)|$. Jede Funktion $\varphi\epsilon\mathfrak{G}^+(A(x))$ läßt sich also als eine zusammengesetzte Funktion $\varphi=\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n$ darstellen, wo $\varphi_i\epsilon\mathfrak{G}^+(A_i)$ und $A_i\epsilon X$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Danach ist laut **40** $|\varphi_i,x|=x$ für $i=1,2,\ldots,n$. Da aber gemäß **36** $|\varphi,x|=|\varphi_1,|\varphi_2,\ldots,|\varphi,x_n|\ldots|$, so folgt daraus $|\varphi,x|=x$. Mit Rücksicht auf **40** schließen wir hieraus $x\epsilon\mathfrak{K}^+(A(x))$, w. z. b. w.

102. *Ist* $x\epsilon\mathfrak{W}^+$ *und* $\varphi\epsilon\mathfrak{G}^+$, *so ist* $A(|\varphi,x|)=\varphi(A(x))$.

Beweis. Nach **41** und **101** ist $|\varphi,x|\epsilon\mathfrak{K}^+(\varphi(A(x)))$, also auf Grund von **100** $A(|\varphi,x|)\subset\varphi(A(x))$. Ist nun $B\epsilon M^+$ und

(1) $$|\varphi,x|\epsilon\mathfrak{K}^+(B),$$

so ist nach **41** und **33** $x\epsilon\mathfrak{K}^+(\varphi^{-1}(B))$, also $A(x)\subset\varphi^{-1}(B)$, d. h. $\varphi(A(x))\subset B$.

Da dies für jedes B gilt, für welches (1) zutrifft, so folgt aus **100** $\varphi(A(x))\subset A(|\varphi,x|)$, w. z. b. w.

In Anknüpfung an Definitionen V, VI aus § 1 führen wir noch folgende Definitionen ein:

103. Eine Menge x ordnet eine Menge y, falls folgende Bedingungen für beliebige $u,v,w\,\epsilon\, y$ erfüllt sind:

(1) $\langle u,v\rangle\,\epsilon\, x$ *oder* $\langle v,u\rangle\,\epsilon\, x$;

(2) *ist* $\langle u,v\rangle\,\epsilon\, x$ *und* $u\neq v$, *so* $\langle v,u\rangle\, non\,\epsilon\, x$;

(3) *ist* $\langle u,v\rangle\,\epsilon\, x$ *und* $\langle v,w\rangle\,\epsilon\, x$, *so* $\langle u,w\rangle\,\epsilon\, x$;

(4) $\langle u,u\rangle\,\epsilon\, x$.

104. Eine Menge x ordnet eine Menge y wohl, falls sie die Menge y ordnet und folgender Bedingung genügt: ist $0\neq z\subset y$, so gibt es ein $u\,\epsilon\, z$ derart, daß $\langle u,v\rangle\,\epsilon\, x$ für jedes $v\,\epsilon\, z$.

105. *Es sei* $\mathfrak{G}\,\epsilon\,\mathcal{G}$, $M\,\epsilon\, R(\mathfrak{G})$ *und* $y\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K_0$. *Damit ein* $x\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ *die Bedingungen* (1)-(4) *aus* **103** *für beliebige* $u,v,w\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}\cdot y$ *erfüllt, ist notwendig und hinreichend, daß* x *die Menge* y *ordnet und dem Bereich* $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ *angehört.*

Beweis. Nehmen wir zuerst an, x gehöre dem Bereich $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ an und erfülle die Bedingungen (1)-(4) aus **103** für beliebige $u,v,w\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}\cdot y$. Da nach **46** $y\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ ist, so gelten diese Bedingungen für beliebige $u,v,w\,\epsilon\, y$, d. h. x ordnet y.

Ist nun $x\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und ordnet x die Menge y, so gelten die Formeln (1)-(4) aus **103** für beliebige $u,v,w\,\epsilon\, y$ und umsomehr für beliebige $u,v,w\,\epsilon\, y\cdot\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$. Aus (4) erhalten wir mit Rücksicht auf **46**, **25**, **48** und **26**: $x\, non\,\epsilon\, K_0$, w. z. b. w.

