Renvois.

[1]) $\mathcal{X}$ est dit un *rétracte* de $\mathcal{Y}\supset\mathcal{X}$ lorsqu'il existe une fonction continue $r\epsilon\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$ telle que $r(\mathcal{Y})\subset\mathcal{X}$ et $r(x)=x$ pour $x\epsilon\mathcal{X}$ (le symbole $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$ désignant l'espace des fonctions continues f pour lesquelles $f(\mathcal{X})\subset\mathcal{X}$). $\mathcal{X}$ est dit un *rétracte absolu* lorsque $\mathcal{X}$ est un rétracte de chaque espace (métrique séparable) $\mathcal{Y}\supset\mathcal{X}$ dans lequel $\mathcal{X}$ est fermé; voir K. Borsuk, Fund. Math. **17** (1931), p. 159, aussi C. Kuratowski, Fund. Math. **24** (1935), p. 269.

[2]) M. Wojdysławski, Fund. Math. **30** (1938), p. 247.

[3]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne **1**, Warszawa-Lwów 1932, p. 53.

[4]) c. à d. l'ensemble des points $a_1A_{i_1}+a_2A_{i_2}+\ldots+a_rA_{i_r}$ où $a_i\geqslant0$, $a_1+a_2+\ldots+a_r=1$ et $S_i=(A_{i_1},A_{i_2},\ldots,A_{i_r})$. On voit aisément que $\delta(\Delta_i)\leqslant2\delta(S_i)$, où $\delta(X)$ désigne le diamètre de X.

[5]) c. à d. contenant, pour tout couple A_1,A_2 de ses points, tous les points $aA_1+(1-a)A_2$ où $0\leqslant a\leqslant1$. Le plus petit ensemble convexe contenant un sous-ensemble $\mathcal{X}$ d'un espace vectoriel se compose évidemment des points $a_1A_1+a_2A_2+\ldots+a_rA_r$ où $A_i\epsilon\mathcal{X}$, $a_i\geqslant0$ et $a_1+a_2+\ldots+a_r=1$.

[6]) C. Kuratowski, Fund. Math. **24** (1935), p. 266, Th. 2.

[7]) Je dois ce lemme à M. S. Eilenberg. La première partie de la démonstration se trouve chez C. Kuratowski, Fund. Math. **25** (1935), p. 543.

[8]) c. à d. tel qu'il existe, pour tout couple $x_1,x_2\epsilon\mathcal{X}$, un point $x\epsilon\mathcal{X}$ pour lequel on a $|x_1-x|=|x_2-x|=\frac{1}{2}|x_1-x_2|$; Cf. K. Menger, Math. Ann. **100** (1928), p. 81.

[9]) T. Ważewski, Fund. Math. **4** (1923), p. 232. Cf. à ce propos aussi K. Borsuk et S. Mazurkiewicz, C. R. Soc. Sc. de Varsovie, **24** (1931), p. 149-152, et S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **18** (1932), p. 171.

Théorèmes d'addition concernant le groupe des transformations en circonférence [1]).

Par

S. Eilenberg et C. Kuratowski (Warszawa).

$\mathcal{X}$ étant un espace topologique (métrique p. ex.) et $\mathcal{Y}$ un groupe abelien topologique, $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ désigne le groupe des transformations continues de $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de $\mathcal{Y}$, l'addition des fonctions-éléments f_1 et f_2 de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ étant définie par la condition: $f=f_1+f_2$ signifie que, pour chaque $x\epsilon\mathcal{X}$, on a $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$. $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est évidemment un groupe abelien et la fonction identiquement égale à 0 est son élément neutre, désigné également par 0 [2]).

Soit Γ un sous-groupe de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ et soient A_0 et A_1 deux ensembles fermés tels que $\mathcal{X}=A_0+A_1$. A étant un des 4 ensembles A_0,A_1, $A_0\cdot A_1$ ou A_0+A_1, désignons par $\Psi(A)$ le groupe formé des éléments g de $\mathcal{Y}^A$ de la forme $g=f|A$ où $f\epsilon\Gamma$ (c. à d. des fonctions g qui admettent une extension sur $\mathcal{X}$ appartenant à Γ) [3]). Désignons par $\mathfrak{B}(A)$ le groupe-facteur $\mathcal{Y}^A/\Psi(A)$.

Nous établirons dans cette Note des théorèmes „d'addition" qui concernent le rapport du groupe $\mathfrak{B}(A_0+A_1)$ aux groupes $\mathfrak{B}(A_0)$, $\mathfrak{B}(A_1)$ et $\mathfrak{B}(A_0\cdot A_1)$.

