négligeant au plus une infinité dénombrable de points, l'ensemble F est somme au plus d'une infinité dénombrable d'ensembles deux à deux disjoints qui sont des images biunivoques et continues de N_σ. Par conséquent, selon le lemme 2, F est une image biunivoque et continue de N_σ, quand on néglige au plus une infinité dénombrable de points, c. q. f. d.

Je tiens à remercier, en terminant, Mlle S. Braun de diverses remarques et corrections qu'elle m'a prêtées pendant la rédaction de cette Note.

Institut Mathématique
de l'Université Impériale de Hokkaidô,
Sapporo, Japon.

Algebraische Fassung des Maßproblems.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

Das geometrische Maßproblem besteht bekanntlich im Folgenden: es soll in einem gegebenen Punktmengensystem S eine Maßfunktion definiert werden, d. h. eine Funktion f, die jeder Menge X des Systems eine nichtnegative reelle Zahl $f(X)$, das sog. Maß, eindeutig zuordnet, wobei die als Eichmenge (Einheit des Maßes) gewählte Punktmenge E das Maß 1 erhält, zwei kongruente Punktmengen das gleiche Maß haben und schließlich das Maß der Summe zweier elementfremder Mengen gleich der Summe der Maße der beiden Summanden ist (von der Ausdehnung der letzten Forderung auf abzählbar viele Summanden wird hier abgesehen) [1].

In der vorliegenden Arbeit will ich eine möglichst allgemeine und abstrakte Fassung des Maßproblems skizzieren. In dieser Fassung gewinnen Begriffe und Ergebnisse einen algebraischen Charakter: es wird ein System von beliebigen Dingen betrachtet, für dessen Elemente eine stets ausführbare, kommutative und assoziative binäre Operation, die Addition, definiert ist; es wird gefragt, ob es einen Homomorphismus gibt, der dieses System auf eine Menge von nichtnegativen Zahlen abbildet, und zwar auf eine Menge, die mindestens eine von 0 verschiedene endliche Zahl enthält [2]. Es zeigt sich, daß die Möglichkeit, einen solchen Homomorphismus aufzustellen, ausschließlich von der Beschaffenheit des als Einheit gewählten Elements abhängt; eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür besteht in der sog. Normalität dieses Elements. Dieser Fundamentalsatz gründet sich auf gewisse Begriffe und Sätze, die an und für sich interessant zu sein scheinen und Verallgemeinerungen von gewissen geometrischen Begriffsbildungen darstellen (z.B. die Begriffe des inneren und des äußeren Maßes). Alle diese Ergebnisse sind in § 1 enthalten.

In § 2 wird auf die Möglichkeit hingewiesen, die Ergebnisse so allgemein zu fassen, daß sie von irgendwelchen Voraussetzungen über das betreffende System von Dingen und die zugehörige binäre Operation unabhängig werden.

In § 3 wird gezeigt, wie die abstrakte Konstruktion auf das eigentliche, geometrische Maßproblem angewendet werden kann. Es stellt sich dabei heraus, daß der Fundamentalsatz in der geometrischen Übertragung eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Maßfunktion angibt, die für alle Punktmengen irgendeines metrischen Raumes definiert ist: diese Bedingung besteht nämlich darin, daß die Eichmenge des Raumes nicht „paradoxal zerlegbar", d. h. mit seiner „Hälfte" nicht zerlegungsgleich ist [3]).

Durch die explizite Formulierung zahlreicher Hilfssätze wird die ganze Konstruktion, besonders in § 1, derart zergliedert, daß es überflüßig wäre, jeden einzelnen Satz mit einem genauen Beweis zu versehen; es dürfte wohl der Hinweis auf entsprechende vorhergehende Definitionen und Sätze genügen. Die Beweise sind übrigens ziemlich elementar; aus der ganzen Analysis braucht man z.B. etwa nur den Satz über die Existenz der oberen und der unteren Schranke in jeder beschränkten Menge reeller Zahlen. An einer Stelle kommt eine transfinite, auf dem Wohlordnungssatz beruhende Schlußweise vor. — Die Betrachtungen in § 3 haben einen mehr skizzenhaften Charakter und stützen sich teilweise auf Sätze, deren Beweis bisher nicht veröffentlicht wurde [4]).