Satz **105** hat folgende Bedeutung: ersetzt man in Definition V aus § 1 überall die Worte „Individuum", „Klasse", „ε", „Λ" beziehungsweise durch die Worte: „$M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnetes Element", „$M,\mathfrak{G}$-ausgezeichneter Bereich", „ϵ", „Λ_0", so geht diese Definition in eine Aussage über, die den Begriff einer ordnenden Menge, die dem Bereich $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ angehört, definiert.

106. *Es sei* $\mathfrak{G}\,\epsilon\,\mathcal{G}$, $M\,\epsilon\, R(\mathfrak{G})$, $x,z\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$, $x\subset y$ *und* $t=z\cdot\underset{\langle u,v\rangle}{E}[u,v\,\epsilon\, x]$. *Wenn* z *die Menge* y *ordnet, so ordnet* t *die Menge* x *und es gilt* $t\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$.

Beweis. Es ist evident, daß t die Menge x ordnet. Aus **26** und **46** folgt ferner $x\neq\Lambda_0$, denn sonst könnte z nicht dem Bereich $\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}-K$ angehören. Aus **25**, **26** und **46** erhalten wir also

$$0\neq x\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}\quad\text{und}\quad x\, non\,\epsilon\, K_0. \tag{1}$$

Nach **48** und **26** schließen wir daraus, daß

$$0\neq w=\underset{\langle u,v\rangle}{E}[u,v\,\epsilon\, x]\subset\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}, \tag{2}$$

$$w\, non\,\epsilon\, K_0. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich nach **32**

$$|\varphi,w|=\underset{\langle|\varphi,u|,\,|\varphi,v|\rangle}{E}[u,v\,\epsilon\, x]\quad\textit{für}\quad\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}_0. \tag{4}$$

Nach (1) und **32** gibt es eine Menge $A\,\epsilon\, M$, so daß die Formeln $u\,\epsilon\, x$ und $|\varphi,u|\,\epsilon\, x$ für $u\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$ und $\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}(A)$ äquivalent sind. Nach (4) ist also

$$|\varphi,w|=w\quad\textit{für}\quad\varphi\,\epsilon\,\mathfrak{G}(A). \tag{5}$$

Gemäß **32**, beweist (5), daß der Bereich, der mit w umfangsgleich ist, $M,\mathfrak{G}$-ausgezeichnet ist. Da $t=z\cdot w$, so folgt daraus mit Rücksicht auf **66** $t\,\epsilon\,\mathfrak{W}_{M,\mathfrak{G}}$, w. z. b. w.

107. *Für jede Ordnungszahl* ξ *gibt es eine Menge* $x\,\epsilon\,\mathfrak{W}^+-K$, *welche die Menge* $K_\xi\cdot\mathfrak{W}^+$ *ordnet.*

Beweis. Für $A\,\epsilon\, M^+$ bezeichnen wir mit $Y(A)$ die Menge der $y\,\epsilon\, K_\xi\cdot\mathfrak{W}^+$, für die $A(y)=A$. Da $A(y)$ eindeutig durch y bestimmt ist, sind die $Y(A)$ zueinander fremd.

Aus dem Auswahlaxiom ergibt sich nun die Existenz der Mengen O_n $(n=0,1,2,\ldots)$, die die Mengen $Y(A_n)$ ordnen. Mit Hilfe dieser Mengen bestimmen wir eine Relation σ zwischen Elementen von $K_\xi\cdot\mathfrak{W}^+$ auf folgende Weise:

(1) $u\,\sigma\, v$ *gilt dann und nur dann, wenn* 1^0 $u,v\,\epsilon\, K_\xi\cdot\mathfrak{W}^+$ *und* 2^0 *entweder* $A(u)\,\varrho\, A(v)$ *oder* $A(u)=A=A(v)$ *und* $\langle|\varphi_A,u|,|\varphi_A,v|\rangle\,\epsilon\, O_{n(A)}$.

Schließlich bezeichnen wir mit x die Menge der Paare $\langle u,v\rangle$, für die $u\,\sigma\, v$ gilt.