---

[1]) Présenté à la Soc. Polon. de Math., Section de Varsovie, le 3. II. 1939.

[2]) En général, une fonction constante et la valeur de cette fonction seront désignées par le même symbole.

[3]) $f|A$ désigne la fonction partielle qui s'obtient de f en restreignant la variabilité de l'argument à l'ensemble A. En conséquence, pour $\Phi\subset\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, on désigne par $\Phi|A$ l'ensemble des $g\epsilon\mathcal{Y}^A$ de la forme $g=f|A$ où $f\epsilon\Phi$. De sorte que

$$\Psi(A)=\Gamma|A.$$

La correspondance entre f et $f|A$ étant une homomorphie (pour A fixe), si Φ est un groupe, $\Phi|A$ en est un également. En particulier, $\Psi(A)$ est un sous-groupe de $\mathcal{Y}^A$. Cf. C. Kuratowski, *Sur les espaces des transformations continues en certains groupes abeliens*, Fund. Math. **31** (1938), p. 233.

Ces théorèmes seront établis sans aucune hypothèse sur l'espace $\mathcal{X}$ et sur le groupe $\mathcal{Y}$. Cependant les deux cas suivants présentent un intérêt particulier:

cas 0) $\mathcal{Y}=\mathcal{G}=$groupe des nombres entiers, l'addition étant entendue au sens arithmétique, et $\Gamma=\mathcal{G}=$groupe des fonctions constantes;

cas 1)[4]) $\mathcal{Y}=\mathcal{S}=$groupe des nombres complexes z tels que $|z|=1$, en entendant par la composition de ses éléments la multiplication habituelle des nombres complexes, et $\Gamma=$groupe des fonctions homotopes à l'unité [5]); en conséquence, $\Psi(A)$ est le groupe des fonctions $g \epsilon \mathcal{S}^A$ homotopes à l'unité [6]).

Les groupes $\mathfrak{B}(A)$ qui correspondent à ces deux cas seront désignés respectivement par $\mathfrak{B}_0(A)$ et $\mathfrak{B}_1(A)$. Leur importance tient en particulier au fait qu'ils présentent une extension aux espaces arbitraires (non nécessairement compacts) des groupes (réduits) 0- et 1-dimensionnels de Betti. Pour les polytopes ces deux groupes de Betti sont en effet isomorphes resp. à $\mathfrak{B}_0(A)$ et $\mathfrak{B}_1(A)$ [7]).

Les théorèmes d'addition concernant les groupes $\mathfrak{B}_j(A_0+A_1)$, $j=0,1$, — qui forment le but de cette Note — correspondent ainsi aux théorèmes d'addition de Mayer-Vietoris concernant les groupes de Betti. Dans le cas particulier, considéré dans le N4, où $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble du plan, les théorèmes d'addition impliquent directement la „formule d'indices" de M. Straszewicz.

---

[4]) Voir N. Bruschlinsky, *Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3*, Math. Ann. **109** (1934), p. 525 et S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. **26** (1936), p. 61. Cf. aussi K. Borsuk, Fund. Math. **17** (1931), p. 171 ss.

[5]) Comme on voit, Γ peut être défini dans les deux cas comme le groupe des fonctions homotopes à des constantes (c. à d. qui se laissent réduire par une déformation continue à une constante).

[6]) Dans ces deux cas, les théorèmes des NN 1–3 restent valables en remplaçant l'hypothèse que A_0 et A_1 sont *fermés* par celle qu'ils sont *ouverts*. Cf. S. Eilenberg, Ann. Soc. Pol. Math. **18** (1939), séance du 10 mars. Cependant, dans le cas 1), l'égalité $\Psi(A)=\Gamma|A$ n'est en général vraie que si $A=\bar{A}$. En effet, les fonctions $g \epsilon \mathcal{S}^A$ homotopes à l'unité coïncident avec les fonctions de la forme $g(x)=e^{i\varphi(x)}$ où $\varphi \epsilon \mathcal{E}^A$ ($\mathcal{E}$ désignant l'espace des nombres réels); cf. S. Eilenberg, Fund. Math. **26**, p. 68. Or, A étant fermé, on a, d'après le théor. de M. Tietze, $\varphi=\psi|A$ où $\psi \epsilon \mathcal{E}^{\mathcal{X}}$; donc, en posant $f(x)=e^{i\psi(x)}$, il vient $g=f|A$ et $f \epsilon \Gamma$, d'où $g \epsilon \Psi(A)$.

