Ceci établi, soit $\vartheta_{k_0+i_1}$ la première dendrite de la suite $\{\vartheta_{k_0+i}\}$ qui jouit de la propriété (p). Nous pouvons évidemment supposer que $\vartheta_{k_0+i_1}$ est de la forme

$$\widehat{\alpha\beta_1}+\widehat{\alpha\beta_2}+\ldots+\widehat{\alpha\beta_N}$$

avec le seul point de ramification α. On a donc, pour chaque système de 3 indices distincts k_1, k_2, k_3, l'une des 3 relations:

$$\begin{aligned}
&C[\Psi_{i_1}(\widehat{\alpha\beta_{k_1}})] \sim C[\Psi_{i_1}(\widehat{\alpha\beta_{k_2}}+\widehat{\alpha\beta_{k_3}})],\\
&C[\Psi_{i_1}(\widehat{\alpha\beta_{k_2}})] \sim C[\Psi(\widehat{\alpha\beta_{k_3}}+\widehat{\alpha\beta_{k_1}})],\\
&C[\Psi_{i_1}(\widehat{\alpha\beta_{k_3}})] \sim C[\Psi_{i_1}(\widehat{\alpha\beta_{k_1}}+\widehat{\alpha\beta_{k_2}})],
\end{aligned}$$

p. ex. la première. Elle entraîne en vertu de (VI), en y posant $\omega=\varepsilon/8N$, l'existence de deux $\frac{3}{4}\varepsilon$-déformations χ et χ' de la dendrite $\widehat{\alpha\beta_{k_1}}+\widehat{\alpha\beta_{k_2}}+\widehat{\alpha\beta_{k_3}}$ en deux arcs simples respectivement, de façon que

$$\operatorname{Max}\Big\{\sup_{x\in\widehat{\alpha\beta_{k_1}}}\varrho\big(\Psi_{i_1}(x),\chi(x)\big),\ \sup_{x\in\widehat{\alpha\beta_{k_2}}+\widehat{\alpha\beta_{k_3}}}\varrho\big(\Psi_{i_1}(x),\chi'(x)\big)\Big\}<\varepsilon/8N.$$

Il en résulte immédiatement par induction la possibilité de transformer la dendrite $\vartheta_{k_0+i_1}$ toute entière en un arc simple au moyen d'une $\left(\frac{3}{4}\varepsilon+\frac{\varepsilon(N-1)}{8N}\right)$-déformation, soit une $7\varepsilon/8$-déformation. Comme d'autre part $\vartheta_{k_0+i_1}$ est d'après (i) et (1) une $\varepsilon/16$-déformation du continu K, ce continu se laisse ε-déformer en un arc simple, c. q. f. d.

Quelques inégalités pour les opérations linéaires.

Par

J. Marcinkiewicz et A. Zygmund (Wilno).

1. Nous entendons par $L^r(a,b)$, où $r>0$, la classe des fonctions (réelles) définies dans l'intervalle $a\leqslant x\leqslant b$ et intégrables en puissance r. Si une opération linéaire $\varphi=T[f]$ transforme toute fonction $f\in L^r(a,b)$ en une fonction $\varphi\in L^\varrho(\alpha,\beta)$, nous disons que T appartient à la classe $L^{r,\varrho}(a,b;\alpha,\beta)$ et nous écrivons $T\in L^{r,\varrho}(a,b;\alpha,\beta)$. Le plus petit nombre M tel que

$$\text{(1)}\qquad \Big\{\int_\alpha^\beta|\varphi(\xi)|^\varrho\,d\xi\Big\}^{1/\varrho}\leqslant M\Big\{\int_a^b|f(x)|^r\,dx\Big\}^{1/r}$$

est nommé la *norme* de l'opération T.

En utilisant un raisonnement de M. Paley, on peut démontrer que si $T\in L^{r,r}(a,b;\alpha,\beta)$ et si M est la norme de T, alors pour toute suite $\{f_\nu\}$ finie ou infinie de fonctions de la classe $L^r(a,b)$ on a l'inégalité

$$\text{(2)}\qquad \Big\{\int_\alpha^\beta\Big(\sum_\nu\varphi_\nu^2\Big)^{\frac{1}{2}r}d\xi\Big\}^{1/r}\leqslant MC_r\Big\{\int_a^b\Big(\sum_\nu f_\nu^2\Big)^{\frac{1}{2}r}dx\Big\}^{1/r},$$

où $\varphi_\nu=T[f_\nu]$, le coefficient C_r ne dépendant que de r [1]).

