Rétractes absolus et hyperespaces des continus.

Par

M. Wojdysławski (Warszawa).

1. Je me propose d'etablir dans cet article quelques conditions générales pour qu'un espace métrique séparable $\mathfrak{X}$ soit un rétracte absolu[1]) et d'en déduire que, *$\mathfrak{X}$ étant un continu localement connexe, l'espace $2^{\mathfrak{X}}$ (c.à d. l'espace de ses sous-ensembles fermés) est un rétracte absolu.* C'est une généralisation de mon résultat antérieur[2]), sur lequel j'aurai à m'appuyer partiellement. Enfin, je démontrerai de certains sous-ensembles de $2^{\mathfrak{X}}$, p.ex. du sous-ensemble composé de tous les sous-continus de $\mathfrak{X}$, qu'ils sont également des rétractes absolus.

2. Posons dans l'espace H de Hilbert (c. à d. dont les points sont les suites infinies $\Lambda=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\dots)$ de nombres réels telles que $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\lambda^{(i)})^2<+\infty$):

$$a\Lambda=(a\lambda^{(1)},a\lambda^{(2)},\dots),\qquad \Lambda'+\Lambda''=(\lambda^{(1)\prime}+\lambda^{(1)\prime\prime},\lambda^{(2)\prime}+\lambda^{(2)\prime\prime},\dots),$$

et admettons y comme norme le nombre

$$|\Lambda|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda^{(i)})^2}.$$

H devient ainsi un espace vectoriel normé[3]), séparable et complet.

Désignons par Λ_m où $m=1,2,\dots$ le point $(\lambda_m^{(1)},\lambda_m^{(2)},\dots)$ de H tel que $\lambda_m^{(m)}=1$ et $\lambda_m^{(n)}=0$ pour $n\neq m$. Soient en outre:

$S_1,S_2,\dots$ la suite de tous les ensembles finis distincts formés de termes de la suite $\Lambda_1,\Lambda_2,\dots$;

Δ_i le simplexe[4]) ayant S_i pour l'ensemble des sommets;

L le plus petit ensemble convexe[5]) contenant la suite $\Lambda_1,\Lambda_2,\dots$

On a évidemment $L=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_i$.

3. Soit $\mathfrak{X}$ un espace métrique séparable quelconque. Appelons une fonction g *barycentrique pour* $\mathfrak{X}$ lorsque $g(L)\subset\mathfrak{X}$ et que:

(3.1) la suite $g(\Lambda_1),g(\Lambda_2),\dots$ est dense dans $\mathfrak{X}$,

(3.2) la fonction g est continue dans tout Δ_i,

(3.3) $x\in\mathfrak{X}$ et $\lim\limits_{k=\infty}g(S_{i_k})=x$ entraînent $\lim\limits_{k=\infty}g(\Delta_{i_k})=x$ pour toute suite $i_1,i_2,\dots$ d'indices.

4. ***Théorème I.*** *Pour que $\mathfrak{X}$ soit un rétracte absolu, il faut et il suffit qu'il existe une fonction barycentrique pour $\mathfrak{X}$.*

Démonstration. Pour montrer que la condition est suffisante, admettons que $\mathcal{Y}\supset\mathfrak{X}$ et que $\mathfrak{X}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{Y}$. Il existe alors[6]):

1° un espace $\mathcal{Y}^*\supset\mathfrak{X}$ tel que $\mathfrak{X}$ est fermé dans $\mathcal{Y}^*$ et que $P=\mathcal{Y}^*-\mathfrak{X}$ est un polytope infini[6]),

2° une fonction continue $f(\mathcal{Y})\subset\mathcal{Y}^*$ telle que $f(x)=x$ pour $x\in X$.

