Anmerkungen.

[1]) Vgl. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, S. 399 ff.

[2]) Zu dem Begriff des Homomorphismus vgl. z.B. B. L. Van Der Waerden, *Moderne Algebra*, 1. Teil, Berlin (1930), S. 32.

[3]) Vgl. hiezu S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6** (1924), S. 244 ff.; A. Tarski, Przegląd mat.-fiz. **2** (1924), S. 47 ff.

[4]) Fast alle Ergebnisse der vorliegenden Arbeit (abgesehen von einigen spezielleren Anwendungen in § 3) stammen aus dem Jahre 1928; die Hauptergebnisse habe ich (ohne Beweis) in C. R. Soc. Sc. Vars. **22** (1929), Cl. III, S. 114 ff. veröffentlicht. Es bestehen gewisse Berührungspunkte zwischen den vorliegenden Betrachtungen und den Arbeiten von H. Hahn, Journ. f. Math. **157** (1927), S. 214 ff., und S. Banach, Stud. Math. **1** (1929), S. 211 ff. und S. 223 ff. (wo Banach seine früheren Untersuchungen in Fund. Math. **4** (1923), S. 7 ff., in abstraktere Form bringt). Hiezu ist jedoch zu bemerken, daß diese Autoren viel speziellere Voraussetzungen machen, indem sie ihre Untersuchungen auf die sog. linearen oder vektoriellen Räume beziehen; infolgedessen sind ihre Ergebnisse in erster Linie auf sozusagen stetige Gebilde anwendbar. Die vorliegende Konstruktion hingegen kann auf beliebige und insbesondere ganz diskrete Gebilde angewendet werden, was man an der Hand der Beispiele in § 3 sofort ersehen kann. — Wir bringen hier u. a. Verallgemeinerungen von Ergebnissen aus unserer Mitteilung in Fund. Math. **30** (1938), S. 218 ff.

[5]) Vgl. A. Lindenbaum et A. Tarski, C. R. Soc. Sc. Vars. **19** (1926), Cl. III, S. 319; A. Tarski, Atti Congr. Mat. Bologna 1928, 2. Bd., S. 251 f.

[6]) Vgl. z. B. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Mat. **3**, Warszawa-Lwów 1933, S. 7 ff. und 87 ff.

[7]) Sätze 3.2–3.6 und 3.12–3.14 sind algebraische (oder eher arithmetische) Übertragungen gewisser Ergebnisse aus der Theorie der Zerlegungsgleichheit, die in § 1 meiner Arbeit in Fund. Math. **30** (1938), S. 221 f. angegeben wurden. Und zwar entspricht Satz 3.2 dem Mittelwertsatz 1.7, Korollar 3.3 den Äquivalenzsätzen 1.9 und 1.10; Sätze 3.4–3.6 sind Übersetzungen der Divisionssätze 1.11–1.14, schließlich entsprechen Sätze 3.12–3.14 den Subtraktionssätzen 1.15–1.17.

[8]) Vgl. J. v. Neumann, Fund. Math. **13** (1929), S. 73 ff., sowie meine Mitteilung in Atti Congr. Mat. Bologna 1928, 2. Bd., S. 243 ff.

[9]) Einen anderen Beweis dieses Satzes habe ich in Fund. Math. **15** (1930), S. 42. ff., veröffentlicht.

[10]) Vgl. S. Banach, Fund. Math. **4** (1923), S. 7 ff.

[11]) Fund. Math. **30** (1938), S. 218 ff.

[12]) Vgl. hiezu meine eben zitierte Arbeit, S. 223 und 233 sowie S. 234, Anmerkungen 13 und 14.

[13]) Vgl. [10]) (das Problem wurde von S. Ruziewicz gestellt).

Ein Beitrag zum Mengerschen Begriff des fastmetrischen Raumes.

Von

Stanisław Gołąb (Kraków).