Wir wollen zunächst zeigen, daß x tatsächlich die Menge $K_\xi\cdot\mathfrak{W}^+$ ordnet.

Für $u \in K_\xi \cdot \mathfrak{W}^+$ haben wir nach **47**, **35**, **98**, **83** und **102**

$$|\varphi_{A(u)}, u| \in K_\xi \cdot \mathfrak{W}^+ \cdot Y(A_{n(A(u))}).$$

Da $O_{n(A(u))}$ die Menge $Y(A_{n(A(u))})$ ordnet, so folgt

$$\langle |\varphi_{A(u)}, u|, |\varphi_{A(u)}, u| \rangle \in O_{n(A(u))},$$

d. h. nach (1) $u \sigma u$ oder

(2) $$\langle u,u \rangle \in x \qquad \textit{für} \quad u \in K_\xi \cdot \mathfrak{W}^+.$$

Es sei jetzt $\langle u,v\rangle \in x$ und $u \neq v$. Ist $A(u)\,\varrho\, A(v)$, so kann nach **91** weder $A(v)\,\varrho\, A(u)$ noch $A(v)=A(u)$ gelten; aus (1) folgt also, daß $\langle u,v\rangle$ *non* $\in x$. Ist $A(u)=A=A(v)$, so ist laut (1) $\langle |\varphi_A, u|, \varphi_A, v|\rangle \in O_{n(A)}$. Dabei ist $|\varphi_A, u| \neq |\varphi_A, v|$, da wir sonst nach **33** $u=v$ hätten. Mit Rücksicht darauf, daß $O_{n(A)}$ die Menge $Y(A_{n(A)})$ ordnet, erhalten wir $\langle |\varphi_A, v|, \varphi_A, u|\rangle$ *non* $\in O_{n(A)}$. Nun schließt die Gleichheit $A(u)=A(v)$ die Formel $A(v)\,\varrho\, A(u)$ aus. Wir folgern also aus (1), daß auch in diesem Fall $\langle v,u\rangle$ *non* $\in x$. Es gilt also ganz allgemein folgendes:

(3) *ist* $u \neq v$ *und* $\langle u,v\rangle \in x$, *so ist* $\langle v,u\rangle$ *non* $\in x$.

Setzen wir nun voraus, daß $\langle u,v\rangle \in x$ und $\langle v,w\rangle \in x$. Ist $A(u)\,\varrho\, A(v)$, so muß $A(u)\,\varrho\, A(w)$ gelten, denn es ist jedenfalls $A(v)\,\varrho\, A(w)$ oder $A(v)=A(w)$ und die Relation ϱ ist transitiv. In diesem Fall haben wir also $\langle u,w\rangle \in x$. Ebenso gilt $\langle u,w\rangle \in x$ falls $A(v)\,\varrho\, A(w)$. Ist nun $A(u)=A(v)=A(w)=A$, so haben wir nach (1) $\langle |\varphi_A, u|, |\varphi_A, v|\rangle \in O_{n(A)}$ und $\langle \varphi_A, v|, |\varphi_A, w|\rangle \in O_{n(A)}$, wonach $\langle |\varphi_A, u|, |\varphi_A, w|\rangle \in O_{n(A)}$, d.h. wegen (1) $u \sigma w$ also $\langle u,w\rangle \in x$. Wir haben also folgendes bewiesen:

(4) *aus* $\langle u,v\rangle \in x$ *und* $\langle v,w\rangle \in x$ *folgt* $\langle u,w\rangle \in x$.

Ist $u,v \in K_\xi \cdot \mathfrak{W}^+$, so ist entweder $A(u)\,\varrho\, A(v)$ oder $A(v)\,\varrho\, A(u)$ oder schließlich $A(u)=A=A(v)$. Im ersten Fall ist nach (1) $\langle u,v\rangle \in x$, im zweiten $\langle v,u\rangle \in x$. Im dritten Fall gilt entweder $\langle |\varphi_A, u|, |\varphi_A, v|\rangle \in O_{n(A)}$ oder $\langle |\varphi_A, v|, |\varphi_A, u|\rangle \in O_{n(A)}$, da nach **102** und **93** $|\varphi_A, u|, |\varphi_A, v| \in Y(A_{n(A)})$. Es ist also auch in diesem Fall $\langle u,v\rangle \in x$ oder $\langle v,u\rangle \in x$. Damit ist folgende Formel bewiesen:

(5) *ist* $u,v \in K_\xi \cdot \mathfrak{W}^+$, *so ist entweder* $\langle u,v\rangle \in x$ *oder* $\langle v,u\rangle \in x$.