Envisageons une division simpliciale du polytope P; on peut évidemment admettre que les simplexes de cette division forment une suite aux diamètres tendant vers 0. Désignons par $p_1,p_2,\dots$ la suite de tous les sommets de la division en question. Tout point $p\in P$ se laisse alors représenter, et d'une seule manière, dans la forme

$$p=a_1p_1+a_2p_2+\dots+a_rp_r \quad \text{où} \quad a_l\geqslant 0 \quad \text{et} \quad a_1+a_2+\dots+a_r=1. \tag{4.1}$$

Pour chaque p_i, il existe en vertu de (3.1) un $g(\Lambda_{m_i})$ tel que

$$|p_i-g(\Lambda_{m_i})|\leqslant 2\inf_{x\in\mathfrak{X}}|p_i-x|. \tag{4.2}$$

Posons pour tout point (4.1) de P:

$$\Lambda(p)=a_1\Lambda_{m_1}+a_2\Lambda_{m_2}+\dots+a_r\Lambda_{m_r}. \tag{4.3}$$

On voit aisément que la transformation $\Lambda(P)\subset L$ est continue. Posons:

$$r(x)=x \qquad \text{pour} \quad x\in\mathfrak{X},$$
$$r(p)=g[\Lambda(p)] \qquad \text{pour} \quad p\in P$$

et soit Δ^* un simplexe quelconque du polytope P. En vertu de (4.1) et (4.3), $\Lambda(\Delta^*)$ est un des simplexes Δ_i, ce qui entraîne, en vertu de (3.2), la continuité de r sur Δ^*.

Comme $\Delta(p_i)=\Delta_{m_l}$ selon (4.1) et (4.3), on a $r(p_i)=g(\Delta_{m_l})$; donc, en vertu de (4.2), la continuité de r sur $\mathfrak{X}+(p_1,p_2,\ldots)$ est établie.

Soit à présent $x_k\epsilon P$, $\lim\limits_{k=\infty}x_k=x$ et $x\epsilon\mathfrak{X}$. En désignant par Δ_k^* un simplexe de P qui contient x_k, on a donc $\lim\limits_{k=\infty}\Delta_k^*=x$. Si l'on désigne maintenant par Δ_{i_k} le simplexe $\Delta(\Delta_k^*)$, on aura $\lim\limits_{k=\infty}g(S_{i_k})=x$, d'où en vertu de (3.3) $\lim\limits_{k=\infty}g(\Delta_{i_k})=x$, puisque $\lim\limits_{k=\infty}\delta(\Delta_k^*)=0$ par hypothèse. Par conséquent $\lim r(\Delta_k^*)=x$, donc à plus forte raison $\lim\limits_{k=\infty}r(x_k)=x$, ce qui entraîne la continuité de r sur $\mathcal{Y}^*$. La fonction r est donc une rétraction de $\mathcal{Y}^*$ en $\mathfrak{X}$, de sorte que la fonction $f_1=rf$ en est une de $\mathcal{Y}$ en $\mathfrak{X}$.

La nécessité de la condition résulte des propositions **5**–**7** qui suivent.

5. *$\mathcal{Y}$ étant un sous-ensemble séparable et convexe d'un espace vectoriel normé, il existe une fonction barycentrique pour $\mathcal{Y}$.*

En effet, $p_1,p_2,\ldots$ étant une suite dense dans $\mathcal{Y}$, la fonction

$$g(a_1\Delta_1+a_2\Delta_2+\ldots+a_r\Delta_r)=a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_rp_r$$

est barycentrique pour $\mathcal{Y}$.

6. *L'existence d'une fonction barycentrique pour $\mathcal{Y}$ entraîne l'existence d'une fonction barycentrique pour chaque rétracte $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{Y}$.*

En effet, si $r(\mathcal{Y})=\mathfrak{X}$ est la fonction rétractant $\mathcal{Y}$ en $\mathfrak{X}$ et g une fonction barycentrique pour $\mathcal{Y}$, alors $g'=rg$ en est une pour $\mathfrak{X}$.