[7]) Voir N. Bruschlinsky, l. c. Dans un certain sens, cette isomorphie est aussi valable pour A compact.

1. *Formules générales.* Nous écrivons $f \sim 0$, où $f \epsilon \mathcal{Y}^A$, pour exprimer que $f \epsilon \Psi(A)$, c. à d. que f appartient à l'élément neutre du groupe $\mathfrak{B}(A)$.

Considérons les 3 groupes auxiliaires définis comme suit:

1) le sous-groupe $\Pi(A_0,A_1)$ de $\mathcal{Y}^{A_0+A_1}$ tel que

$$\{f \epsilon \Pi(A_0,A_1)\} \equiv \{f|A_j \sim 0 \quad \text{pour} \quad j=0,1\},$$

2) le sous-groupe $\theta(A_0,A_1)$ de $\mathcal{Y}^{A_0 \cdot A_1}$ tel que [8])

$$\{f \epsilon \theta(A_0,A_1)\} \equiv \{f \text{ est de la forme } f=(f_0|A_0 \cdot A_1)-(f_1|A_0 \cdot A_1) \text{ où } f_j \epsilon \mathcal{Y}^{A_j}\},$$

3) le sous-groupe $\Lambda(A_0,A_1)$ du produit cartésien $\mathcal{Y}^{A_0} \times \mathcal{Y}^{A_1}$ tel que

$$\{(f_0,f_1) \epsilon \Lambda(A_0,A_1)\} \equiv \{(f_0|A_0 \cdot A_1)-(f_1|A_0 \cdot A_1) \sim 0\}.$$

Cette dernière condition peut être remplacée par la suivante:

Il existe un $f \epsilon \mathcal{Y}^{A_0+A_1}$ *tel que* $f_j - f|A_j \sim 0$ *pour* $j=0,1$.

Car, d'une part, les formules $f_j - f|A_j \sim 0$, où $j=0,1$, entraînent $f_0|A_0 \cdot A_1 - f|A_0 \cdot A_1 \sim 0 \sim f_1|A_0 \cdot A_1 - f|A_0 \cdot A_1$, d'où $f_0|A_0 \cdot A_1 - f_1|A_0 \cdot A_1 \sim 0$.

D'autre part, si $f_0|A_0 \cdot A_1 - f_1|A_0 \cdot A_1 \sim 0$, il existe un $g \epsilon \Gamma$ tel que $f_0(x)-f_1(x)=g(x)$ pour $x \epsilon A_0 \cdot A_1$, et la fonction f peut être définie en posant $f(x)=f_0(x)$ pour $x \epsilon A_0$ et $f(x)=f_1(x)+g(x)$ pour $x \epsilon A_1$.

En tenant compte des inclusions évidentes:

$$\Psi(A_0+A_1) \subset \Pi(A_0,A_1), \quad \Psi(A_0 \cdot A_1) \subset \theta(A_0,A_1) \quad \text{et} \quad \Psi(A_0) \times \Psi(A_1) \subset \Lambda(A_0,A_1),$$

considérons les 3 groupes-facteurs suivants:

$$\mathfrak{P}(A_0,A_1)=\Pi(A_0,A_1)/\Psi(A_0+A_1), \qquad \mathfrak{D}(A_0,A_1)=\theta(A_0,A_1)/\Psi(A_0 \cdot A_1),$$
$$\mathfrak{L}(A_0,A_1)=\Lambda(A_0,A_1)/[\Psi(A_0) \times \Psi(A_1)],$$

et désignons leurs rangs [9]) par $p(A_0,A_1)$, $d(A_0,A_1)$ et $l(A_0,A_1)$ resp.

---

[8]) X désignant un sous-ensemble d'un groupe U donné, $\widehat{X}$ désigne le plus petit groupe contenant X. En posant $\Delta_j=\mathcal{Y}^{A_j}|A_0 \cdot A_1$, on a

$$\theta(A_0,A_1)=\widehat{\Delta_0+\Delta_1}.$$

Cf. C. Kuratowski, l. c. p. 237.

[9]) Le *rang* d'un groupe est le nombre maximum d'éléments linéairement indépendants. Dans toutes les formules où il s'agit du rang, les groupes sont supposés de rang fini.