§ 1. Es seien gegeben: ein System $\boldsymbol{S}$ von irgendwelchen Dingen, eine binäre Operation $+$ mit Elementen dieses Systems, die Addition, und ein ausgezeichnetes Element ε von $\boldsymbol{S}$, das Einheitselement.

Zur Bezeichnung der Elemente von $\boldsymbol{S}$ werden hier stets die Variablen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta \dots$ verwendet; $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{U}$ bezeichnen Teilsysteme von $\boldsymbol{S}$ und f, g, h Funktionen, die Elementen von $\boldsymbol{S}$ reelle Zahlen zuordnen. Mit k, l, m werden natürliche Zahlen, mit z reelle Zahlen, mit Z Mengen reeller Zahlen und mit $\varkappa, \lambda, \mu$ beliebige Ordnungszahlen bezeichnet. $\{x\}$ ist die Menge, die x als das einzige Element enthält; $\underset{x}{E}[B(x)]$ ist die Menge aller x, die der Bedingung $B(x)$ genügen.

Es werden folgende Postulate aufgestellt:

Postulat A. *Ist $\alpha, \beta \in \boldsymbol{S}$, so ist auch $\alpha+\beta \in \boldsymbol{S}$.*

Postulat B. *Ist $\alpha, \beta \in \boldsymbol{S}$, so ist $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.*

Postulat C. *Ist $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{S}$, so ist $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.*

Postulat D. $\varepsilon \in \boldsymbol{S}$.

Wir definieren:

Definition 1.1. *$\alpha \leqslant \beta$, wenn entweder $\alpha=\beta$, oder es ein Element ζ gibt, so daß $\alpha+\zeta=\beta$.*

Definition 1.2. $\alpha_1+\dots+\alpha_k=\alpha_1$ *für* $k=1$; $\alpha_1+\dots+\alpha_k=(\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1})+\alpha_k$ *für jedes* $k>1$.

Definition 1.3. $k\cdot\alpha=\alpha$ *für* $k=1$; $k\cdot\alpha=(k-1)\cdot\alpha+\alpha$ *für jedes* $k>1$.

Bemerkung 1.4. Elementare Folgerungen aus diesen Postulaten und Definitionen (etwa die allgemeinen kommutativen und assoziativen Gesetze für die Addition $\alpha_1+\dots+\alpha_k$ oder die assoziativen und distributiven Gesetze für die Multiplikation $k\cdot\alpha$) werden hier nicht gegeben.

Definition 1.5. *α heißt endlich in Bezug auf δ (oder beschränkt durch δ), in Zeichen $\alpha \in \boldsymbol{E}(\delta)$, wenn es ein k gibt, für das $\alpha \leqslant k\cdot\delta$ ist.*

$\boldsymbol{E}(\delta)$ bezeichnet somit das System aller Elemente $\alpha \in \boldsymbol{S}$, die in Bezug auf das Element δ endlich sind.

Korollar 1.6. *Es ist stets $\delta \in \boldsymbol{E}(\delta)$.* [Nach 1.1, 1.3, 1.5].

Korollar 1.7. *Damit $\alpha+\beta \in \boldsymbol{E}(\delta)$, ist notwendig und hinreichend, daß $\alpha, \beta \in \boldsymbol{E}(\delta)$; damit $\alpha_1+\dots+\alpha_k \in \boldsymbol{E}(\delta)$, ist notwendig und hinreichend, daß $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \boldsymbol{E}(\delta)$; damit $k\cdot\alpha \in \boldsymbol{E}(\delta)$, ist notwendig und hinreichend, daß $\alpha \in \boldsymbol{E}(\delta)$.* [Nach A, B, C, 1.1, 1.2, 1.3, 1.5].

Korollar 1.8. *Ist $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, bzw. $\alpha+\gamma \leqslant \beta+\gamma$, und $\gamma \in \boldsymbol{E}(\delta)$, so gibt es ein k, für das $\alpha+k\cdot\delta=\beta+k\cdot\delta$, bzw. $\alpha+k\cdot\delta \leqslant \beta+k\cdot\delta$.* [Nach A, B, C, 1.1, 1.3, 1.5].