1. Der Fréchetsche Begriff der allgemeinen metrischen Räume wurde schon einigen Verallgemeinerungen unterworfen (halbmetrische Räume, quasimetrische Räume etc). Eine der neuesten Verallgemeinerungen ist der Begriff des *fastmetrischen Raumes*, der von Menger[1]) eingeführt wurde. Die Verallgemeinerung geht in der Richtung, dass der Fundamentalsatz über die Unterhalbstetigkeit der Bogenlänge erhalten bleibt, obwohl die Abstandsfunktion $\varrho(x, y)$ der Dreiecksungleichung nicht genügt. In der erwähnten Arbeit beschränkt sich Menger nicht nur auf allgemeine Betrachtungen, er gibt sogar interessante Anwendung auf das klassische Problem der Variationsrechnung. Der Hauptgrund dieser Anwendung liegt darin, dass der Verfasser mit Hilfe der Grundfunktion F den Raum derart metrisiert, dass der letzte ein fastmetrischer Raum wird, wonach die Sätze der vorher entwickelten Theorie angewandt werden können. Neben den Voraussetzungen der Stetigkeit und Beschränktheit der Grundfunktion F in dem vorgeschriebenen Gebiete Γ spielt eine wesentliche Rolle die Voraussetzung, dass die zugehörige Indicatrix in jedem Punkte des Gebietes Γ konvex ist.

Das Ziel dieser Note ist es eine in gewissem Sinne Umkehrung des Mengerschen Resultates zu beweisen. Ich zeige nämlich, dass die Konvexität der Indicatrix aus der Voraussetzung folgt, dass

[1]) K. Menger, *Metrische Geometrie und Variationsrechnung*, Fund. Math. **25** (1935), 441–458.

der Raum fastmetrisch ist (das Behalten der übrigen Voraussetzungen versteht sich von sich selbst). Das ganze Verfahren lässt sich auch auf Grund der Finslerschen Geometrie deuten. Wir werden den Beweis im zweidimensionalen Falle durchführen, er lässt sich aber ohne wesentliche Schwierigkeiten auf den allgemeinen n-dimensionalen Fall übertragen.

2. Es sei eine Funktion

$$F(x, y;\ p, q) \tag{1}$$

gegeben, die wir weiterhin *Grundfunktion* nennen werden, welche für alle Punkte (x, y) eines geschlossenen und beschränkten Gebietes Γ und für alle Paare (p, q) mit der Eigenschaft

$$|p| + |q| > 0 \tag{2}$$

definiert ist. Über die Grundfunktion setzen wir weiter voraus, dass sie *beständig positiv* und in bezug auf die Variablen (p, q) *positiv homogen vom Grade* 1 ist. Was die Regularitätsannahmen betrifft, setzen wir voraus, dass die Funktion F für alle zulässige Quadrupel der reellen Zahlen (x, y, p, q) *stetig* ist und ausserdem, dass sie in bezug auf (x, y) die *Lipschitzsche Bedingung* erfüllt. Damit wird folgende Ungleichheit gemeint:

$$|F(x_2, y_2; \cos\theta, \sin\theta) - F(x_1, y_1; \cos\theta, \sin\theta)| \leqslant L\cdot\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \tag{3}$$

die für alle θ erfüllt sein soll, wobei L eine positive Konstante bezeichnet.

Aus (3) und der Homogeneität der Grundfunktion folgt sofort:

$$|F(x_2, y_2; p, q) - F(x_1, y_1; p, q)| \leqslant L\cdot\sqrt{p^2+q^2}\cdot\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{4}$$

Die Gesamtheit der obigen Voraussetzungen werden wir kurz mit (V) *bezeichnen.*

Die Punkte des Bereiches Γ werden mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Das Symbol $\overline{AB}$ soll den *euklidischen* Abstand der Punkte A, B bedeuten. Dagegen für irgendwelche andere Metrik werden wir uns der Symbole $\varrho(A, B)$, $\varrho^*(A, B)$ u. s. w. bedienen.

Mit Hilfe der Grundfunktion F definieren wir in Γ eine spezifische Metrik und zwar folgendermassen:

$$\varrho(P_1, P_2) = F(x_1, y_1; x_2-x_1, y_2-y_1) \qquad \text{für} \quad P_1 \neq P_2, \tag{5}$$

wo P_i den Punkt mit Koordinaten (x_i, y_i) bezeichnet. Dabei wird wie üblich gesetzt:

$$\varrho(P_1, P_2) = 0, \qquad \text{wenn} \quad P_1 = P_2. \tag{6}$$

Unter der *Indicatrix* des Punktes $P_0(x_0, y_0)$ versteht man (nach Carathéodory) die Kurve von der Gleichung:

$$F(x_0, y_0; x-x_0, y-y_0) = 1. \tag{7}$$

Der Punkt P_0 wird der *Aufpunkt* der Indicatrix genannt.