7. *Tout espace métrique borné $\mathfrak{X}$ est isométrique à un sous-ensemble fermé $\mathfrak{X}'$ d'un sous-ensemble convexe $\mathcal{Y}$ d'un espace vectoriel normé F.*

Cet espace peut être choisi séparable, si $\mathfrak{X}$ est séparable. [7])

En effet, désignons par F la famille de toutes les fonctions réelles continues et bornées sur $\mathfrak{X}$. En posant pour $f\epsilon F$

$$|f|=\sup_{x\epsilon\mathfrak{X}}|f(x)|$$

et en définissant les opérations d'addition et de multiplication comme d'habitude, on obtient un espace vectoriel normé séparable et complet.

Posons $f_x(y)=|x-y|$ pour $x,y\epsilon F$. $\mathfrak{X}$ étant borné, on a $f_x\epsilon F$. Comme en outre

$$|x_1-x_2|=|x_1-x_2|+|x_2-x_2|=|f_{x_1}(x_2)-f_{x_2}(x_2)|\leqslant$$
$$\leqslant|f_{x_1}-f_{x_2}|=\sup_{x\epsilon\mathfrak{X}}\big||x_1-x|-|x-x_2|\big|\leqslant|x_1-x_2|,$$

c. à d. $|x_1-x_2|=|f_{x_1}-f_{x_2}|$, les fonctions f_x pour $x\epsilon\mathfrak{X}$ constituent dans F un ensemble $\mathfrak{X}'$ isométrique à $\mathfrak{X}$.

Désignons par $\mathcal{Y}$ le plus petit sous-ensemble convexe de F contenant $\mathfrak{X}'$. Reste à montrer que $\mathfrak{X}'$ est fermé dans $\mathcal{Y}$.

Soit donc $x_1,x_2,\ldots$ une suite infinie de points de $\mathfrak{X}$, telle que $\lim\limits_{i=\infty}f_{x_i}=f$ où $f\epsilon\mathcal{Y}$, c. à d. où $f=a_1f_{y_1}+a_2f_{y_2}+\ldots+a_rf_{y_r}$, $y_1,y_2,\ldots,y_r\epsilon\mathfrak{X}$, $a_j\geqslant0$ et $a_1+a_2+\ldots+a_r=1$. Supposons que f *non* $\epsilon\,\mathfrak{X}'$. On aurait donc $f_{y_j}\neq f$ pour $j=1,2,\ldots,r$ et il existerait un $\varepsilon>0$ et un N naturel tels que $|f_{x_i}-f_{y_j}|>\varepsilon$ pour tout $i\geqslant N$ et $j=1,2,\ldots,r$, c. à d. que $|x_j-y_j|>\varepsilon$. Par conséquent $f_{y_j}(x_i)>\varepsilon$, d'où

$$|f-f_{x_i}|\geqslant|f(x_i)-f_{x_i}(x_i)|=f(x_i)=a_1f_{y_1}(x_i)+a_2f_{y_2}(x_i)+\ldots+a_rf_{y_r}(x_i)\geqslant$$
$$\geqslant\varepsilon(a_1+a_2+\ldots+a_r)=\varepsilon,$$

contrairement à l'hypothèse que $f=\lim\limits_{i=\infty}f_{x_i}$.

8. On tire de **4** et **5** le corollaire suivant:

Un sous ensemble séparable et convexe $\mathfrak{X}$ d'un espace vectoriel normé est un rétracte absolu.

9. Soit $Q=(q_1,q_2,\ldots)$, où $q_i\neq q_j$ pour $i\neq j$, un ensemble dénombrable quelconque, dense dans $\mathfrak{X}$. Soit $W_1,W_2,\ldots$ la suite de tous les sous-ensembles finis de Q.