[1]) Cf. R. E. A. C. Paley, *A remarkable series of orthogonal functions, I*, Proc. London Math. Soc. **34** (1932), pp. 241-264; en particulier la démonstration du lemme 5, p. 250. L'inégalité (2) n'y est pas formulée explicitement, mais sa démonstration est analogue à celle du lemme 5.

La valeur de la constante C_r, obtenue dans ce raisonnement, tend vers l'infini avec $r \to +\infty$ et $r \to 0$. Comme l'inégalité (2) a des applications importantes [2]), il n'est peut-être pas sans intérêt de prouver — ce qui est le but principal de cette note — que l'inégalité (2) subsiste lorsque $C_r = 1$. En d'autres mots, on a le

Théorème 1. *M désignant la norme d'une opération linéaire $T \epsilon L^{r,r}(a,b;\alpha,\beta)$, on a pour toute suite $\{f_\nu\}$, finie ou non, de fonctions appartenant à $L^r(a,b)$*

$$(3)\qquad \left\{\int_\alpha^\beta \Big(\sum_\nu \varphi_\nu^2\Big)^{r/2} d\xi\right\}^{1/r} \leqslant M \left\{\int_a^b \Big(\sum_\nu f_\nu^2\Big)^{r/2} dx\right\}^{1/r},$$

où $\varphi_\nu = T[f_\nu]$.

Dans le cas où la suite $\{f_\nu\}$ se réduit à une seule fonction, l'inégalité (3) se réduit à (1).

M. Paley se servait dans son raisonnement du bien connu système orthogonal de M. Rademacher. Pour établir (3), nous ferons l'usage d'un autre système de fonctions, qui paraît être mieux adapté au problème.

Lemme 1. *Il existe une suite de fonctions $\{h_\nu(t)\}$ équimesurables avec une fonction $h(t)$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ et telle que pour toute suite finie $\{a_\nu\}$ de nombres réelles*

(4) *la fonction* $\sum_\nu a_\nu h_\nu(t)$ *est équimesurable avec* $(\sum_\nu a_\nu^2)^{\frac{1}{2}} h(t)$.

La fonction $h(t)$ est intégrable en toute puissance positive.

Démonstration. Il suffit de prendre pour $h_1(t), h_2(t), \ldots$ une suite de fonctions indépendantes à distribuante de Gauss [3]). Alors (4) découle des théorèmes bien connus d'après lesquels la somme d'une suite de variables aléatoires indépendantes obéissant à la loi de Gauss obéit elle-même à la loi de Gauss et la dispersion de la somme est égale à la somme des dispersions.

---

[2]) Cf. J. E. Littlewood and R. E. A. C. Paley, *Theorems on Fourier series and power series*, Proc. London Math. Soc. **42** (1937), pp. 52–89; spécialement p. 78 (Corollary). L'inégalité pour les fonctions conjuguées qui y démontrée est une conséquence immédiate, même dans une forme plus générale, de l'inégalité (2).

[3]) Par la *distribuante* $H(y)$ $(-\infty < y < +\infty)$ d'une fonction $h(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ on entend la mesure de l'ensemble des points t où $h(t) \leqslant y$. La distribuante

Ajoutons encore qu'on obtient de (4)

$$(5)\qquad \int_0^1 \Big|\sum_\nu a_\nu h_\nu(t)\Big|^r dt = \Big(\sum_\nu a_\nu^2\Big)^{\frac{1}{2}r} \int_0^1 |h(t)|^r dt \qquad \textit{pour tout } r>0.$$

Passons à la démonstration du théorème 1. Il suffit de se borner au cas où la suite $\{f_\nu\}$ est finie. L'opération T étant linéaire, on a pour toute valeur de t

$$(6)\qquad T\Big[\sum_\nu f_\nu h_\nu(t)\Big] = \sum_\nu \varphi_\nu h_\nu(t)$$

et en vertu de (1)

$$(7)\qquad \int_\alpha^\beta \Big|\sum_\nu \varphi_\nu(\xi)\, h_\nu(t)\Big|^r d\xi \leqslant M^r \int_a^b \Big|\sum_\nu f_\nu(x)\, h_\nu(t)\Big|^r dx.$$

Intégrons cette inégalité par rapport à t dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$. En renversant l'ordre de l'intégration et en tenant compte de (5), on obtient (3).