Definition 1.9. *α heißt normal, in Zeichen $\alpha \in \boldsymbol{Nrm}$, wenn es kein k gibt, so daß $(k+1)\cdot\alpha \leqslant k\cdot\alpha$.*

Korollar 1.10. *Ist $\alpha \in \boldsymbol{Nrm}$ und $k\cdot\alpha=l\cdot\alpha$, bzw. $k\cdot\alpha \leqslant l\cdot\alpha$, so ist $k=l$, bzw. $k \leqslant l$.* [Nach A, C, 1.1, 1.3, 1.9].

In den weiteren Betrachtungen werden wir uns fortwährend auf die obigen Postulate, Definitionen und Sätze stützen, wenn wir sie auch nur ausnahmsweise explizite zitieren.

Definition 1.11. f heißt eine Maßfunktion im System $\boldsymbol{T}$, in Zeichen: $f \epsilon \mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, wenn $\varepsilon \epsilon \boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und f folgenden Bedingungen genügt:

(i) *jedem Element $\zeta \epsilon \boldsymbol{T}$ wird eine reelle Zahl $f(\zeta) \geqslant 0$ und insbesondere dem Element ε die Zahl $f(\varepsilon)=1$ zugeordnet;*

(ii) ist $\zeta_1, \ldots, \zeta_k, \eta_1, \ldots, \eta_l \epsilon \boldsymbol{T}$ und $\zeta_1 + \ldots + \zeta_k \leqslant \eta_1 + \ldots + \eta_l$, so ist $f(\zeta_1) + \ldots + f(\zeta_k) \leqslant f(\eta_1) + \ldots + f(\eta_l)$.

Bemerkung 1.12. Die etwas komplizierte Form der Bedingung (ii) hängt mit der Allgemeinheit der Definition zusammen; unter spezielleren Voraussetzungen über das System $\boldsymbol{T}$ läßt sich diese Bedingung vereinfachen (s. weiter unten 1.18 und 1.19).

Bemerkung 1.13. Unter reellen Zahlen werden hier ausschließlich endliche reelle Zahlen gemeint. Läßt man $+\infty$ als einen möglichen Wert von Maßfunktionen zu, so kann man sich in Definition 1.11 (sowie in allen weiteren Definitionen und Sätzen) von der Beschränkung auf Elemente des Systems $\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und auf Teilsysteme von $\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ befreien; jede Maßfunktion f im System $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{E}(\varepsilon)$ kann dann automatisch auf das ganze System $\boldsymbol{T}$ erweitert werden: es genügt, $f(\zeta) = +\infty$ für jedes $\zeta \epsilon \boldsymbol{T} - \boldsymbol{E}(\varepsilon)$ zu setzen.

Bemerkung 1.14. Die Formel $f(\varepsilon)=1$, die in 1.11 vorkommt, spielt im folgenden keine wesentliche Rolle und kann durch $f(\varepsilon) \neq 0$ ersetzt werden.

Satz 1.15. Ist $f \epsilon \mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k \epsilon \boldsymbol{T}$, so ist $f(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) = f(\alpha_1) + \ldots + f(\alpha_k)$. [Nach 1.11].

Korollar 1.16. Ist $f \epsilon \mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha, \beta, \alpha+\beta \epsilon \boldsymbol{T}$, so ist $f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta)$; ist $f \epsilon \mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha, k \cdot \alpha \epsilon \boldsymbol{T}$, so ist $f(k \cdot \alpha) = k \cdot f(\alpha)$. [Nach 1.15].

Satz 1.17. Ist $f \epsilon \mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, $\alpha, \beta \epsilon \boldsymbol{T}$, $\gamma \epsilon \boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und $\alpha+\gamma = \beta+\gamma$, bzw. $\alpha+\gamma \leqslant \beta+\gamma$, so ist $f(\alpha)=f(\beta)$, bzw. $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$. [Nach 1.8, 1.11].