Lemme. *Pour que $\mathfrak{X}$ soit un rétracte absolu, il suffit qu'il existe deux suites $A_1,A_2,\ldots$ et $B_1,B_2,\ldots$ de sous-ensembles de $\mathfrak{X}$, telles que:*

(9.1) $\qquad W_i\subset A_i,$

(9.2) $\qquad$ *l'ensemble A_i est contractile dans B_i,*

(9.3) $\qquad W_j\subset W_i\neq W_j\quad$ *entraîne* $\quad B_j\subset A_i,$

(9.4) $\qquad \lim\limits_{k=\infty}W_{i_k}=x\quad$ *entraîne* $\quad\lim\limits_{k=\infty}B_{i_k}=x.$

Démonstration. Désignons par L_n la somme de tous les simplexes Δ_i de dimension n de l'ensemble L, c.à.d. tels que l'ensemble S_i ait $n+1$ éléments. Posons

(9.5) $$g_0(\Delta_m)=q_m.$$

On peut ordonner les $W_1, W_2, \ldots$ de façon que

(9.6) $$g_0(S_i)=W_i.$$

Nous allons définir par induction les fonctions $g_1, g_2, \ldots$ satisfaisant aux conditions:

(9.7) $$g_n(L_n)\subset\mathfrak{X},$$

(9.8) $$g_n(\Delta)=g_{n-1}(\Delta) \quad \text{pour} \quad \Delta\in L_{n-1},$$

(9.9) g_n est continue sur tout simplexe Δ_i de L_n,

(9.10) $$\Delta_i\subset L_n \quad \text{entraîne} \quad g(\Delta_i)\subset B_i.$$

Etant donnée la fonction $g_n(L_n)\subset\mathfrak{X}$, soit $\Delta_i\subset L_{n+1}$ un simplexe $(n+1)$-dimensionnel de L_{n+1}, $\dot{\Delta}_i$ son bord et Δ_j un simplexe n-dimensionnel situé sur $\dot{\Delta}_i$. En vertu de (9.9), la fonction g_n est continue sur l'ensemble $\dot{\Delta}_i$. En outre, comme Δ_j est une face du simplexe Δ_i, on a $S_j\subset S_i \neq S_j$, ce qui entraîne $W_j\subset W_i\neq W_j$ et par conséquent $g_n(\Delta_j)\subset A_i$ en vertu de (9.3) et (9.10). Ainsi $g_n(\dot{\Delta}_i)\subset A_i$. Il existe donc d'après (9.2) une fonction continue $g_{n+1}(\Delta_i)\subset B_i$ telle que $g_{n+1}(\Delta)=g_n(\Delta)$ pour $\Delta\in\dot{\Delta}_i$.

En prolongeant ainsi la fonction g_n à tout les simplexes $(n+1)$-dimensionnels de L, on obtient la fonction g_{n+1}.

En vertu de (9.8), on peut poser

$$g(\Delta)=\lim_{n=\infty} g_n(\Delta) \quad \text{pour} \quad \Delta\in L.$$

Or, (9.5) entraîne (3.1) et (9.9) entraîne (3.2). Ensuite, $\lim\limits_{k=\infty} g(S_{i_k})=x$ entraîne $\lim\limits_{k=\infty} W_{i_k}=x$ selon (9.6), ce qui entraîne $\lim\limits_{k=\infty} B_{i_k}=x$ en vertu de (9.4) et par conséquent $\lim\limits_{k=\infty} g(\Delta_{i_k})=x$ en vertu de (9.10). La condition (3.3) est donc également satisfaite. Ainsi g est une fonction barycentrique pour $\mathfrak{X}$, ce qui montre en vertu de **4** que $\mathfrak{X}$ est un rétracte absolu.

10. $\mathfrak{X}$ étant un espace métrique compact, soit $2^{\mathfrak{X}}$ l'hyperespace de $\mathfrak{X}$ (c.à.d. l'espace dont les points X sont les sous-ensembles fermés non vides de $\mathfrak{X}$) avec la distance de Hausdorff:

$$\operatorname{dist}(X_1,X_2)=\sup\left[\sup_{x_1\in X_1}\inf_{x_2\in X_2}|x_1-x_2|,\ \sup_{x_2\in X_2}\inf_{x_1\in X_1}|x_1-x_2|\right].$$