Soit $0 < \gamma < 2$. Considérons une suite de fonctions indépendantes $h_1^{(\gamma)}(t), h_2^{(\gamma)}(t), \ldots$ équimesurables avec une fonction $h^{(\gamma)}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ dont la distribuante $H^{(\gamma)}(y)$ est la même que celle de la loi excep-

---

de Gauss est donnée par la formule

$$H(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

Sur la définition des *fonctions indépendantes* (notion due à MM. Kolmogoroff et Steinhaus) voir M. Kac, *Sur les fonctions indépendantes*, *I*, Studia Math. **6** (1936), p. 46–58; cf. aussi J. Marcinkiewicz et A. Zygmund, *Sur les fonctions indépendantes*, Fund. Math. **29** (1937), p. 60–90.

Dans la démonstration de l'inégalité (3), on pourrait se passer de la notion de fonctions indépendantes et raisonner directement sur les variables aléatoires à distribution gaussienne.

Nous nous appuyons sur la proposition suivante:

Pour toute suite $\{g_\nu\}$ de fonctions définies dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, il existe une suite $\{g'_\nu\}$ de fonctions indépendantes telles que g'_ν est équimesurable avec g_ν.

Voir A. Denjoy, C. R. de l'Acad. de Paris, **196** (1933), p. 1713, M. Kac, loc. cit., ou Marcinkiewicz et Zygmund, loc. cit., p. 61.

tionnelle, d'ordre γ, de M. P. Lévy [4]), On sait que la fonction $H^{(\gamma)}(y)$ possède tous les moments d'ordre $r<\gamma$, donc $h^{(\gamma)}(t)\in L^r(0,1)$ pour $0<r<\gamma$. De plus, pour toute suite finie $\{a_\nu\}$, la fonction $\sum_\nu a_\nu h_\nu^{(\gamma)}(t)$ est équimesurable avec $(\sum_\nu |a_\nu|^\gamma)^{1/\gamma} h^{(\gamma)}(t)$. Par conséquent on a l'égalité

(8) $$\int_0^1 \Big|\sum_\nu a_\nu h_\nu^{(\gamma)}(t)\Big|^r dt = \Big(\sum_\nu |a_\nu|^\gamma\Big)^{r/\gamma}\int_0^1 |h^{(\gamma)}(t)|^r dt \qquad (0<r<\gamma).$$

En raisonnant comme dans la démonstration du th. 1, on obtient le suivant

Théorème 2. *Si $0<r<\gamma<2$ et M est la norme de l'opération $T\in L^{r,r}(a,b;\alpha,\beta)$, on a*

$$\Big\{\int_\alpha^\beta \Big(\sum_\nu|\varphi_\nu|^\gamma\Big)^{r/\gamma}d\xi\Big\}^{1/r} \leqslant M\Big\{\int_a^b\Big(\sum_\nu |f_\nu|^\gamma\Big)^{r/\gamma}dx\Big\}^{1/r},$$

où $\varphi_\nu=T[f_\nu]$.

2. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que les opérations $T\in L^{r,r}$. Des raisonnements analogues peuvent être appliqués dans le cas où $T\in L^{r,\varrho}$ et $r\neq\varrho$, mais alors on est obligé d'introduire dans les inégalités qu'on obtient des constantes nouvelles, telles que C_r dans (2).

Théorème 3. *Soit M la norme de l'opération $T\in L^{r,\varrho}(a,b;\alpha,\beta)$. Alors, si $f_\nu\in L^r(a,b)$ et $\varphi_\nu=T[f_\nu]$ pour $\nu=1,2,..,$ on a*

(9) $$\Big\{\int_\alpha^\beta \Big(\sum_\nu\varphi_\nu^2\Big)^{\frac12\varrho} d\xi\Big\}^{1/\varrho} \leqslant MK_{r,\varrho}\Big\{\int_a^b\Big(\sum_\nu f_\nu^2\Big)^{\frac12 r}dx\Big\}^{1/r}.$$

Dans le cas où $r<\gamma$, $\varrho<\gamma$, $0<\gamma<2$, on a aussi

(10) $$\Big\{\int_\alpha^\beta\Big(\sum_\nu|\varphi_\nu|^\gamma\Big)^{\varrho/\gamma}d\xi\Big\}^{1/\varrho}\leqslant MK_{r,\varrho,\gamma}\Big\{\int_a^b\Big(\sum_\nu|f_\nu|^\gamma\Big)^{r/\gamma}dx\Big\}^{1/r}.$$

Les coefficients K dans (9) *et* (10) *ne dépendent que des variables écrites explicitement.*