Satz 1.18. $\boldsymbol{T}$ erfülle folgende Bedingungen:

(I) $\varepsilon \epsilon \boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{E}(\varepsilon)$;

(II) *ist $\zeta, \eta \epsilon \boldsymbol{T}$, so ist auch $\zeta + \eta \epsilon \boldsymbol{T}$.*

Damit unter diesen Voraussetzungen $f \epsilon \mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, ist notwendig und hinreichend, daß f der Bedingungen (i) *aus 1.11 sowie folgenden Bedingungen genügt:*

(ii) *ist $\zeta, \eta, \zeta+\eta \epsilon \boldsymbol{T}$, so ist $f(\zeta+\eta) = f(\zeta)+f(\eta)$;*

(iii) *ist $\zeta, \eta \epsilon \boldsymbol{T}$ und $\zeta \leqslant \eta$, so ist $f(\zeta) \leqslant f(\eta)$.* [Nach 1.11, 1.16].

Korollar 1.19. Es sei $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{E}(\varepsilon)$ oder, allgemeiner, $\boldsymbol{T}$ erfülle die Bedingungen (I) *und* (II) *aus 1.18 sowie folgender Bedingung:*

(III) *ist $\zeta, \zeta+\eta \epsilon \boldsymbol{T}$, so ist $\eta \epsilon \boldsymbol{T}$.*

Damit unter diesen Voraussetzungen $f \epsilon \mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, ist notwendig und hinreichend, daß f den Bedingungen (i) *aus 1.11 und* (ii) *aus 1.18 genügt.* [Nach 1.6, 1.7, 1.18].

Bemerkung 1.20. In 1.11 und 1.18, aber nicht in 1.19, kann man (i) etwas vereinfachen und zwar die Zeichen „$\geqslant 0$" weglassen (aus 1.11 (ii), bzw. 1.18 (ii), (iii), folgt schon $f(\zeta) \geqslant 0$ für jedes $\zeta \epsilon \boldsymbol{T}$).

Satz 1.21. Ist $f \epsilon \mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, $\alpha \epsilon \boldsymbol{T}$ und $f(\alpha) \neq 0$, so ist $\alpha \epsilon \boldsymbol{Nrm}$; insbesondere ist $\varepsilon \epsilon \boldsymbol{Nrm}$, wenn es ein System $\boldsymbol{T}$ und eine Funktion f gibt, so daß $f \epsilon \mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$. [Nach 1.9, 1.11].

Bemerkung 1.22. Aus 1.11 und 1.21 ergeben sich gewisse Bedingungen, die notwendig dafür sind, daß es eine Maßfunktion in einem gegebenen System $\boldsymbol{T}$ und insbesondere in $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{E}(\varepsilon)$ gibt; diese Bedingungen sind nämlich $\varepsilon \epsilon \boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und $\varepsilon \epsilon \boldsymbol{Nrm}$ (für $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{E}(\varepsilon)$ ist die erstere Bedingung offenbar erfüllt). Unsere Hauptaufgabe ist nachzuweisen, daß die beiden Bedingungen auch hinreichend sind (Satz 1.58). Dazu muß man folgendes zeigen: (1) die beiden Bedingungen sind hinreichend für das kleinste in Betracht kommende System $\boldsymbol{T}$, und zwar für $\boldsymbol{T} = \{\varepsilon\}$ (vgl. 1.23); (2) gibt es eine Maßfunktion f in einem System $\boldsymbol{T}$, so kann sie auf jedes umfassendere System $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{E}(\varepsilon)$ erweitert werden (vgl. 1.24, 1.42, 1.55).

Satz 1.23. Ist $\boldsymbol{T} = \{\varepsilon\}$, so ist dann und nur dann $f \epsilon \mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, wenn $\varepsilon \epsilon \boldsymbol{Nrm}$ und $f(\varepsilon)=1$; ist also $\varepsilon \epsilon \boldsymbol{Nrm}$, so gibt es eine Maßfunktion in $\boldsymbol{T} = \{\varepsilon\}$. [Nach 1.10, 1.11, 1.22].

Satz 1.24. Es sei $\boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{T}_1 \ldots \boldsymbol{T}_\varkappa \ldots$ eine (endliche oder) transfinite Folge von Systemen, derart daß $\varepsilon \epsilon \boldsymbol{T}_\varkappa \subset \boldsymbol{T}_\lambda$ für $\varkappa \leqslant \lambda < \mu$ (wo μ eine vorgegebene Ordnungszahl >0 ist). Damit $f \epsilon \mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T}_0 + \boldsymbol{T}_1 + \ldots + \boldsymbol{T}_\varkappa \ldots)$, ist notwendig und hinreichend, daß $f \epsilon \mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T}_\varkappa)$ für jedes $\varkappa < \mu$. [Nach 1.11].