On en déduit facilement que $2^{\mathfrak{X}}$ est compact et que

(10.1) $$X,Y,Z\in 2^{\mathfrak{X}}, \quad X\cdot Y\neq 0 \quad \textit{et} \quad Y\subset Z \quad \textit{entraînent}$$
$$\operatorname{dist}(X,Z)\leqslant\max[\operatorname{dist}(X,Y),\delta(Z)].$$

En y posant $X=Y$, on en conclut que

(10.2) $$X,Z\in 2^{\mathfrak{X}} \quad \textit{et} \quad X\subset Z \quad \textit{entraînent} \quad \operatorname{dist}(X,Z)\leqslant\delta(Z).$$

11. Soit $\mathcal{Y}$ un espace métrique et convexe au sens de Menger[8]). Nous allons montrer à présent que $2^{\mathcal{Y}}$ est alors un rétracte absolu.

Soit $\boldsymbol{R}(A,\varrho)$ une sphère ouverte de centre A et de rayon ϱ, située dans $2^{\mathcal{Y}}$. Comme nous l'avons demontré ailleurs[2]), il existe une fonction $F(X,t)$ continue pour les couples X,t où $X\in\boldsymbol{R}(A,\varrho)$ et $0\leqslant t\leqslant 1$, telle que:

(11.1) $$F(X,0)=X, \qquad F(X,1)=\text{const.}, \qquad F(X,t)\in\overline{\boldsymbol{R}(A,\varrho)},$$

(11.2) $$F(X,t)\supset X.$$

Désignons par $\boldsymbol{K}[Y]$ l'ensemble de tous les $Z\in 2^{\mathcal{Y}}$ tels que $Z\cdot Y\neq 0$. L'ensemble $\boldsymbol{K}[Y]$ est évidemment fermé dans $2^{\mathcal{Y}}$. Soient:

$\boldsymbol{Q}=(Q_1,Q_2,\ldots)$ un ensemble dénombrable dense dans $2^{\mathcal{Y}}$,

$\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2,\ldots$ la suite formée de tous les sous-ensembles finis de $\boldsymbol{Q}$,

$l(i)$ le nombre d'éléments de l'ensemble $\boldsymbol{W}_i$,

$\Sigma(\boldsymbol{W}_i)$ l'ensemble-somme de tous les éléments de $\boldsymbol{W}_i$.

Choisissons une suite croissante de nombres réels $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots$ telle que $1<\varepsilon_l<\varepsilon_{l+1}<2$.

Posons:

$$\boldsymbol{A}_i=\begin{cases}\boldsymbol{W}_i & \text{si} \quad l(i)=1,\\ \boldsymbol{K}[\Sigma(\boldsymbol{W}_i)]\cdot\boldsymbol{R}[\Sigma(\boldsymbol{W}_i),\varepsilon_{l(i)}\,\delta(\boldsymbol{W}_i)] & \text{si} \quad l(i)>1,\end{cases}$$

$$\boldsymbol{B}_i=\overline{\boldsymbol{A}}_i.$$

Soient $Q_n\in\boldsymbol{W}_i$ et $l(i)>1$. En vertu de (10.2) on a

$$\operatorname{dist}[Q_n,\Sigma(\boldsymbol{W}_i)]\leqslant\delta(\boldsymbol{W}_i)<\varepsilon_{l(i)}\delta(\boldsymbol{W}_i).$$

On a donc $Q_n \epsilon \boldsymbol{R}[\Sigma(W_i), \varepsilon_{l(i)}\, \delta(W_i)]$. Comme $Q_n \cdot \Sigma(W_i) \neq 0$, on a aussi $Q_n \epsilon \boldsymbol{K}[\Sigma(W_i)]$. Il en résulte que $W_i \subset \boldsymbol{A}_i$, c. à d. la propriété (9.1).

Si $X \epsilon \boldsymbol{K}[\Sigma(W_i)]$, on a $F(X,t) \epsilon \boldsymbol{K}[\Sigma(W_i)]$ en vertu de (11.2), d'où selon (11.1) $\boldsymbol{A}_i$ est contractile dans $\boldsymbol{B}_i$; on a ainsi la propriété (9.2).

