# Über die Äquivalenz einiger grundlegender Sätze aus der Theorie der Punktmengen.

Von

L. Egyed (Budapest).

Mit Hilfe des Zermeloschen Axioms hat Herr P. Veress[1]) in einer Arbeit zwei sehr allgemein brauchbare Sätze bewiesen, die darum beachtenswert sind, daß aus ihnen beinahe alle grundlegenden Sätze der reellen Funktionenlehre unmittelbar folgen. Daher glaube ich, daß es nicht ohne Interesse wäre, zu betrachten, inwieweit das Auswahlaxiom in diesen ausgenutzt wird und mit welchen grundlegenden Sätzen der Punktmengenlehre sie äquivalent sind.

**1.** Anstatt des Zermeloschen Axioms nehmen wir das folgende Postulat an, das wir im Folgenden „$V$-Postulat" nennen werden:

*Ist $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ eine Mengenfolge von paarweise elementfremden Mengen, unter denen unendlich viele $E_n \neq 0$* [2]) *sind, so existiert eine Folge $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ von lauter endlichen Mengen, derart daß $V_n \subset E_n$ $(n=1,2,\dots)$ und unendlich viele $V_n \neq 0$ sind*[3]).

Es ist durchaus wahrscheinlich (und zwar namentlich im Lichte der Untersuchungen von Herrn A. Fraenkel)[4]), daß dieses Postulat weder dem Auswahlaxiom noch dem von Herrn W. Sierpiński stammenden „$P$-Postulat"[5]) äquivalent ist.

[1]) P. Veress, *Über eine Beweismethode in der Theorie der abstrakten Räume*, Acta Szeged **6** (1932) p. 34-45.

[2]) $M \neq 0$ bezeichnet hier, daß $M$ nicht die Nullmenge ist.

[3]) Die Anzahl der Elemente von $V_n$ braucht aber nicht gleichmäßig beschränkt zu sein.

[4]) A. Fraenkel, *Sur une atténuation essentielle de l'axiome du choix*, C. R. Paris **192**, p. 1072.

[5]) W. Sierpiński, *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse*, Bull. Ac. des Sc. Cracovie (1919), p. 119.



Der erste Satz von Herrn Veress läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

*Ist $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ eine monotone*[6]) *Folge von Aussagen und $E$ eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:*

(I) *Für jedes Element aus $E$ gibt es eine gültige Aussage aus der Folge $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$,*

(II) *Zu jeder unendlichen Teilmenge $E'$ von $E$ gehört eine Aussage $A_m$, die für unendlich viele Elemente von $E'$ gilt,*

*so gibt es eine Aussage $A_N$, die für alle Elemente von $E$ gültig ist.*

In den folgenden Zeilen werden wir beweisen, daß das $V$-Postulat und der erste Satz von Herrn Veress äquivalent sind.

1⁰ Aus dem $V$-Postulat folgt der Satz von Herrn Veress.

Nehmen wir an, es sei eine monotone Aussagenfolge

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \tag{1}$$

gegeben und es sei $E$ eine Menge, für die die Forderungen (I) und (II) des genannten Satzes erfüllt sind. Bezeichnen wir weiter mit $E_n$ die Menge der Elemente von $E$, für welche $A_n$ die erste gültige Aussage ist. Betrachten wir die Mengenfolge

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots \tag{2}$$

Wenn nur endlich viele $E_n \neq 0$ sind, so gibt es unter diesen eine mit dem größten Index $E_N$. Die zu diesem gehörige Aussage $A_N$ ist aber wegen der Monotonie der Folge (1) für sämtliche Elemente von $E_n$ $(n \leqslant N)$ gültig. Also gilt $A_N$ für jedes Element von

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_N.$$

Wir werden zeigen, daß die Mengenfolge (2) nicht unendlich viele $E_n \neq 0$ enthalten kann. Sonst würde nach dem $V$-Postulat eine Folge $V_1, V_2, \dots V_n, \dots$ mit den im Postulat behaupteten Eigen-

[6]) Eine Aussagenfolge $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ wird *monoton* genannt, wenn daraus, daß $A_n$ für das Element $e$ gültig ist, folgt, daß jede Aussage $A_\nu$ mit einem Index $\nu > n$ für dasselbe Element $e$ gültig ist.

schaften existieren. $\sum_1^\infty V_n = E'$ ist aber eine unendliche Teilmenge von $E$. Nach der Forderung (II) des Satzes gibt es eine Aussage $A_m$, die auf unendlich viele Elemente von $E'$ zutrifft. Es steht aber damit die Tatsache im Widerspruch, daß jede Aussage $A_m$ nur für die Elemente der endlichen Menge $V_1+V_2+\ldots+V_m$ gilt; denn für jedes $x \epsilon V_n$, wo $n>m$ ist, ist $A_n$ die erste gültige Aussage. Damit ist der erste Teil unserer Behauptung bewiesen.