Aus (2)-(5) folgt nach **103**, daß x die Menge $K_\xi \cdot \mathfrak{W}^+$ ordnet.
Ist $u,v \in K_\xi \cdot \mathfrak{W}^+$, so ist nach **48** und **83** $\langle u,v\rangle \in \mathfrak{W}^+$. Da x aus Paaren $\langle u,v\rangle$ besteht, für die $u,v \in K_\xi \cdot \mathfrak{W}^+$, so ist $x \subset \mathfrak{W}^+$, woraus nach **10**, **44**, **50** und **83**:

(6) $$\Sigma_\eta(x) \cdot \mathfrak{M} \subset \mathfrak{W}^+ \subset \sum_{B \in M^+} \mathfrak{K}^+(B) \quad \textit{für jede Ordnungszahl } \eta.$$

Es sei nun $\langle u,v\rangle \in x$ und $\varphi \in \mathfrak{G}^+(0)$. Nach **32** gilt

(7) $$|\varphi, \langle u,v\rangle| = \langle |\varphi,u|, |\varphi,v|\rangle$$

und nach **47** und **35**

(8) $$|\varphi,u|, |\varphi,v| \in K_\xi \cdot \mathfrak{W}^+.$$

Laut (1) sind zwei Fälle möglich: entweder ist $A(u)\,\varrho\, A(v)$ oder

(9) $$A(u)=A=A(v) \qquad \textit{und} \qquad \langle |\varphi_A, u|, |\varphi_A, v|\rangle \in O_{n(A)}.$$

Im ersten Fall erhalten wir aus **102** und **92** $A(|\varphi,u|)\,\varrho\, A(|\varphi,v|)$, wonach mit Rücksicht auf (1) und (8)

(10) $$\langle |\varphi,u|, |\varphi,v|\rangle \in x.$$

Nehmen wir nun an, daß der zweite Fall zutrifft. Wir setzen $B=\varphi(A)$ und $\psi=\varphi_A^{-1}\varphi_B\varphi$. Nach (9) und **102** haben wir

(11) $$A(|\varphi,u|) = B = A(|\varphi,v|).$$

Ferner haben wir offenbar $\psi \in \mathfrak{G}^+$, da laut **98** $\varphi_A^{-1}, \varphi_B \in \mathfrak{G}^+$. Ist $x \in A$, so ist $\varphi(x) \in B$, ferner nach **98** $\varphi_B\varphi(x) \in A_{n(B)} = A_{n(A)}$, also durch nochmalige Anwendung von **98** $\psi(x)=\varphi_A^{-1}\varphi_B\,\varphi(x) \in A$. Die Funktion ψ bildet also A auf einen Teil von A ab. Nun behaupten wir, daß

(12) $$\psi(x) = x \qquad \textit{für} \quad x \in A.$$

Wäre nämlich $\psi(x) \neq x$ für ein gewisses $x \in A$, also etwa $x \lessdot \psi(x)$, so bekämen wir durch Iteration

$$x \lessdot \psi(x) \lessdot \psi^2(x) \lessdot \ldots \lessdot \psi^k(x) \lessdot \ldots,$$

wobei nach dem soeben Bewiesenen alle $\psi^k(x)$ der Menge A angehören würden. Das ist aber unmöglich, da A als Element von M^+ eine endliche Menge ist. Damit ist (12) bewiesen und es folgt $\psi \in \mathfrak{G}^+(A)$. Nach (9) und **101** beweist dies, daß $|\psi,u|=u$ und $|\psi,v|=v$, d.h. wegen **33** und **36**: $\big|\varphi_B, |\varphi,u|\big| = |\varphi_A, u|$, $\big|\varphi_B, |\varphi,v|\big| = |\varphi_A, v|$. Nach (9) erhalten wir also