Menger hat in der zitierten Arbeit folgenden Satz bewiesen: Genügt die Grundfunktion F den Voraussetzungen (V) und ist ausserdem die Indicatrix jedes Punktes *konvex*, so ist der mit der Metrik (5) aufgeprägte Raum ein fastmetrischer Raum.

Wir wollen folgende Umkehrung dieses Satzes beweisen:

Satz. *Genügt die Grundfunktion F den Voraussetzungen (V), so ist der mit Hilfe der Abstandsfunktion* (5) *definierte Raum nur dann fastmetrisch, wenn die Indicatrix in jedem Punkte des Gebietes Γ konvex ist.*

3. Beweis. Wir werden nur einen Teil der Definition des fastmetrischen Raumes ausnützen (die ganze Definition besteht aus einigen unabhängigen Eigenschaften). Ist nämlich der Raum fastmetrisch, so gilt in ihm die sog. *abgeschwächte Ungleichung*. Sie besteht darin, dass es eine nichtnegative Funktion $\Delta(u)$ gibt, die folgende Eigenschaften besitzt:

$$\Delta(0) = 0, \qquad \Delta(u) \text{ ist stetig für } u = 0, \tag{8}$$

$$\varrho(A, C) \leqslant \varrho(A, B) + \varrho(B, C) + \tag{9}$$

$$+\operatorname{Min}[\varrho(A,B), \varrho(B,C)]\cdot\Delta\{\operatorname{Max}[\varrho(A,B), \varrho(B,C)]\} \text{ für alle Tripel } A, B, C.$$

Den Beweis wollen wir *indirekt* durchführen. Wir setzen also voraus, dass es einen Punkt A des Gebietes Γ gibt, für welchen die Indicatrix I nicht konvex ist. Über den Punkt A kann vorausgesetzt werden, dass er ein *innerer* Punkt des Gebietes Γ ist, denn wäre A ein Randpunkt des Gebietes Γ, so würde es doch innere, hinreichend nahe Punkte geben, für welche die Indicatrix nicht konvex ist. Dies folgt nämlich aus der Tatsache, dass die Indicatrix des Punktes P sich stetig mit P ändert und dass eine hinreichend nahe Kurve zu einer konkaven Kurve notwendig konkav sein muss (es soll bemerkt werden, dass das Analoge für eine konvexe Kurve falsch ist!).

Aus der Konkavität der Indicatrix I folgt die Existenz von drei Punkten B, C, D auf I, derart das B innerhalb des Dreiecks A, C, D liegt. Der Beweis dieser Behauptung mag dem Leser überlassen werden. Im Folgenden werden die Punkte A, B, C, D fest gehalten. Mit P bezeichnen wir dagegen einen *beliebigen* Punkt des Abschnittes AB, der aber von A verschieden sein soll. In Abhängigkeit von P sollen nun die Punkte R und S wie folgt bestimmt werden. R (und S) sind die *einzigen* Punkte mit den Eigenschaften: der Vektor $\overrightarrow{AR}$ ($\overrightarrow{AS}$) ist parallel zu $\overrightarrow{AC}$ ($\overrightarrow{AD}$) und zugleich der Vektor $\overrightarrow{RP}$ ($\overrightarrow{SP}$) ist parallel zu $\overrightarrow{AD}$ ($\overrightarrow{AC}$). Es soll bemerkt werden, dass die folgenden Relationen gelten:

$$P \to A \;\supset\; R \to A \text{ und } S \to A. \tag{10}$$

In speziellem Falle, wo $P = B$ ist, bezeichnen wir die entsprechenden Punkte R, S mit R_0, S_0.

Mit $\varrho^*(X, Y)$ bezeichnen wir nun die Abstandsfunktion der Minkowskischen Metrik, die mit Hilfe der Indicatrix I auf der ganzen Ebene des Gebietes Γ erklärt wird.