Definition 1.25. Es sei $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$. Die obere, bzw. untere, Schranke der Zahlen z von der Form

$$z=[f(\zeta_1)+\ldots+f(\zeta_k)-f(\eta_1)-\ldots-f(\eta_l)]/m,$$

wo $\zeta_1,\ldots,\zeta_k,\eta_1,\ldots,\eta_l\,\varepsilon\,\boldsymbol{T}$ und

$$\zeta_1+\ldots+\zeta_k\leqslant\eta_1+\ldots+\eta_l+m\cdot\alpha,\quad \text{bzw.}\quad \eta_1+\ldots+\eta_l+m\cdot\alpha\leqslant\zeta_1+\ldots+\zeta_k,$$

wird inneres, bzw. äußeres, Maß des Elements α in Bezug auf die Maßfunktion f in $\boldsymbol{T}$ genannt und mit $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$, bzw. $f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$, bezeichnet.

Satz 1.26. Es sei $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$; $\boldsymbol{T}$ genüge dabei der Bedingung (II) *aus 1.18. Dann ist $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$, bzw. $f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$, die obere, bzw. untere, Schranke der Zahlen $z=[f(\zeta)-f(\eta)]/m$, wo $\zeta,\eta\in\boldsymbol{T}$ und $\zeta\leqslant\eta+m\cdot\alpha$, bzw. $\eta+m\cdot\alpha\leqslant\zeta$.* [Nach 1.15, 1.25].

Korollar 1.27. Es sei $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$; $\boldsymbol{T}$ genüge dabei den Bedingungen (II) *aus 1.18 und* (III) *aus 1.19. Dann ist $f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$ die untere Schranke der Zahlen $z=f(\zeta)/m$, wo $\zeta\in\boldsymbol{T}$ und $m\cdot\alpha\leqslant\zeta$.* [Nach 1.16, 1.26].

Bemerkung 1.28. Für das innere Maß besteht kein Analogon zu 1.27. Hier tritt bereits eine Asymmetrie zwischen $f_i^{(\boldsymbol{T})}$ und $f_e^{(\boldsymbol{T})}$ ein, die weiter unten in 1.44 noch einmal erscheint. Der eigentliche Grund dieser Asymetrie liegt darin, daß die Operation $\alpha+\beta$ nicht umkehrbar ist.

Satz 1.29. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, so sind $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$ und $f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$ zwei bestimmte reelle Zahlen und es gilt: $0\leqslant f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)\leqslant f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$. [Nach 1.5, 1.11, 1.25].

Satz 1.30. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha\in\boldsymbol{T}$, so ist $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)=f(\alpha)=f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$. [Nach 1.11, 1.25].

Satz 1.31. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha,\beta\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, so ist

$$f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)+f_i^{(\boldsymbol{T})}(\beta)\leqslant f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha+\beta)\leqslant f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)+f_e^{(\boldsymbol{T})}(\beta)\leqslant$$
$$\leqslant f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha+\beta)\leqslant f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)+f_e^{(\boldsymbol{T})}(\beta).$$

[Nach 1.25, 1.29].

Korollar 1.32. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, $\alpha\in\boldsymbol{T}$ und $\beta\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, so ist $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f_i^{(\boldsymbol{T})}(\beta)$ und $f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f_e^{(\boldsymbol{T})}(\beta)$. [Nach 1.11, 1.30, 1.31].

Korollar 1.33. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha+\beta\in\boldsymbol{T}$, so ist

$$f(\alpha+\beta)=f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)+f_e^{(\boldsymbol{T})}(\beta)=f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)+f_i^{(\boldsymbol{T})}(\beta).$$

[Nach 1.11, 1.30, 1.31].

Satz 1.34. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, so ist $f_i^{(\boldsymbol{T})}(k\cdot\alpha)=k\cdot f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$ und $f_e^{(\boldsymbol{T})}(k\cdot\alpha)=k\cdot f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$. [Nach 1.25, 1.29].