(13) $$\langle \big|\varphi_B, |\varphi,u|\big|, \big|\varphi_B, |\varphi,v|\big|\rangle \in O_{n(A)} = O_{n(B)}.$$

Aus (1), (8), (11) und (13) folgt wieder die Formel (10). Wir haben also folgendes bewiesen:

(14) *ist* $\langle u,v\rangle \in x$ *und* $\varphi \in \mathfrak{G}^+(0)$, *so ist* $\langle |\varphi,u|, |\varphi,v|\rangle \in x$.

Setzen wir in (14) φ^{-1} für φ, $|\varphi,u|$ für u und $|\varphi,v|$ für v ein, so erhalten wir:

(15) *ist* $\langle|\varphi,u|,|\varphi,v|\rangle\epsilon x$ *und* $\varphi\epsilon\mathfrak{G}^{+}(0)$, *so ist* $\langle u,v\rangle\epsilon x$.

Da offenbar

(16) $$0\neq x\subset\mathfrak{M},$$

so folgt aus (7), (14) und (15) auf Grund von **32**

(17) $$x\epsilon\mathfrak{K}^{+}(0).$$

Aus (6), (16) und (17) folgt $x\epsilon\mathfrak{W}^{+}$ und aus (2) ergibt sich nach **26** und **48** $x\,non\,\epsilon K_0$, w. z. b. w.

108. *Ist* $y\epsilon\mathfrak{W}^{+}-K_0$, *so gibt es ein* $x\epsilon\mathfrak{W}^{+}$, *das* y *ordnet.*

Beweis. Nach **18** und **21** gilt $y\subset K_\xi$ für eine gewisse Ordnungszahl ξ, wonach wegen **46** $y\subset K_\xi\cdot\mathfrak{W}^{+}$. Nach **107** gibt es eine Menge aus $\mathfrak{W}^{+}$, die $K_\xi\cdot\mathfrak{W}^{+}$ ordnet. Aus **106** schließen wir also, daß es ein $x\epsilon\mathfrak{W}^{+}$ gibt, das y ordnet, w. z. b. w.

109. Mit Rücksicht auf **105**, **51**, **52** und **54** läßt sich Satz **108** wie folgt aussprechen: *wenn wir im Ordnungsprinzip aus § 1 überall die Worte „Individuum", „Klasse", „ε", „A" beziehungsweise durch die Worte „M^{+},$\mathfrak{G}^{+}$-ausgezeichnetes Element", „M^{+},$\mathfrak{G}^{+}$-ausgezeichneter Bereich", „ε", „A_0" ersetzen, so geht das Ordnungsprinzip in eine richtige Aussage über.*

110. $K\epsilon\mathfrak{W}^{+}-K_0$.

Beweis. Aus $0\neq K\subset K_0$ folgt $K\epsilon\mathfrak{P}(K_0)\subset K_1$, wonach

(1) $$K\epsilon\mathfrak{M}.$$

Aus **26** folgt ferner

(2) $$K\,non\,\epsilon K_0.$$

Ist $\varphi\epsilon\mathfrak{G}_0$, so haben wir nach (1), (2), **25**, **32** und **30** b)

$$|\varphi,K|=\underset{\varphi(\cdot 1_n)}{E}[n=1,2,\ldots]=K,$$

wonach

(3) $$K\epsilon\mathfrak{K}^{+}(0).$$

Aus **45** ergibt sich nach **10**, **44**, **50** und **83**

(4) $$\Sigma_\xi(K)\cdot\mathfrak{M}\subset\Sigma_\xi(\mathfrak{W}^{+})\cdot\mathfrak{M}\subset\mathfrak{W}^{+}\subset\sum_{B\epsilon M^{+}}\mathfrak{K}^{+}(B).$$

Aus (1)-(4) folgt nach **43** $K\epsilon\mathfrak{W}^{+}-K_0$, w. z. b. w.