Auf Grund eines Hilfssatzes, den ich zusammen mit Herrn Härlen [2]) bewiesen habe, besteht (infolgedessen, dass B innerhalb des Dreiecks ACD liegt) die Ungleichheit

$$\varrho^*(A, R_0) + \varrho^*(R_0, B) < \varrho^*(A, B).$$

Ferner haben wir

$$\varrho^*(R_0, B) = \varrho^*(A, S_0),$$

woraus

$$\varepsilon = \varrho^*(A, B) - \varrho^*(A, R_0) - \varrho^*(A, S_0) > 0 \tag{11}$$

ausfällt. Aus (11) bekommen wir

$$\varrho^*(A, B) = \varrho^*(A, R_0) + \varrho^*(A, S_0) + \varepsilon, \tag{12}$$

was, mit $\varrho^*(A, P)$ multipliziert,

$$\varrho^*(A,P)\cdot\varrho^*(A,B) = \varrho^*(A,R_0)\cdot\varrho^*(A,P) + \varrho^*(A,S_0)\cdot\varrho^*(A,P) + \varepsilon\varrho^*(A,P) \tag{13}$$

ergibt. Da aber B auf I liegt, so hat man

$$\varrho^*(A, B) = 1. \tag{14}$$

[2]) St. Gołąb—H. Härlen, *Minkowskische Geometrie*, Monatsh. f. Math. u. Phys. **38** (1931), 387—398. Vgl. Hilfssatz S. 389.

Anderseits folgt aus Ähnlichkeit der entsprechenden Figuren:

$$\varrho^*(A, R_0)\cdot\varrho^*(A, P) = \varrho^*(A, R), \qquad \varrho^*(A, S_0)\cdot\varrho^*(A, P) = \varrho^*(A, S). \tag{15}$$

(13), (14) und (15) ergeben zusammen:

$$\varrho^*(A, P) = \varrho^*(A, R) + \varrho^*(A, S) + \varepsilon\cdot\varrho^*(A, P). \tag{16}$$

Bemerken wir jetzt, dass für jeden Punkt X des Bereiches Γ haben wir nach Definition:

$$\varrho(A, X) = \varrho^*(A, X). \tag{17}$$

In der Formel (16) kann also das Sternzeichen weggelassen werden:

$$\varrho(A, P) = \varrho(A, R) + \varrho(A, S) + \varepsilon\cdot\varrho(A, P). \tag{18}$$

Da die Vektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{RP}$ äquipollente Vektoren sind, so haben wir auf Grund von (4):

$$|\varrho(R, P) - \varrho(A, S)| \leqslant L\cdot\overline{AR}\cdot\overline{AS}. \tag{19}$$

Aus Stetigkeit und Positivität der Grundfunktion sowie aus Beschränktheit und Geschlossenheit des Bereiches Γ folgt, dass die Werte der Funktion $F(x, y; \cos\theta, \sin\theta)$ zwischen zwei positiven Zahlen λ, μ liegen müssen:

$$0 < \lambda \leqslant F(x, y; \cos\theta, \sin\theta) \leqslant \mu < +\infty.$$

Daraus geht hervor, dass für irgendwelchen Punkt M der Indicatrix I die Ungleichheiten

$$1/\mu \leqslant \overline{AM} \leqslant 1/\lambda \tag{20}$$

gelten müssen. (19) und (20) ergeben also:

$$|\varrho(R, P) - \varrho(A, S)| \leqslant \frac{L}{\lambda^2}\cdot\varrho(A, R)\cdot\varrho(A, S). \tag{21}$$

Aus (20) folgt weiter:

$$\varrho(A, R) \leqslant \mu\cdot\overline{AR}, \qquad \varrho(A, S) \leqslant \mu\cdot\overline{AS}. \tag{22}$$

Aus (10) und (22) kann man auf Existenz einer Zahl $\delta > 0$ schliessen, die folgende Implikation erfüllt:

$$\varrho(A, P) < \delta \;\supset\; \operatorname{Max}\{\varrho(A, R),\, \varrho(A, S)\} < \frac{\varepsilon\lambda^2}{2L}. \tag{23}$$

Vorausgesetzt, dass im Folgenden der Punkt P auf AB gemäss (23) gewählt ist, wenden wir auf das Tripel A, R, P die charakteristiche Ungleichung (9) an, wobei R statt B und P statt C eingesetzt wird:

(24) $$\varrho(A,P)\leqslant\varrho(A,R)+\varrho(R,P)+\sigma(P)\cdot\Delta[\tau(P)].$$

Hier haben wir kürzehalber gesetzt:

(25) $$\sigma(P)=\mathrm{Min}[\varrho(A,R),\varrho(R,P)],\qquad \tau(P)=\mathrm{Max}[\varrho(A,R),\varrho(R,P)].$$

Durch Einsetzen von (18) in (24) bekommt man:

(26) $$\varrho(A,S)+\varepsilon\cdot\varrho(A,P)\leqslant\varrho(R,P)+\sigma(P)\cdot\Delta[\tau(P)].$$

Jetzt müssen wir zwei mögliche Fälle unterscheiden, und zwar:

(27a) $\varrho(A,R)\leqslant\varrho(R,P)$, (27b) $\varrho(A,R)>\varrho(R,P)$.

Ziehen wir zuerst den Fall (27a) in Betracht. In diesem Falle nimmt (26) unter Berücksichtigung von (21) folgende Gestalt an:

$$\varrho(A,R)\cdot\Delta[\varrho(R,P)]\geqslant\varepsilon\cdot\varrho(A,P)-\frac{L}{\lambda^2}\cdot\varrho(A,R)\cdot\varrho(A,S).$$

Daraus folgt

(28) $$\Delta[\varrho(R,P)]\geqslant\varepsilon\cdot\frac{\varrho(A,P)}{\varrho(A,R)}-\frac{L}{\lambda^2}\cdot\varrho(A,S).$$

Aus (18) schliessen wir aber, dass $\varrho(A,R)<\varrho(A,P)$, woraus die Ungleichheit (28) weiter geführt werden kann:

$$\Delta[\varrho(R,P)]>\varepsilon-\frac{L}{\lambda^2}\cdot\varrho(A,S).$$

Dies zusammen mit (23) zu

(29) $$\Delta[\varrho(R,P)]>\frac{\varepsilon}{2}>\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$$

führt.

Betrachten wir nun den Fall (27b). In diesem Falle bekommen wir aus (26):

$$\varrho(R,P)\,\Delta[\varrho(A,R)]\geqslant\varrho(A,S)+\varepsilon\cdot\varrho(A,P)-\varrho(R,P)$$

oder

$$\Delta[\varrho(A,R)]\geqslant\frac{\varrho(A,S)+\varepsilon\cdot\varrho(A,P)}{\varrho(R,P)}-1.$$

Berücksichtigt man (21) in der obigen Formel, so bekommt man

(30) $$\Delta[\varrho(A,R)]\geqslant\frac{1+\varepsilon\cdot\dfrac{\varrho(A,P)}{\varrho(A,S)}}{1+\dfrac{L}{\lambda^2}\cdot\varrho(A,R)}-1=\frac{\varepsilon\cdot\dfrac{\varrho(A,P)}{\varrho(A,S)}-\dfrac{L}{\lambda^2}\cdot\varrho(A,R)}{1+\dfrac{L}{\lambda^2}\cdot\varrho(A,R)}.$$

Aus (18) folgt jedoch $\varrho(A,S)<\varrho(A,P)$. Daraus, sowie aus (23), folgt schrittweise:

(31) $$\Delta[\varrho(A,R)]>\frac{\varepsilon-\dfrac{L}{\lambda^2}\cdot\varrho(A,R)}{1+\dfrac{L}{\lambda^2}\cdot\varrho(A,R)}>\frac{\dfrac{\varepsilon}{2}}{1+\dfrac{\varepsilon}{2}}=\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}.$$

(10) und (22) ergeben $\varrho(A,R)\to 0$ für $P\to A$. (10), (22) und (21) führen ebenso zu $\varrho(R,P)\to 0$ für $P\to A$. Dies zusammen mit (8), (29) und (31) ergibt endlich

$$\Delta(0)\geqslant\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$$

also

(32) $$\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\leqslant 0,$$

was einen Widerspruch mit (11) darstellt. Hiemit ist der Beweis unseres Satzes zum Ende gebracht.