Remarque sur les suites doubles de fonctions continues.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

D'après un théorème connu de M. Fréchet, si $\{f_n^m(x)\}$ est une suite double de fonctions continues[1]) d'une variable réelle et si l'on a

$$f(x) = \lim_{m=\infty}\left(\lim_{n=\infty} f_n^m(x)\right) \quad \text{pour } x \text{ réels,}$$

il existe deux suites infinies croissantes d'indices $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$, telles que

$$f(x) = \lim_{k=\infty} f_{n_k}^{m_k}(x)$$

pour tous les x réels, en négligeant un ensemble de *mesure nulle*.

Or, une certaine dualité existant entre les ensembles de mesure nulle et ceux de I-e catégorie (de Baire), M^lle S. Braun m'a posé le problème si l'on peut remplacer dans cet énoncé les mots *mesure nulle* par *I-e catégorie*. Le but de cette Note est de démontrer que *ce n'est pas le cas*.

Etant donnés deux nombres naturels, m et n, nous définirons la fonction $f_n^m(x)$ d'une variable réelle comme il suit. Posons, pour i entiers:

$$f_n^m\left(\frac{i}{m}\right)=0, \quad f_n^m\left(\frac{i}{m}+\frac{1}{2mn}\right)=1, \quad f_n^m\left(\frac{i}{m}+\frac{1}{mn}\right)=0,$$

et prolongeons $f_n^m(x)$ linéairement dans chacun des intervalles:

$$\left\langle\frac{i}{m}, \frac{i}{m}+\frac{1}{2mn}\right\rangle, \quad \left\langle\frac{i}{m}+\frac{1}{2mn}, \frac{i}{m}+\frac{1}{mn}\right\rangle, \quad \left\langle\frac{i}{m}+\frac{1}{mn}, \frac{i+1}{m}\right\rangle.$$

Les fonctions $f_n^m(x)$ sont évidemment continues et on a pour $m=1,2,\ldots$

$$\lim_{n=\infty} f_n^m(x) = 0,$$

donc aussi $\lim\limits_{m=\infty}\left(\lim\limits_{n=\infty} f_n^m(x)\right)=0$ pour x réels.

[1]) ou, plus généralement, *mesurables*.

Or, je vais montrer qu'il n'existe aucun ensemble linéaire K de I-e catégorie, pas plus que deux suites infinies croissantes de nombres naturels $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$, telles qu'on ait

(1) $$\lim_{k=\infty} f_{n_k}^{m_k}(x)=0 \quad \text{pour} \quad x \text{ non} \in K.$$

Supposons, en effet, qu'un tel ensemble K et deux suites $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$ existent. Il existerait donc une décomposition

(2) $$K=N_1+N_2+\dots$$

en ensembles N_i $(i=1,2,3,\dots)$ non-denses. On aurait donc, pour un intervalle (fermé) d_1, l'égalité $d_1 N_1=0$. La suite d'indices $\{m_k\}$ étant croissante, il existe un nombre naturel k_1, tel que

(3) $$1/m_{k_1}<\bar{d}_1,$$

où $\bar{d}_1$ désigne la longueur de l'intervalle d_1. La fonction $f_n^m(x)$ prenant par définition la valeur 1 dans chacun des intervalles de longueur $1/m$, il existe d'après (3) un nombre $x_1 \in d_1$, tel que $f_{n_{k_1}}^{m_{k_1}}(x_1)=1$. La fonction $f_{n_{k_1}}^{m_{k_1}}(x)$ étant continue, il existe un intervalle fermé $\delta_1 \subset d_1$, tel que $f_{n_{k_1}}^{m_{k_1}}(x)>1/2$ pour $x \in \delta_1$.

Or, l'ensemble N_2 étant non-dense, il existe un intervalle $d_2 \subset \delta_1$ tel que $d_2 N_2=0$. Comme plus haut, on trouve un entier $k_2>k_1$ tel que $1/m_{k_2}<\bar{d}_2$, ensuite un $x_2 \in d_2$ tel que $f_{n_{k_2}}^{m_{k_2}}(x_2)=1$, et, enfin, un intervalle $\delta_2 \subset d_2$ tel que $f_{n_{k_2}}^{m_{k_2}}(x)>1/2$ pour $x \in \delta_2$.

En raisonnant ainsi de suite, nous obtenons une suite infinie d'intervalles fermés

(4) $$d_1 \supset \delta_1 \supset d_2 \supset \delta_2 \supset d_3 \supset \dots$$

et une suite infinie croissante d'indices $\{k_i\}$, telles que $d_i N_i=0$ $(i=1,2,3,\dots)$ et que

(5) $$f_{n_{k_i}}^{m_{k_i}}(x)>1/2 \quad \text{pour} \quad x \in \delta_i \qquad (i=1,2,\dots).$$

D'après (4), il existe un point x_0 tel que $x_0 \in d_i \delta_i$ pour $i=1,2,\dots$ Comme $d_i N_i=0$, on aurait donc d'après (2) $x_0 \text{ non} \in K$ et d'après (5) $f_{n_{k_i}}^{m_{k_i}}(x_0)>1/2$ pour $i=1,2,\dots$, de sorte que la formule (1) ne serait pas vraie pour $x=x_0$.

Exceptional Sets.

By

H. Blumberg (Columbus, Ohio).

The following considerations originate from a trivial remark, called the *germ principle*, and analogous trivia, and lead by a line of reasoning that readily suggests itself to a variety of simple properties, mostly new, of the general set and the general (real) function. The results of the use of the germ principle are of a comprehensive scope, have numerous connections with the literature, and unify various results appearing in the literature as unrelated or remotely related.

Our considerations will first relate to the linear continuum. By an *interval property* P, we understand a property such that if I is a (closed) interval of the linear continuum, then either I^P (I has property P) or $I^{\bar{P}}$ (I hasn't property P, I has the contrary property $\bar{P}$). Since an interval $I=(a,b)$ has two ends, and the relations I^P, $I^{\bar{P}}$ are mutually exclusive, it follows that *if a is such that $(a,b)^P$, then b is not such that $(a,b)^{\bar{P}}$.* This form of an utter triviality is the germ of all that follows.

If P is a given interval property, we shall say that a is a *point of antisymmetry* (with respect to P) if, for all sufficiently small positive h, $(a,a+h)^P$, $(a,a+h)^{\bar{P}}$ respectively imply $(a,a-h)^{\bar{P}}$, $(a,a-h)^P$. a will be said to be a point of δ-antisymmetry if it is a point of antisymmetry and the relations defining antisymmetry hold for all $h<\delta$. Let T be a set of positive numbers with 0 as a limit point; and let S be the set of points a of antisymmetry such