Korollar 1.35. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, so ist $f_i^{(\boldsymbol{T})}(k\cdot\varepsilon)=k=f_e^{(\boldsymbol{T})}(k\cdot\varepsilon)$. [Nach 1.11, 1.30, 1.34].

Satz 1.36. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, $\beta,\gamma\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, so ist $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)=f_i^{(\boldsymbol{T})}(\beta)$ und $f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)=f_e^{(\boldsymbol{T})}(\beta)$. [Nach 1.8, 1.31, 1.35].

Korollar 1.37. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, $\beta\gamma\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und $\alpha+\gamma\leqslant\beta+\gamma$ (oder insbesondere $\alpha\leqslant\beta$), so ist $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)\leqslant f_i^{(\boldsymbol{T})}(\beta)$ und $f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)\leqslant f_e^{(\boldsymbol{T})}(\beta)$. [Nach 1.29, 1.31, 1.36].

Satz 1.38. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $g\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{U})$, so sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)=g_i^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)$, *bzw.* $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)\leqslant g_i^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)$, *für jedes* $\zeta\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$;

(ii) $f_e^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)=g_e^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)$, *bzw.* $f_e^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)\geqslant g_e^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)$, *für jedes* $\zeta\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$.

[Nach 1.5, 1.31, 1.35].

Satz 1.39. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und ist $f(\zeta)=g(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{T}$, so ist auch $g\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und es gilt: $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)=g_i^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)\leqslant f_e^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)=g_e^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$. [Nach 1.11, 1.25, 1.29].

Satz 1.40. Ist $\varepsilon\in\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{U}$ und $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{U})$, so ist auch $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und es gilt: $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)\leqslant f_i^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)\leqslant f_e^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)\leqslant f_e^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$. [Nach 1.24, 1.25, 1.29].

Satz 1.41. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, $\alpha\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)\leqslant f(\alpha)\leqslant f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$, so ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T}+\{\alpha\})$. [Nach 1.8, 1.11, 1.25, 1.29].

Korollar 1.42. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, so ist $f_i^{(\boldsymbol{T})}\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T}+\{\alpha\})$ und $f_e^{(\boldsymbol{T})}\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T}+\{\alpha\})$. [Nach 1.29, 1.30, 1.39, 1.41].

Korollar 1.43. Ist $\varepsilon\in\boldsymbol{T}$ und $\alpha\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, so ist dann und nur dann $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T}+\{\alpha\})$, wenn $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)\leqslant f(\alpha)\leqslant f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$. [Nach 1.30, 1.40, 1.41].

Satz 1.44. Es sei $\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{U}$; $\boldsymbol{U}$ genüge den Bedingungen (II) *aus 1.18 und* (III) *aus 1.19. Ist dann $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, $g\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{U})$ und $f_e^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)=g(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{U}$, so ist $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)=g_i^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)$ und $f_e^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)=g_e^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$.*
[Nach 1.11, 1.27, 1.30, 1.34, 1.37, 1.38, 1.39, 1.40].

Die nächstfolgenden Definitionen und Sätze 1.45–1.52 stehen nicht im unmittelbaren Zusammenhang mit unserer Hauptaufgabe (vgl. 1.22), scheinen aber an und für sich von Interesse zu sein und sind für gewisse Anwendungen wichtig.

Definition 1.45. Es sei $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$. Jedes Element $\alpha\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, wo $f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)=f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$, wird meßbar in Bezug auf die Maßfunktion f in T genannt; das System der meßbaren Elemente wird mit $\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$ bezeichnet.

Definition 1.46. Es sei $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$. Ist $\alpha\in\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$, so wird die Zahl $z=f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)=f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$ erweitertes Maß in Bezug auf die Maßfunktion f in $\boldsymbol{T}$ genannt und mit $f_p^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$ bezeichnet; die Funktion $f_p^{(\boldsymbol{T})}$ heißt natürliche Erweiterung der Maßfunktion f in $\boldsymbol{T}$.

Satz 1.47. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha\in\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$, so ist $\alpha\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und $f_p^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$ ist eine bestimmte reelle Zahl $\geqslant 0$. [Nach 1.29, 1.45, 1.46].