Soient:

$$W_j \subset W_i \neq W_j, \qquad Y \epsilon \boldsymbol{B}_j.$$

On a donc:

$$\Sigma(W_j) \subset \Sigma(W_i), \quad \varepsilon_{l(j)} < \varepsilon_{l(i)}, \quad Y \cdot \Sigma(W_j) \neq 0,$$

$$\operatorname{dist}[Y, \Sigma(W_i)] \leqslant \varepsilon_{l(j)}\, \delta(W_j),$$

d'où selon (10.1)

$$\operatorname{dist}[Y, \Sigma(W_i)] \leqslant \max[\varepsilon_{l(j)}\, \delta(W_j), \delta(W_i)] < \varepsilon_{l(i)}\, \delta(W_i).$$

Par conséquent $Y \epsilon \boldsymbol{R}[\Sigma(W_i), \varepsilon_{l(i)}\, \delta(W_i)]$ et comme

$$\boldsymbol{K}[\Sigma(W_j)] \subset \boldsymbol{K}[\Sigma(W_i)],$$

on a aussi $Y \epsilon \boldsymbol{K}[\Sigma(W_i)]$. Ainsi $Y \epsilon \boldsymbol{B}_j$ entraîne $Y \epsilon \boldsymbol{A}_i$. On a donc $\boldsymbol{B}_j \subset \boldsymbol{A}_i$, c. à d. la propriété (9.3).

Enfin, (9.4) résulte de l'inégalité

$$\delta(\boldsymbol{B}_i) \leqslant 2\varepsilon_{l(i)}\, \delta(W_i) < 4\delta(W_i).$$

Les conditions de **9** étant ainsi satisfaites, $2^{\mathcal{Y}}$ est un rétracte absolu.

12. ***Théorème II.*** *Pour que l'espace compact $\mathfrak{X}$ soit un continu localement connexe, il faut et il suffit que $2^{\mathfrak{X}}$ soit un rétracte absolu.*

Démonstration. La condition est nécessaire. $\mathfrak{X}$ étant un continu localement connexe, il existe [2]) un continu convexe $\mathcal{Y} \supset \mathfrak{X}$ tel que $\mathfrak{X}$ est un rétracte de $\mathcal{Y}$. Or, comme nous venons de montrer dans **11**, $2^{\mathcal{Y}}$ est un rétracte absolu; il suffit donc de prouver que $2^{\mathfrak{X}}$ est un rétracte de $2^{\mathcal{Y}}$. En effet, on obtient une telle rétraction, en faisant correspondre à tout $Y \epsilon 2^{\mathcal{Y}}$ l'ensemble $r(Y) \epsilon 2^{\mathfrak{X}}$, où r désigne une fonction rétractant $\mathcal{Y}$ en $\mathfrak{X}$.

La condition est suffisante [9]). Soient $x_1, x_2 \epsilon \mathfrak{X}$ et considérons un ensemble connexe quelconque $\boldsymbol{C} \subset 2^{\mathfrak{X}}$ admettant comme éléments les ensembles (x_1) et (x_2), c. à d. les ensembles formés chacun d'un seul point (x_1 et x_2 respectivement).

Désignons par $\Sigma(\boldsymbol{C})$ l'ensemble-somme de tous les éléments de $\boldsymbol{C}$. Nous allons montrer que:

(12.1) $\overline{\Sigma(\boldsymbol{C})}$ contient un continu unissant x_1 et x_2,

(12.2) $$\delta\big(\overline{\Sigma(\boldsymbol{C})}\big) \leqslant 2\delta(\boldsymbol{C}).$$

En effet, si $\overline{\Sigma(\boldsymbol{C})}$ ne contenait aucun continu unissant x_1 et x_2, il existerait une décomposition $\overline{\Sigma(\boldsymbol{C})} = A + B$ en deux ensembles fermés, non vides, séparés et tels que $x_1 \epsilon A$ et $x_2 \epsilon B$. On vérifie facilement que $2^A \cdot \boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{C} - 2^A$ sont les sommandes d'une décomposition de $\boldsymbol{C}$ en deux ensembles non vides et séparés, ce qui est impossible, $\boldsymbol{C}$ étant connexe par hypothèse.