On a les deux *théorèmes d'isomorphie* suivants:

$$\text{I} \quad \frac{\mathcal{Y}^{A_0}\times\mathcal{Y}^{A_1}}{\varLambda(A_0,A_1)} \underset{\mathrm{gr}}{=} \frac{\theta(A_0,A_1)}{\varPsi(A_0\cdot A_1)} \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathfrak{B}(A_0)\times\mathfrak{B}(A_1)}{\mathfrak{L}(A_0,A_1)} \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathfrak{D}(A_0,A_1).$$

$$\text{II} \quad \frac{\mathcal{Y}^{A_0+A_1}}{\varPi(A_0,A_1)} \underset{\mathrm{gr}}{=} \frac{\varLambda(A_0,A_1)}{\varPsi(A_0)\times\varPsi(A_1)} \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathfrak{B}(A_0+A_1)}{\mathfrak{P}(A_0,A_1)} \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathfrak{L}(A_0,A_1).$$

Ces isomorphies s'obtiennent en effet, en posant [10]):

$$h_1(f_0,f_1)=(f_0|A_0A_1)-(f_1|A_0A_1) \quad \text{où} \quad f_j\in\mathcal{Y}^{A_j},$$
$$h_2(f)=(f|A_0,f|A_1) \quad \text{où} \quad f\in\mathcal{Y}^{A_0+A_1}.$$

Les isomorphies I et II impliquent la formule suivante [11])

$$(1) \qquad b(A_0+A_1)=b(A_0)+b(A_1)+p(A_0,A_1)-d(A_0,A_1).$$

Dans le cas particulier où $A_0\cdot A_1=0$, la fonction h_2 donne lieu aux isomorphies:

$$\mathcal{Y}^{A_0+A_1}\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathcal{Y}^{A_0}\times\mathcal{Y}^{A_1} \quad \text{et} \quad \varPi(A_0,A_1)\underset{\mathrm{gr}}{=}\varPsi(A_0)\times\varPsi(A_1).$$

---

[10]) Nous nous appuyons sur le théorème général suivant: soient U et U_1 deux groupes abeliens, V et V_1 deux sous-groupes de U et de U_1 resp. et h une fonction qui fait correspondre à chaque u de U un $h(u)$ de U_1 de façon que:

1° $\{u\in V\}\equiv\{h(u)\in V_1\}$,

2° $h(u+u')-[h(u)+h(u')]$ appartient à V_1,

3° à chaque $u_1\in U_1$ correspond un $u\in U$ tel que $[u_1-h(u)]\in V_1$;

en faisant correspondre à chaque élément X du groupe-facteur U/V l'élément $H(X)$ du groupe-facteur U_1/V_1 tel que $h(u)\in H(X)$, où $u\in X$, H est une isomorphie entre ces deux groupes-facteurs.

Dans le cas considéré dans le texte, c. à d. où

$$U=\mathcal{Y}^{A_0}\times\mathcal{Y}^{A_1}, \quad U_1=\theta(A_0,A_1), \quad V=\varLambda(A_0,A_1) \quad \text{et} \quad V_1=\varPsi(A_0\cdot A_1),$$

on constate directement que h_1 vérifie les conditions 1°–3° (il en est de même de h_2).

Pour établir les deuxièmes parties de I et II, on tient compte du fait que, $W\subset V$ étant deux sous-groupes d'un groupe abelien U, on a $\dfrac{U}{V}\underset{\mathrm{gr}}{=}\dfrac{U/W}{V/W}$. Voir p. ex. C. Kuratowski, l. c., p. 236 et 238.

[11]) Cette formule correspond à celle de M. W. Mayer, Mon. f. Math. u. Phys. **36** (1929), p. 40.

Nous nous appuyons sur la formule: $\operatorname{rang}(U/V)=\operatorname{rang}U-\operatorname{rang}V$.

2. *Cas où la relation $f\sim 0$ équivaut à $f=\mathrm{const.}$*

On peut poser dans ce cas $\varPsi(A)=\mathcal{Y}$, si $A\neq 0$ (cf. renvoi 2).