[4]) Voir P. Lévy, *Calcul des probabilités*, Paris 1924, en particulier p. 252. La fonction $H^{(\gamma)}(y)$ est définie par la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyu}\,dH^{(\gamma)}(y) = \exp\Big(-\frac{|u|^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}\Big).$$

La démonstration sera basée sur le suivant

Lemme 2. *Si les fonctions $h_\nu(t)$ sont définies comme dans le lemme 1 et si $g_\nu\in L^s(a,b)$ pour $\nu=1,2,...,$ on a*

(11) $$A_s\Big\{\int_a^b\Big(\sum_\nu g_\nu^2(x)\Big)^{\frac12 s}dx\Big\}^{1/s}\leqslant \int_0^1\Big\{\int_a^b\Big|\sum_\nu g_\nu(x)\,h_\nu(t)\Big|^s dx\Big\}^{1/s}dt \leqslant B_s\Big\{\int_a^b\Big(\sum_\nu g_\nu^2(x)\Big)^{\frac12 s}dx\Big\}^{1/s},$$

où A_s et B_s sont des constantes positives qui ne dépendent que de s.

Considérons séparement les cas $s\geqslant1$ et $s<1$. Dans le premier cas, en appliquant l'inégalité de Hölder et en tenant compte de (5), nous avons

$$\int_0^1\Big\{\int_a^b\Big|\sum_\nu g_\nu(x)\,h_\nu(t)\Big|^s dx\Big\}^{1/s}dt \leqslant \Big\{\int_0^1\int_a^b\Big|\sum_\nu g_\nu(x)\,h_\nu(t)\Big|^s dx\,dt\Big\}^{1/s} =$$

$$=\Big\{\int_a^b dx\int_0^1\Big|\sum_\nu g_\nu(x)\,h_\nu(t)\Big|^s dt\Big\}^{1/s} = C_s\Big\{\int_a^b\Big(\sum_\nu g_\nu^2(x)\Big)^{\frac12 s}dx\Big\}^{1/s},$$

où $C_s^s=\int_0^1|h(t)|^s dt$, et la deuxième des inégalités (11) est démontrée.

D'autre part

(12) $$\Big\{\int_a^b\Big|\sum_\nu g_\nu(x)\,h_\nu(t)\Big|^s dx\Big\}^{1/s} = \mathrm{Max}\int_a^b\lambda(x,t)\,\Big|\sum_\nu g_\nu(x)\,h_\nu(t)\Big|\,dx,$$

où le maximum est pris par rapport à toutes les fonctions $\lambda(x,t)\geqslant0$ satisfaisant à la condition

(13) $$\int_a^b\lambda^{s'}(x,t)\,dx=1, \qquad \text{où}\quad 1/s+1/s'=1.$$

En particulier, en vertu de (12) et (13), pour toute fonction $\lambda(x)\geqslant0$ telle que

(14) $$\int_a^b \lambda^{s'}(x)\,dx=1,$$

nous avons

$$\int_0^1\Big\{\int_a^b\Big|\sum_\nu g_\nu(x)\,h_\nu(t)\Big|^s dx\Big\}^{1/s}dt \geqslant$$

$$\geqslant\int_0^1\int_a^b\lambda(x)\,\Big|\sum_\nu g_\nu(x)\,h_\nu(t)\Big|\,dx\,dt = C_1\int_a^b\lambda(x)\,\Big(\sum_\nu g_\nu^2(x)\Big)^{\frac12}dx$$

où $C_1=\int_0^1 |h(t)|\,dt$. La fonction non négative $\lambda(x)$ étant assujettie à l'unique condition (14), nous voyons que

$$\int_0^1 \Big\{\int_a^b \Big|\sum_\nu g_\nu(x) h_\nu(t)\Big|^s dx\Big\}^{1/s} dt \geqslant C_1 \Big\{\int_a^b \Big(\sum_\nu g_\nu^2(x)\Big)^{\frac12 s} dx\Big\}^{1/s}$$

et la première des inégalités (11) est aussi démontrée.