Soit $x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{C}$. Comme $(x_1) \epsilon \boldsymbol{C}$, on a

$$\operatorname{dist}[X, (x_1)] \leqslant \delta(\boldsymbol{C}),$$

donc aussi

$$|x - x_1| \leqslant \delta(\boldsymbol{C}),$$

ce qui entraîne (12.2).

Il résulte immédiatement de (12.1) et (12.2) que, $2^{\mathfrak{X}}$ étant localement connexe, $\mathfrak{X}$ l'est aussi [9]).

13. Soit $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$ un nombre cardinal quelconque. Désignons par $(2^{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{m}}$ l'ensemble de tous les $X \epsilon 2^{\mathfrak{X}}$ ayant au plus $\mathfrak{m}$ composantes. Or, la définition de la fonction $F(X,t)$ (voir **11**) montre que cette fonction peut être assujettie en outre à la condition:

$$X \epsilon (2^{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{m}} \quad \text{entraîne} \quad F(X,t) \epsilon (2^{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{m}}.$$

On peut démontrer alors, par un raisonnement parfaitement analogue au précédent, le

Théorème II$_{\mathfrak{m}}$. *Pour que l'espace compact $\mathfrak{X}$ soit un continu localement connexe, il faut et il suffit que $(2^{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{m}}$ soit un retracte absolu.*

Or, le nombre des composantes d'un X compact est soit fini, soit $\aleph_0$, soit $2^{\aleph_0}$; ce sont donc les seules valeurs de $\mathfrak{m}$ qui nous intéressent.

On a évidemment $(2^{\mathfrak{X}})_{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{X}}$. L'ensemble $(2^{\mathfrak{X}})_{\aleph_0}$ n'est pas compact, abstraction faite du cas où $\mathfrak{X}$ est un espace au plus dénombrable. Pour $\mathfrak{m}$ fini, $(2^{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{m}}$ est compact. En particulier, $(2^{\mathfrak{X}})_1$ est l'espace des sous-continus de $\mathfrak{X}$.

Renvois.

[1]) $\mathfrak{X}$ est dit un *rétracte* de $\mathcal{Y}\supset\mathfrak{X}$ lorsqu'il existe une fonction continue $r\in\mathfrak{X}^{\mathcal{Y}}$ telle que $r(\mathcal{Y})\subset\mathfrak{X}$ et $r(x)=x$ pour $x\in\mathfrak{X}$ (le symbole $\mathfrak{X}^{\mathcal{Y}}$ désignant l'espace des fonctions continues f pour lesquelles $f(\mathfrak{X})\subset\mathfrak{X}$). $\mathfrak{X}$ est dit un *rétracte absolu* lorsque $\mathfrak{X}$ est un rétracte de chaque espace (métrique séparable) $\mathcal{Y}\supset\mathfrak{X}$ dans lequel $\mathfrak{X}$ est fermé; voir K. Borsuk, Fund. Math. **17** (1931), p. 159, aussi C. Kuratowski, Fund. Math. **24** (1935), p. 269.

[2]) M. Wojdysławski, Fund. Math. **30** (1938), p. 247.

[3]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne **1**, Warszawa-Lwów 1932, p. 53.

[4]) c. à d. l'ensemble des points $a_1A_{l_1}+a_2A_{l_2}+\dots+a_rA_{l_r}$ où $a_l\geqslant 0$, $a_1+a_2+\dots+a_r=1$ et $S_l=(A_{l_1},A_{l_2},\dots,A_{l_r})$. On voit aisément que $\delta(A_l)\leqslant 2\delta(S_l)$, où $\delta(X)$ désigne le diamètre de X.