1. *Si* $A_0\cdot A_1\neq 0$, *ou bien si* $A_0=0$ *ou* $A_1=0$, *on a*

$$\varPi(A_0,A_1)=\varPsi(A_0+A_1), \quad \textit{donc} \quad \mathfrak{P}(A_0,A_1)=(0) \quad \textit{et} \quad p(A_0,A_1)=0.$$

2. *Si* $A_0\cdot A_1=0$ *et* $A_0\neq 0\neq A_1$, *on a*

$$\mathfrak{P}(A_0,A_1)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathcal{Y}, \quad \textit{donc} \quad p(A_0,A_1)=\operatorname{rang}(\mathcal{Y}).$$

Soit, en effet, $A_0\neq 0$ et désignons par $\varXi$ le groupe des fonctions $f\in\mathcal{Y}^{A_0+A_1}$ telles que $f|A_0\sim 0$ et $f|A_1=0$. Pour établir l'isomorphie $\varXi\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{P}(A_0,A_1)$, il suffit (en vertu du renvoi 10, p. 196) d'observer que, si $f\in\varPi(A_0,A_1)$, la fonction $g\in\varXi$ définie par les conditions: $g|A_0=f(A_0)-f(A_1)$ et $g|A_1=0$, satisfait à l'égalité $f-g=f(A_1)$, d'où $(f-g)\in\varPsi(A_0+A_1)$.

Comme $\varXi\underset{\mathrm{gr}}{=}\varPsi(A_0)=\mathcal{Y}$, il vient $\mathfrak{P}(A_0,A_1)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathcal{Y}$.

3. *Cas où $\mathcal{Y}=\mathcal{G}$ resp. $\mathcal{Y}=\mathcal{S}$.* Dans le premier cas, nous poserons $\varPsi(A)=\mathcal{G}$ (pour $A\neq 0$) et dans le deuxième, $\varPsi(A)$ désignera le groupe des fonctions $f\in\mathcal{S}^A$ homotopes à l'unité (cf. introduction, p. 194). Les groupes (ainsi que leurs rangs) définis dans le N 1 seront munis de l'indice 0 resp. 1, suivant qu'il s'agit du cas $\mathcal{Y}=\mathcal{G}$ ou du cas $\mathcal{Y}=\mathcal{S}$; ainsi, p. ex., $\varPsi_0(A)=\mathcal{G}$, $\mathfrak{B}_1(A)=\mathcal{S}^A/\varPsi_1(A)$, $b_0(A)$ est le rang du groupe $\mathfrak{B}_0(A)$, c. à d. — pour $A\neq 0$ — le nombre des composantes de A diminué de 1, $b_1(A)$ est le premier nombre de Betti (si A est un polytope) etc. [12]).

Selon I et le th 2 du N 2, on a, pour $j=0,1$, les isomorphies:

$$\text{I}_j \quad \frac{\mathfrak{B}_j(A_0)\times\mathfrak{B}_j(A_1)}{\mathfrak{L}_j(A_0,A_1)}\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{D}_j(A_0,A_1), \qquad \text{II}_j \quad \frac{\mathfrak{B}_j(A_0+A_1)}{\mathfrak{P}_j(A_0,A_1)}\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{L}_j(A_0,A_1),$$

$$\text{II}_0' \qquad \textit{Si} \quad A_0\cdot A_1\neq 0, \quad \mathfrak{B}_0(A_0+A_1)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{L}_0(A_0,A_1),$$

d'où en vertu de I_0:

$$(2) \qquad b_0(A_0+A_1)=b_0(A_0)+b_0(A_1)-d_0(A_0,A_1).$$

---

[12]) Rappelons que les groupes $\mathfrak{B}_0(A)$ et $\mathfrak{B}_1(A)$ *ne contiennent pas d'élément d'ordre fini* (cf. S. Eilenberg, Fund. Math. **26**, p. 89). On en conclut facilement qu'il en est de même des groupes $\mathfrak{P}_j(A_0,A_1)$, $\mathfrak{D}_j(A_0,A_1)$ et $\mathfrak{L}_j(A_0,A_1)$.

Les cas $j=0$ et $j=1$ sont liés par l'isomorphie [13])

$$\text{III} \quad \frac{\Pi_1(A_0,A_1)}{\Psi_1(A_0+A_1)} \underset{\text{gr}}{=} \frac{\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}}{\theta_0(A_0,A_1)} \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{P}_1(A_0,A_1) \underset{\text{gr}}{=} \frac{\mathfrak{B}_0(A_0\cdot A_1)}{\mathfrak{D}_0(A_0,A_1)},$$

qui implique l'égalité

$$p_1(A_0,A_1)=b_0(A_0\cdot A_1)-d_0(A_0,A_1)\ ^{14)}. \tag{3}$$

Les formules (1), (2) et (3) entraînent que

Si $A_0\cdot A_1 \neq 0$, *on a*

$$\begin{aligned} & b_1(A_0+A_1)+d_1(A_0,A_1)-b_1(A_0)-b_1(A_1)= \\ & =b_0(A_0+A_1)+b_0(A_0\cdot A_1)-b_0(A_0)-b_0(A_1); \end{aligned} \tag{4}$$

donc, en posant $\operatorname{ind}(A)=b_0(A)-b_1(A)$ [15]), il vient

$$\operatorname{ind}(A_0+A_1)+\operatorname{ind}(A_0\cdot A_1)=\operatorname{ind}(A_0)+\operatorname{ind}(A_1)-b_1(A_0\cdot A_1)+d_1(A_0,A_1). \tag{5}$$