2⁰ Aus dem Satz von Herrn Veress folgt das $V$-Postulat.

Es sei der Satz von Aussagen vorausgesetzt und es sei

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

eine Mengenfolge mit paarweise elementfremden Gliedern gegeben, unter denen unendlich viele $E_n \neq 0$ sind. Nehmen wir an, daß für diese Mengenfolge das $V$-Postulat nicht gültig ist. Wir werden zeigen, daß diese Voraussetzung zu einem Widerspruch führt.

Betrachten wir nämlich die Menge $E = \sum_1^\infty E_n$ und es sei die Aussage $A_n$ wie folgt definiert:

$$\textit{Ist} \quad e \epsilon E, \quad \textit{so ist} \quad e \epsilon (E_1+E_2+\ldots+E_n) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Es ist klar, daß hiermit eine monotone Folge von Aussagen definiert ist, die die Forderung (I) des Satzes erfüllt. Sie erfüllt aber auch die Forderung (II). Ist, in der Tat, $E'$ eine unendliche Teilmenge von $E$, so muß sie unendlich viele Elemente aus einem $E_m$ enthalten. Andernfalls wäre sie eine endliche Menge, da es nach der Voraussetzung keine derartige Menge gibt, die aus unendlich vielen $E_n$ nur je endlich viele Elemente enthielte. Enthält nun $E'$ unendlich viele Elemente aus einem $E_m$, so gilt die $m$-te Aussage für unendlich viele Elemente von $E'$. Es ist also auch die Forderung (II) erfüllt.

Nach dem Satz gibt es aber dann eine Aussage $A_N$, die für alle Elemente von $E$ gilt, d. h.:

$$e \epsilon (E_1+\ldots+E_N) \qquad \text{für jedes } e \text{ aus } E.$$

Dies bedeutet, daß die Mengenfolge $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ nur endlich viele Glieder $E_n \neq 0$ hat, was im Widerspruch mit unseren Forderungen steht.

Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.



**2.** Ist eine monotone Folge von Aussagen auch stetig [7]), so kann man, wie das schon Herr Veress in der genannten Arbeit [1]) gezeigt hat, folgenden Satz aussprechen:

*Ist für jedes Element der kompakten abgeschlossenen Menge $E$ eine Aussage der monotonen stetigen Aussagenfolge $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ gültig, so gibt es unter diesen eine Aussage $A_N$, die für alle Elemente von $E$ gilt* [8]) (zweiter Satz von Herrn Veress).

Aus diesem Satz folgt unmittelbar in einem Hausdorffschen Raum der Satz von Borel [9]).

Diese Behauptung läßt sich auch umkehren.

Beweis. Es sei $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ eine stetige monotone Folge von Aussagen und $E$ eine kompakte abgeschlossene Menge, so daß es für jedes Element von $E$ eine gültige Aussage in der Folge gibt. Es bezeichne $E_n \subset E$ die Menge der Punkte von $E$, für die $A_n$ die erste Aussage ist, zu welcher es eine Umgebung [10]) gibt, in der $A_n$ für die Punkte von $E$ gültig ist. So bekommen wir die Folge

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \tag{3}$$

Die Annahme daß unendlich viele $E_n \neq 0$ sind, führt zu einem Widerspruch. Denn die Umgebungen der Punkte von $E_n$, in denen $A_n$ für die Punkte von $E$ gültig ist, bilden eine offene Menge $O_n$, die $E_n$ enthält. Wir haben so eine Folge $O_1, O_2, \ldots O_n, \ldots$ von offenen Mengen definiert, deren Summe jedes Element von $E$ enthält. Nach dem Borelschen Satz gibt es aber unter ihnen endlich viele $O_1, O_2, \ldots, O_N$, die $E$ auch bedecken; dies ist aber ein Widerspruch, da z. B. ein Element von $E_{N+1}$ zu keinem $O_n$ mit $n \leqslant N$ gehört. Die Folge (3) enthält also nur endlich viele Glieder, woraus folgt, daß es einen Index $M$ gibt, so daß $A_M$ für alle Elemente von $E$ gilt, w. z. b. w.