111. *Es gibt kein* $x\epsilon\mathfrak{W}^{+}$, *das* K *ordnet und folgender Bedingung genügt:*

(*) *ist* $z\epsilon\mathfrak{W}^{+}-K_0$ *und hat die Formel* $t\epsilon z$ *für jedes* $t\epsilon\mathfrak{W}^{+}$ *die Formel* $t\epsilon K$ *zur Folge, so gibt es ein* $u\epsilon\mathfrak{W}^{+}\cdot z$ *derart, daß* $\langle u,v\rangle\epsilon x$ *für alle* $v\epsilon\mathfrak{W}^{+}\cdot z$.

Beweis. Wir nehmen an, es gebe ein $x\epsilon\mathfrak{W}^{+}$, das K ordnet und (*) genügt. Es gibt also eine Menge $A_1\epsilon M^{+}$, so daß $x\epsilon\mathfrak{K}^{+}(A_1)$. Nach **110** gibt es eine Menge $A_2\epsilon M^{+}$, so daß $K\epsilon\mathfrak{K}^{+}(A_2)$. Wir setzen $A=A_1+A_2$ und haben dann offenbar

(1) $$A\epsilon M^{+},\qquad x\epsilon\mathfrak{K}^{+}(A),\qquad K\epsilon\mathfrak{K}^{+}(A).$$

Als eine endliche Menge läßt sich A in der Form $A=\{x_1,\ldots,x_n\}$ darstellen, wo $x_1\prec x_2\prec\ldots\prec x_n$. Wir setzen $I_0=\underset{x}{E}[x\prec x_1]\cdot K$, $I_j=\underset{x}{E}[x_j\prec x\prec x_{j+1}]\cdot K$ für $j=1,2,\ldots,n-1$ und $I_n=\underset{x}{E}[x_n\prec x]\cdot K$. Offenbar muß eine der Mengen I_j mindestens zwei Elemente haben, da K unendlich ist. Es sei $I_{j_0}=z$ diese Menge. Wir behaupten, daß

(2) $$z\epsilon\mathfrak{W}^{+}-K_0.$$

Wir haben in der Tat

(3) $$0\neq z\subset\mathfrak{M},$$

da $z\subset K_0$. Danach ist laut **26**

(4) $$z\,non\,\epsilon K_0.$$

Aus $z\subset K_0$ folgt mit Rücksicht auf (2) $z\epsilon\mathfrak{P}(K_0)\subset K_1\subset\mathfrak{M}$. Es ist also

(5) $$z\epsilon\mathfrak{M}.$$

Nach (3), (5) und **32** gilt $|\varphi,z|=\underset{\varphi(x)}{E}[x\epsilon z]$ für $\varphi\epsilon\mathfrak{G}^{+}$. Es sei nun $\varphi\epsilon\mathfrak{G}^{+}(\{x_{j_0},x_{j_0+1}\})$ [21]). Die Formeln $x_{j_0}\prec x\prec x_{j_0+1}$ und $x_{j_0}\prec\varphi(x)\prec x_{j_0+1}$ sind offenbar miteinander äquivalent, was beweist, daß $|\varphi,z|=z$ ist. Da $\{x_{j_0},x_{j_0+1}\}\subset A$, so folgt hieraus

(6) $$z\epsilon\mathfrak{K}^{+}(A).$$

Schließlich haben wir nach **10**, **44**, **50** und **83** mit Rücksicht auf $z\subset K_0\subset\mathfrak{W}^{+}$

(7) $$\Sigma_\xi(z)\cdot\mathfrak{M}\subset\mathfrak{W}^{+}\subset\sum_{B\epsilon M^{+}}\mathfrak{K}^{+}(B)\quad\textit{für jede Ordnungszahl }\xi.$$

[21]) Für $j_0=0$ ist $\{x_1\}$ und für $j_0=n$ ist $\{x_n\}$ anstatt $\{x_{j_0},x_{j_0+1}\}$ zu setzen.

(2) folgt nun aus (4)-(7) und **43**.