Si $A_0\cdot A_1=0$, *on a*

$$\mathfrak{B}_1(A_0+A_1) \underset{\text{gr}}{=} \mathfrak{B}_1(A_0)\times\mathfrak{B}_1(A_1) \quad \text{d'où} \quad b_1(A_0+A_1)=b_1(A_0)+b_1(A_1), \tag{6}$$

car on a, dans ce cas $\mathcal{Y}^{A_0\cdot A_1}=(0)$, d'où $\mathfrak{B}_0(A_0\cdot A_1)=(0)$, donc selon III, $\mathfrak{P}_1(A_0,A_1)=(0)$ et, comme $\mathfrak{D}_1(A_0,A_1)=(0)$, l'isomorphie demandée résulte de I_1 et II_1.

Si $A_0\cdot A_1=0$ *et* $A_0\neq 0 \neq A_1$, *on a évidemment*

$$b_0(A_0+A_1)=b_0(A_0)+b_0(A_1)+1. \tag{7}$$

Considérons à présent le cas où *chaque fonction* $f\in\mathcal{S}^{A_0+A_1}$ *est homotope à l'unité* [16]), c. à d. où $\mathcal{S}^{A_0+A_1}=\Psi_1(A_0+A_1)$ (donc où $b_1(A_0+A_1)=0$). Il vient $\Pi_1(A_0,A_1)=\Psi_1(A_0+A_1)$. Le groupe $\mathfrak{P}_1(A_0,A_1)$ se réduit par conséquent à l'élément neutre, d'où selon III

$$\theta_0(A_0,A_1)=\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1} \quad \text{donc} \quad d_0(A_0,A_1)=b_0(A_0\cdot A_1),$$

d'où selon (2): $b_0(A_0+A_1)=b_0(A_0)+b_0(A_1)-b_0(A_0\cdot A_1)$ si $A_0\cdot A_1\neq 0$.

[13]) Théor. 3, p. 239, de la note citée de M. Kuratowski (où le groupe $\mathfrak{P}_1(A_0,A_1)$ est désigné par $\mathfrak{B}_1(A_0,A_1)$ et où $A_j=\bar{A}_j$).

[14]) Les th. I–III correspondent aux formules de M. L. Vietoris, Mon. f. Math. u. Phys. **37** (1930), p. 162. Cf. Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, Berlin 1935, ch. VII, §2; les groupes $N^j(A_0\cdot A_1)$ et $S^j(A_0+A_1)$ („Nahtzyklen" et „Summenzyklen") réduits sont isomorphes respectivement aux groupes $\mathfrak{B}_j(A_0\cdot A_1)/\mathfrak{D}_j(A_0,A_1)$ et $\mathfrak{B}_j(A_0+A_1)/\mathfrak{P}_j(A_0,A_1)$. Cf. aussi E. Čech, Fund. Math. **19** (1932), p. 149.

[15]) Si tous les nombres de Betti d'un polytope A s'annulent à partir du deuxième, $\operatorname{ind}(A)$ coïncide avec la caractéristique d'Euler-Poincaré.

[16]) Pour les espaces connexes et localement connexes, cette hypothèse équivaut à *l'unicohérence* de l'espace.

Les formules précédentes deviennent bien plus simples en supposant que les ensembles considérés sont *connexes*. En effet, si A est connexe ($\neq 0$), on a $\mathcal{G}^A=\mathcal{G}$; si les deux ensembles A_j, $j=0,1$, sont connexes, on a $\theta_0(A_0,A_1)=\mathcal{G}$, d'où selon III,

$$\mathfrak{P}_1(A_0,A_1) \underset{\text{gr}}{=} \frac{\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}}{\mathcal{G}} = \mathfrak{B}_0(A_0\cdot A_1).$$

4. *Cas où* $A_0+A_1\subset\mathcal{S}_2$. Admettons à présent que l'ensemble $\mathcal{X}=A_0+A_1$ est un sous-ensemble (arbitraire) de la surface sphérique $\mathcal{S}_2$, définie par l'équation $x^2+y^2+z^2=1$. Les ensembles A_0 et A_1 sont fermés dans $\mathcal{X}$ par hypothèse.