---

[7]) Eine Aussagenfolge $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ wird *stetig* genannt, wenn es zu jedem Punkt aus $E$, für den die Aussage $A_n$ gilt, eine Umgebung und eine Aussage $A_{n+p}$ gibt, so daß $A_{n+p}$ für jedes Element von $E$, das dieser Umgebung angehört, gültig ist.

[8]) P. Veress, l. c. [1]), p. 41.

[9]) Der Satz von Herrn E. Borel lautet: *Ist jedes Element einer kompakten abgeschlossenen Menge $E$ mindestens in einem Glied der Folge $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$ von offenen Mengen enthalten, so gibt es endlich viele Glieder dieser Folge, deren Summe die Ganze Menge $E$ bedeckt.* Die erwähnte Ableitung dieses Satzes gibt P. Veress, l. c. [1]), p. 37, an.

[10]) Unter einer *Umgebung* eines Punktes verstehen wir hier eine offene Menge, die den Punkt enthält.

***Erstes Korollar.*** *In einem Hausdorffschen Raum ist der zweite Satz von Herrn Veress dem Durchschnittssatz von Cantor äquivalent.*

Denn in einem Hausdorffschen Raum sind der Cantorsche und der Borelsche Satz miteinander äquivalent [11]).

***Zweites Korollar.*** *In dem n-dimensionalen euklidischen Raum ist der zweite Satz von Herrn Veress ohne das Auswahlaxiom beweisbar.*

Dies folgt aus dem ersten Korollar und der bekannten Tatsache, daß im $n$-dimensionalen euklidischen Raum der Durchschnittssatz von Cantor ohne das Auswahlaxiom beweisbar ist [12]).

***Drittes Korollar.*** Wie wir schon oben bemerkt haben, lassen sich viele Sätze der reellen Funktionentheorie (wie z. B. die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion, die auf einer kompakten abgeschlossenen Menge stetig definiert ist, u. s. w.) aus dem zweiten Satz von Herrn Veress ableiten. Nach dem Obigen *sind* also *diese Sätze im n-dimensionalen euklidischen Raum ohne das Auswahlaxiom beweisbar.*

***Viertes Korollar.*** *Die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion, die auf einer kompakten abgeschlossenen Menge überall stetig ist, folgt aus dem Borelschen Theorem* (d. h. man benötigt nicht das Borel-Lebesguesche Theorem).

Bemerkung. Es folgt aus dem Zermeloschen Axiom oder auch aus dem $V$-Postulat, daß eine Aussagenfolge, für die die Forderung (II) des ersten Satzes von Herrn Veress erfüllt ist, auf einer kompakten abgeschlossenen Menge eines Hausdorffschen Raumes auch stetig ist.

[11]) Dies ist ein spezieller Fall eines von Herrn S. Saks, *Sur l'équivalence de deux théorèmes de la théorie des ensembles*, Fund. Math. **2** (1921), p. 1-3, bewiesenen Satzes.

[12]) W. Sierpiński, *Un théorème sur les ensembles fermés*, Bull. Ac. des Sc. Cracovie (1918), p. 49-51.

# Sur les superpositions des automorphies continues d'un intervalle fermé.

Par

V. Knichal (Praha).

Soit $C$ l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ croissantes et continues, définies dans l'intervalle fermé $I=\langle 0,1\rangle$ et telles que

$$f(0)=0, \qquad f(1)=1.$$

MM. J. Schreier et S. Ulam [1]) ont démontré qu'il existe cinq fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \in C$ jouissant de la propriété suivante:

*Quelle que soient la fonction $f \in C$ et $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi$ qui est une superposition finie des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ et telle que*

$$|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon \quad \textit{pour} \quad x \in I.$$

Dans ce théorème, on peut remplacer les mots „cinq fonctions" par les mots „deux fonctions"; on peut énoncer même le suivant

***Théorème 1.*** *Il existe deux fonctions $\varphi, \psi \in C$, jouissant de la propriété suivante:*

*Quelle que soient la fonction $f \in C$ et $\varepsilon > 0$, il existe deux entiers positifs $n, m$ tels que*

$$(1) \qquad |f(x)-\psi^n \varphi^m(x)|<\varepsilon \quad \textit{pour} \quad x \in I.$$

La démonstration de ce théorème sera basée sur le lemme qui suit.

[1]) *Über topologische Abbildungen der euklidischen Sphären*, Fund. Math. **23** (1934), p. 102.