Aus **46** folgt nach (2) $z \subset \mathfrak{W}^+$. Da $z \subset K$, so folgt daraus, daß die Formel $t \epsilon z$ für jedes $t \epsilon \mathfrak{W}^+$ die Formel $t \epsilon K$ zur Folge hat. Nach (*) gibt es also ein u_0, so daß:

(7) $u_0 \epsilon z$, (8) $\langle u_0, v\rangle \epsilon x$ *für alle* $v \epsilon z \cdot \mathfrak{W}^+ = z$.

Es sei nun u_1 ein beliebiges Element von z, das von u_0 verschieden ist. Da $u_0, u_1\, non\, \epsilon A$ und die Menge z laut **80** nach dem Typus η geordnet ist, so schließen wir leicht, daß es eine Funktion $\varphi \epsilon \mathfrak{G}^+(A)$ gibt, so daß $\varphi(u_1) = u_0$. Wir haben offenbar

(9) $$u_0 \neq \varphi(u_0),$$

denn sonst würde wegen der Eineindeutigkeit von φ $u_0 = u_1$ sein. Ferner ist nach (6) $\varphi(u_0) \epsilon z$, also nach (8)

(10) $$\langle u_0, \varphi(u_0)\rangle \epsilon x.$$

Anderseits folgt aus (8) durch Anwendung von (1) und **32** $\langle \varphi(u_0), \varphi(u_1)\rangle \epsilon x$, d. h.

(11) $$\langle \varphi(u_0), u_0\rangle \epsilon x.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da sich (10) und (11) mit Rücksicht auf (9) gegenseitig ausschließen. Unsere Behauptung ist somit bewiesen.

Aus **111** folgt mit Rücksicht auf **110**, **105**, **51**, **52** und **54**, daß der Wohlordnungssatz aus §1 bei der in **109** angegebenen Interpretation der Grundbegriffe in eine falsche Aussage übergeht. Hieraus folgt auf Grund des Haupttheorems folgender

Satz I. *Der Wohlordnungssatz ist von allen Axiomen des Systems $\mathfrak{S}$ und vom Ordnungsprinzip unabhängig.*

Als eine leichte Anwendung hiervon erhalten wir noch folgendes

Korollar II. *Fügen wir zu Axiomen des Systems $\mathfrak{S}$ die Aussage:*

(*) *für jedes System von zueinander fremden und endlichen Mengen gibt es eine Auswahlmenge*

hinzu, so ist der Wohlordnungssatz aus diesem System nicht ableitbar[22]*.*

[22]) Korollar II (in einer etwas anderen Formulierung) wurde von A. Fraenkel in der zweiten und dritten seiner unter [12]) zitierten Arbeiten aufgestellt. Die beiden Beweise von Fraenkel sind indes nicht stichhaltig. Vgl. dazu die unter [13]) zitierte Mitteilung von Lindenbaum und von mir.

Zum Beweis genügt es zu bemerken, daß die Aussage (*) auf dem Boden des Systems $\mathfrak{S}$ aus dem Ordnungsprinzip ableitbar ist[23]).

Wie in Einleitung bemerkt, gelten die zwei vorangehenden Sätze nur unter der Voraussetzung, daß die v. Neumannsche Mengenlehre widerspruchsfrei ist. Wir wollen noch zum Schluß einiges darüber sagen, wie man diese Voraussetzung durch eine schwächere, z. B. die der Widerspruchsfreiheit des Systems $\mathfrak{S}$, ersetzen könnte.