Dans le second cas, où $0<s<1$, donc $1/s>1$, considérons toutes les fonctions $\mu(t)\geqslant 0$ satisfaisant à la condition

(15) $$\int_0^1 \mu^{\frac{1}{1-s}}(t)\,dt = 1.$$

Cette condition est satisfaite aussi par la fonction $\mu(t)=1$. Par conséquent

$$\Big\{\int_0^1 \Big(\int_a^b \Big|\sum_\nu g_\nu(x) h_\nu(t)\Big|^s dx\Big)^{1/s} dt\Big\}^s = \operatorname*{Max}_\mu \int_0^1 \mu(t) \int_a^b \Big|\sum_\nu g_\nu(x) h_\nu(t)\Big|^s dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1\int_a^b \Big|\sum_\nu g_\nu(x)h_\nu(t)\Big|^s dt\,dx = C_s^s \int_a^b \Big(\sum_\nu g_\nu^2(x)\Big)^{\frac12 s} dx,$$

ce qui donne la première des inégalités (11). D'autre part, en vertu de (4), on a

(16) $$\sum_\nu g_\nu(x)h_\nu(t) = \Big(\sum_\nu g_\nu^2(x)\Big)^{\frac12}\omega(x,t)$$

où, pour tout x, la fonction $\omega(x,t)$ est équimesurable avec $h(t)$. En prenant donc pour $\mu(t)$ une fonction convenable satisfaisant à la condition (15), on peut écrire

$$\Big\{\int_0^1 dt \Big(\int_a^b \Big|\sum_\nu g_\nu(x)h_\nu(t)\Big|^s dx\Big)^{1/s}\Big\}^s = \int_0^1 \mu(t)\int_a^b \Big|\sum_\nu g_\nu(x)h_\nu(t)\Big|^s dx\,dt =$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_\nu g_\nu^2(x)\Big)^{\frac12 s}\Big(\int_0^1 \mu(t)\,|\omega(x,t)|^s dt\Big) dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \Big(\sum_\nu g_\nu^2(x)\Big)^{\frac12 s}\Big\{\Big(\int_0^1 \mu^{\frac{1}{1-s}}(t)\,dt\Big)^{1-s}\Big(\int_0^1 |\omega(x,t)|\,dt\Big)^s dx = C_1^s \int_a^b \Big(\sum_\nu g_\nu^2(x)\Big)^{\frac12 s} dx,$$

de sorte que la deuxième des inégalités (11) est aussi démontrée et le lemme 2 se trouve établi.

Il est maintenant facile de démontrer le th. 3. Pour toute valeur de t on a la relation (6) et l'inégalité

$$\Big\{\int_\alpha^\beta \Big|\sum_\nu \varphi_\nu(\xi)\, h_\nu(t)\Big|^\varrho d\xi\Big\}^{1/\varrho} \leqslant M\Big\{\int_a^b \Big|\sum_\nu f_\nu(x)\, h_\nu(t)\Big|^r dx\Big\}^{1/r}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à t dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$ et en tenant compte du lemme 2, on obtient (9) avec $K_{r,\varrho}=B_r/A_\varrho$. Le raisonnement analogue donne (10). Il faut seulement appliquer au lieu de (11) l'inégalité suivante (avec $0<s<\gamma<2$):

$$A_{s,\gamma}\Big\{\int_a^b\Big(\sum_\nu |g_\nu|^\gamma\Big)^{s/\gamma} dx\Big\}^{1/s} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \Big\{\int_a^b \Big|\sum_\nu g_\nu(x)\, h_\nu^{(\gamma)}(t)\Big|^s dx\Big\}^{1/s} dt \leqslant B_{s,\gamma}\Big\{\int_a^b\Big(\sum_\nu |g_\nu|^\gamma\Big)^{s/\gamma}dx\Big\}^{1/s},$$

dont la démonstration est la même que celle de (11). Les coefficients $A_{s,\gamma}$ et $B_{s,\gamma}$ ne dépendent ici que de s et γ.

3. Nous avons supposé dans l'énoncé du théorème 1 que l'opération $T[f]$ est définie pour toute fonction f de la classe $L^r(a,b)$. Il est cependant évident qu'il suffit d'admettre que l'opération T n'est définie que pour les f appartenant à une famille $\mathfrak{F}$ de fonctions, pourvu que cette famille ait la propriété suivante:

Si les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ appartiennent à $\mathfrak{F}$, il est de même de toute combinaison linéaire (à coefficients constants) de ces fonctions.

Notons que les théorèmes que nous venons de démontrer pour les intégrales de Lebesgue subsistent pour les intégrales de Stieltjes-Lebesgue. Il suffit de remplacer dans tous les énoncés les différentielles dx et $d\xi$ par $dw(x)$ et $d\omega(\xi)$, où $w(x)$ et $\omega(\xi)$ sont des fonctions non décroissantes définies respectivement dans les intervalles $a\leqslant x\leqslant b$ et $\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta$. Les démonstrations restent les mêmes.