[5]) c. à d. contenant, pour tout couple A_1, A_2 de ses points, tous les points $aA_1+(1-a)A_2$ où $0\leqslant a\leqslant 1$. Le plus petit ensemble convexe contenant un sous-ensemble $\mathfrak{X}$ d'un espace vectoriel se compose évidemment des points $a_1A_1+a_2A_2+\dots+a_rA_r$ où $A_l\in\mathfrak{X}$, $a_l\geqslant 0$ et $a_1+a_2+\dots+a_r=1$.

[6]) C. Kuratowski, Fund. Math. **24** (1935), p. 266. Th. 2.

[7]) Je dois ce lemme à M. S. Eilenberg. La première partie de la démonstration se trouve chez C. Kuratowski, Fund. Math. **25** (1935), p. 543.

[8]) c. à d. tel qu'il existe, pour tout couple $x_1,x_2\in\mathfrak{X}$, un point $x\in\mathfrak{X}$ pour lequel on a $|x_1-x|=|x_2-x|=\frac{1}{2}|x_1-x_2|$; Cf. K. Menger, Math. Ann. **100** (1928), p. 81.

[9]) T. Ważewski, Fund. Math. **4** (1923), p. 232. Cf. à ce propos aussi K. Borsuk et S. Mazurkiewicz, C. R. Soc. Sc. de Varsovie, **24** (1931), p. 149-152, et S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **18** (1932), p. 171.

Théorèmes d'addition concernant le groupe des transformations en circonférence [1]).

Par

S. Eilenberg et C. Kuratowski (Warszawa).

$\mathfrak{X}$ étant un espace topologique (métrique p. ex.) et $\mathcal{Y}$ un groupe abelien topologique, $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ désigne le groupe des transformations continues de $\mathfrak{X}$ en sous-ensembles de $\mathcal{Y}$, l'addition des fonctions-éléments f_1 et f_2 de $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ étant définie par la condition: $f=f_1+f_2$ signifie que, pour chaque $x\in\mathfrak{X}$, on a $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$. $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ est évidemment un groupe abelien et la fonction identiquement égale à 0 est son élément neutre, désigné également par 0 [2]).

Soit Γ un sous-groupe de $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ et soient A_0 et A_1 deux ensembles fermés tels que $\mathfrak{X}=A_0+A_1$. A étant un des 4 ensembles A_0, A_1, $A_0\cdot A_1$ ou A_0+A_1, désignons par $\Psi(A)$ le groupe formé des éléments g de $\mathcal{Y}^A$ de la forme $g=f|A$ où $f\in\Gamma$ (c. à d. des fonctions g qui admettent une extension sur $\mathfrak{X}$ appartenant à Γ) [3]). Désignons par $\mathfrak{B}(A)$ le groupe-facteur $\mathcal{Y}^A/\Psi(A)$.

Nous établirons dans cette Note des théorèmes „d'addition" qui concernent le rapport du groupe $\mathfrak{B}(A_0+A_1)$ aux groupes $\mathfrak{B}(A_0)$, $\mathfrak{B}(A_1)$ et $\mathfrak{B}(A_0\cdot A_1)$.

---

[1]) Présenté à la Soc. Polon. de Math., Section de Varsovie, le 3. II. 1939.

[2]) En général, une fonction constante et la valeur de cette fonction seront désignées par le même symbole.

[3]) $f|A$ désigne la fonction partielle qui s'obtient de f en restreignant la variabilité de l'argument à l'ensemble A. En conséquence, pour $\Phi\subset\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$, on désigne par $\Phi|A$ l'ensemble des $g\in\mathcal{Y}^A$ de la forme $g=f|A$ où $f\in\Phi$. De sorte que

$$\Psi(A)=\Gamma|A.$$

La correspondance entre f et $f|A$ étant une homomorphie (pour A fixe), si Φ est un groupe, $\Phi|A$ en est un également. En particulier, $\Psi(A)$ est un sous-groupe de $\mathcal{Y}^A$. Cf. C. Kuratowski, *Sur les espaces des transformations continues en certains groupes abeliens*, Fund. Math. **31** (1938), p. 233.