1. *Si* $A_0+A_1\neq\mathcal{S}_2$ *et* $A_0\cdot A_1$ *est compact, on a*

$$\theta_1(A_0,A_1)=\mathcal{S}^{A_0\cdot A_1} \quad \textit{d'où} \quad d_1(A_0,A_1)=b_1(A_0\cdot A_1)$$

et, par conséquent, si $A_0\cdot A_1\neq 0$, *on a d'après* (4)

$$\begin{aligned} & b_1(A_0+A_1)+b_1(A_0\cdot A_1)-b_1(A_0)-b_1(A_1)= \\ & =b_0(A_0+A_1)+b_0(A_0\cdot A_1)-b_0(A_0)-b_0(A_1). \end{aligned} \tag{8}$$

$$\operatorname{ind}(A_0+A_1)+\operatorname{ind}(A_0\cdot A_1)=\operatorname{ind}(A_0)+\operatorname{ind}(A_1). \tag{9}$$

Soit, en effet, $p_0,p_1,\ldots$ une suite (finie ou infinie) contenant précisément un point de chaque composante de $\mathcal{S}_2-A_0\cdot A_1$; admettons en outre que $p_0\in\mathcal{S}_2-(A_0+A_1)$. L'ensemble $A_0\cdot A_1$ étant fermé (dans $\mathcal{S}_2$), il existe une suite de fonctions $r_1,r_2,\ldots$ telles que $r_n\in\mathcal{S}^{\mathcal{S}_2-(p_0,p_n)}$ et qu'à chaque $f\in\mathcal{S}^{A_0\cdot A_1}$ correspond un système d'entiers $l,k_1,k_2,\ldots,k_l$ et une fonction $g\in\mathcal{S}^{A_0+A_1}$, assujettis à la condition:

$$f(x)=g(x)\cdot r_1^{k_1}(x)\cdot\ldots\cdot r_l^{k_l}(x) \quad \text{pour} \quad x\in A_0\cdot A_1\ ^{17)}.$$

L'identité $\mathcal{S}_2-A_0\cdot A_1=(\mathcal{S}_2-A_0)+(\mathcal{S}_2-A_1)$ implique que chaque point p_n appartient soit à $\mathcal{S}_2-A_0$, soit à $\mathcal{S}_2-A_1$. On peut donc admettre qu'il existe un $m\leqslant l$ tel que, pour $n\leqslant m$, on a $p_n\in\mathcal{S}_2-A_0$ et, pour $n>m$, $p_n\in\mathcal{S}_2-A_1$; de sorte que

$$A_0\subset\mathcal{S}_2-(p_0,p_1,\ldots,p_m) \quad \text{et} \quad A_1\subset\mathcal{S}_2-(p_0,p_{m+1},\ldots,p_l).$$

En posant $f_0=g\cdot r_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot r_m^{k_m}$ et $f_1=r_{m+1}^{k_{m+1}}\cdot\ldots\cdot r_l^{k_l}$, on a donc $f=(f_0|A_0\cdot A_1)\cdot(f_1|A_0\cdot A_1)$ où $(f_j|A_j)\in\mathcal{S}^{A_j}$. Par suite $f\in\theta_1(A_0,A_1)$. Donc $\mathcal{S}^{A_0\cdot A_1}\subset\theta_1(A_0,A_1)$, d'où $\theta_1(A_0,A_1)=\mathcal{S}^{A_0\cdot A_1}$.

[17]) Plus précisément: g est homotope à 1. Voir S. Eilenberg, l. c. p. 91 (lemme). Si $S_2-A_0\cdot A_1$ est connexe, on pose $l=0$, de sorte que $f(x)=g(x)$.

2. *Si* $A_0\cdot A_1 \neq 0 \neq \mathcal{S}_2-(A_0+A_1)$ *et si les ensembles* A_0 *et* A_1 *sont fermés* (*dans* $\mathcal{S}_2$), *on a, en posant* $B_j=\mathcal{S}_2-A_j$,

$$b_0(B_0+B_1)+b_0(B_0\cdot B_1)-b_0(B_0)-b_0(B_1)=$$
$$=b_0(A_0+A_1)+b_0(A_0\cdot A_1)-b_0(A_0)-b_0(A_1)$$ [18].