Es geht aus unserer Konstruktion unmittelbar hervor, daß der Aufbau des Modells nicht nur im v. Neumannschen System, sondern auch im System $\mathfrak{S}$ und manchen anderen Systemen (wie z. B. im System von Bernays) durchgeführt werden kann. Ebenso läßt sich das Haupttheorem in anderen Systemen mühelos nach dem Muster unseres § 3 beweisen. Etwas anders steht es mit Sätzen aus § 4. Im Beweis von **107** haben wir vom Auswahlaxiom wesentlich Gebrauch gemacht und es ist allem Anschein nach unmöglich, Satz **107** ohne Benutzung dieses Axioms zu beweisen[24]). Der Beweis von **107** läßt sich also wahrscheinlich auf dem Boden des Systems $\mathfrak{S}$ nicht durchführen. Wenn wir aber das System $\mathfrak{S}$ durch Hinzufügung des Auswahlaxioms erweitern, so lassen sich auf dem Boden des so entstandenen Systems $\mathfrak{S}'$ alle Ausführungen der vorigen §§ genau wiederholen. Satz I und Korollar II gelten also unter der Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit des Systems $\mathfrak{S}'$. Nun folgt, wie Gödel in seinen am Ende der Einleitung erwähnten Vorlesungen bewiesen hat[25]), die Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{S}'$ aus der Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{S}$. Somit wird die Gültigkeit des Satzes I und Korollars II schon durch die Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{S}$ (oder von System von Bernays) gesichert.

Anstatt des Systems $\mathfrak{S}$ könnte man auch andere Systeme der Mengenlehre zu Grunde legen und entsprechende Ergebnisse erhalten. Hierher gehören z. B. Systeme von Quine[26]) oder

[23]) Diese Bemerkung rührt von Kuratowski her. Vgl. A. Tarski, *Sur les ensembles finis*. Fund. Math. **6** (1924), S. 46–95; vgl. Fußnote[2]) auf der Seite 82.

[24]) Diese Frage ist lose mit dem anscheinend sehr schwierigen Problem verbunden, ob das Auswahlaxiom auch in solchen Systemen unabhängig ist, die die Existenz von „Urelementen" nicht zulassen.

[25]) Vgl. K. Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis*. Proc. Nat. Acad. Sc. **24** (1938), S. 556–557.

[26]) Vgl. W. V. Quine, *Set-theoretic Foundation for Logic*. Journal of Symb. Logic **1** (1936), S. 45–57.

Skolem[27]), die weniger Grundbegriffe als $\mathfrak{S}$ haben, sich aber dafür nicht auf endlich viele Axiome stützen; infolgedessen ist der Beweis in bezug auf solche Systeme keineswegs eine genaue Wiederholung des vorangehenden; um ihn durchzuführen, muß man vielmehr mehrere Beweismethoden der modernen Metamathematik in Betracht ziehen[28]).

[27]) Vgl. T. Skolem, *Über einige Grundlagenfragen der Mathematik*. Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps Akademi i Oslo. I. Mat.-Nat. Kl. (1929), nr **4**.

[28]) Vgl. hiezu meine unter [14]) angeführte Arbeit sowie die unter [13]) zitierte Mitteilung.

Sur quelques transformations biunivoques de la droite en elle-même.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

Comme j'ai démontré[1]), si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une fonction biunivoque $f(x)$ transformant la droite en elle-même qui transforme chaque ensemble E de mesure nulle en ensemble $f(E)$ de I-e catégorie et dont la fonction inverse $f^{-1}(x)$ transforme, réciproquement, tout ensemble E de I-e catégorie en ensemble $f^{-1}(E)$ de mesure nulle.

Une telle fonction $f(x)$ ne peut pas être mesurable. En effet:

(1) *Si $f(x)$ est une fonction mesurable (d'une variable réelle), il existe un ensemble N de mesure nulle, tel que le complémentaire de l'ensemble $f(N)$ (par rapport à la droite) est de I-e catégorie*[2]).

Donc, si la fonction mesurable $f(x)$ transforme chaque ensemble de mesure nulle en un ensemble de I-e catégorie, elle transforme aussi toute la droite en un ensemble de I-e catégorie et par conséquent ne peut pas transformer d'une façon biunivoque la droite en elle-même.

Or, je vais démontrer ce

Théorème 1. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une fonction mesurable $f(x)$ qui transforme d'une façon biunivoque la droite en elle-même en transformant tout ensemble de I-e catégorie en un ensemble de mesure nulle.*

[1]) W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne **4**, Warszawa-Lwów 1934, p. 77; v. aussi ma Note dans Fund. Math. **27** (1936), p. 276.

[2]) Cf. loc. cit., p. 83, lemme 2, dont (1) est une conséquence immédiate.