C'est une conséquence de la formule (8) rapprochée du théorème de dualité suivant [19]):

(10) $$si\ \ F=\overline{F},\ \ on\ a\ \ b_1(F)=b_0(\mathcal{S}_2-F).$$

Remarques. (α) Le th. 1 du N 4 reste vrai en remplaçant l'hypothèse que $A_0\cdot A_1$ est compact par celle que $A_0\cdot A_1$ *est un ensemble localement connexe qui coupe* $\mathcal{S}_2$ *en un nombre fini de constituants* [20]). Si, en outre, les ensembles A_0 et A_1 sont des ensembles localement connexes de ce genre, on peut remplacer dans la formule (8) $b_1(A)$ par le nombre des constituants de $\mathcal{S}_2-A$ diminué de l'unité [21]).

(β) A_0 *et* A_1 *étant fermés dans* $\mathcal{S}_2$ *et tels que* $A_0+A_1 \neq \mathcal{S}_2$, *on a*

(11) $$b_1(A_0\cdot A_1)=b_1(A_0)+b_1(A_1)-d_0(\mathcal{S}_2-A_0,\mathcal{S}_2-A_1).$$

Posons, en effet, $B_j=\mathcal{S}_2-A_j$. D'après (2) (cf. p. 194, renvoi 6), on a

$$b_0(B_0+B_1)=b_0(B_0)+b_0(B_1)-d_0(B_0,B_1),$$

d'où la formule demandée en vertu de (10).

(γ) *Dans les hypothèses du th.* 2 (N 4), *on a*

(12) $$b_0(A_0\cdot A_1)-d_0(A_0,A_1)=b_0(B_0\cdot B_1)-d_0(B_0,B_1).$$

Car, d'après (1), (3) et N 4, 1, on a

$$b_1(A_0+A_1)=b_1(A_0)+b_1(A_1)+b_0(A_0\cdot A_1)-d_0(A_0,A_1)-b_1(A_0\cdot A_1),$$

d'où la formule demandée en vertu de (11) et de l'égalité $b_1(A_0+A_1)=b_0(B_0\cdot B_1)$, qui résulte de (10).

---

[18]) C'est la „formule d'indices" de M. Straszewicz, Fund. Math. **7** (1925), p. 184. Cf. aussi S. Eilenberg, l. c. p. 101.

[19]) S. Eilenberg, l. c. p. 93, th. 2.

[20]) En vertu du lemme 6, p. 105 ibid. (un *constituant* est un semicontinu saturé).

[21]) En vertu du th. 20, p. 106 ibid.

Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip.

Von

Andrzej Mostowski (Warszawa).

In der vorliegenden Arbeit wird das (von Fraenkel herrührende) Problem der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von dem sog. Ordnungsprinzip betrachtet [1]).

Dem formalen Beweis schicken wir einige einleitende Bemerkungen voraus, die das Verständnis der folgenden Erwägungen erleichtern mögen.

Unter axiomatischen Systemen, die eine Formalisierung und Erweiterung der Zermeloschen Mengenlehre darstellen, lassen sich bekanntlich zwei Arten von Systemen unterscheiden. Zu der ersten gehören Systeme, die die Existenz von sog. Urelementen, d. h. Dingen, die keine Mengen sind, ausschließen, zur zweiten dagegen Systeme, auf Grund deren die Existenz von unendlich vielen solchen Urelementen beweisbar ist oder wenigstens als widerspruchsfrei erwiesen werden kann [2]). Beide Gruppen enthalten Systeme, die einen formalen Aufbau der verschiedenen Teile der Mengenlehre gestatten: im System von Zermelo [3]) z. B. läßt sich die Theorie der Mengen von einer Mächtigkeit $<\aleph_0+2^{\aleph_0}+2^{2^{\aleph_0}}+\ldots$ aufbauen, auf dem Boden des Systems von Fraenkel [4]) oder von v. Neumann [5]) kann schon

---

[1]) Vgl. A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre* (3. Aufl., Berlin 1928), S. 320.

[2]) Vgl. E. Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche*. Fund. Math. **16** (1929), S. 29–47.

[3]) Vgl. E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*. Math. Ann. **65** (1908), S. 261–281.

[4]) Vgl. das unter [1]) zitierte Buch von Fraenkel, §16.

[5]) Vgl. J. v. Neumann, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*. Math. Zeitschrift **27** (1928), S. 669 f.