Satz 1.48. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\alpha\in\boldsymbol{T}$, so ist $\alpha\in\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$ und $f_p^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)=f(\alpha)$; insbesondere ist $\varepsilon\in\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$ und $f_p^{(\boldsymbol{T})}(\varepsilon)=1$.
[Nach 1.11, 1.30, 1.45, 1.46].

Satz 1.49. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und gehören irgend zwei von den drei Elementen α,β und $\alpha+\beta$ zu $\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$, so gehört auch das dritte Element zu $\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$ und es gilt $f_p^{(\boldsymbol{T})}(\alpha+\beta)=f_p^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)+f_p^{(\boldsymbol{T})}(\beta)$.
[Nach 1.31, 1.45, 1.46].

Satz 1.50. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und gehört irgendein von den zwei Elementen α und $k\cdot\alpha$ zu $\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$, so gehört auch das andere zu $\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$ und es gilt $f_p^{(\boldsymbol{T})}(k\cdot\alpha)=k\cdot f_p^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$. [Nach 1.34, 1.45, 1.46].

Satz 1.51. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, $\alpha\in\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$ $\gamma\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, so ist auch $\beta\in\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$ und $f_p^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)=f_p^{(\boldsymbol{T})}(\beta)$. [Nach 1.36, 1.45, 1.46].

Satz 1.52. Es sei $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$; setzen wir $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$ und $g(\zeta)=f_p^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{U}$. Dann ist $g\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{U})$ und es gilt: $g_i^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)=f_i^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)$ sowie $g_e^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)=f_e^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$.
[Nach 1.19, 1.44, 1.46, 1.47, 1.48, 1.49].

Korollar 1.53. Unter den Voraussetzungen von 1.52 ist $\boldsymbol{M}(g,\boldsymbol{U})=\boldsymbol{U}$ und $g_p^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)=g(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{U}$.
[Nach 1.45, 1.46, 1.52].

Satz 1.54. Es sei $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$ und $g\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{U})$. Ist dann $g(\zeta)=f(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{T}$, so ist $g(\zeta)=f_p^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{U}$, sowie $g_i^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)=f_i^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)$ und $g_e^{(\boldsymbol{U})}(\zeta)=f_e^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{E}(\varepsilon)$.
[Nach 1.30, 1.39, 1.40, 1.46, 1.48, 1.52].

Satz 1.55. Ist $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ und $\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{U}\subset\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, so gibt es eine Funktion $g\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{U})$, derart daß $g(\zeta)=f(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{T}$.

Dieser wichtige Erweiterungssatz ergibt sich leicht aus 1.24 und 1.42 auf Grund des Wohlordnungssatzes mit Hilfe der transfiniten Induktion.

Eine Ergänzung hiezu bildet

Satz 1.56. Es sei $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, $\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{U}\subset\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und $\alpha\in\boldsymbol{U}$; Z sei die Menge der Zahlen z, für die es eine Funktion $g\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{U})$ gibt, derart daß $g(\zeta)=f(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{T}$ und $g(\alpha)=z$. Es ist dann

$$Z=\underset{z}{E}\,[f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)\leqslant z\leqslant f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)];$$

$f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$ ist also die kleinste und $f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$ die größte aller Zahlen der Menge Z. [Nach 1.11, 1.39, 1.40, 1.43, 1.55].

Korollar 1.57. Es sei $f\in\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$, $\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{U}\subset\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und $\alpha\in\boldsymbol{U}$. Folgende Bedingungen sind dann äquivalent:

(i) *$\alpha\in\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$;*

(ii) *sind g und h zwei beliebige Maßfunktionen in $\boldsymbol{U}$ und ist $g(\zeta)=f(\zeta)=h(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{T}$, so ist $g(\alpha)=h(\alpha)$;*

(iii) *ist g eine beliebige Maßfunktion in $\boldsymbol{U}$ und ist $g(\zeta)=f(\zeta)$ für jedes $\zeta\in\boldsymbol{T}$, so ist $g(\alpha)=f_p^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$, bzw. $=f_i^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$, bzw. $=f_e^{(\boldsymbol{T})}(\alpha)$.*
[Nach 1.45, 1.46, 1.56].

Folgender Existenzsatz kann als Hauptergebnis der vorliegenden Betrachtungen angesehen werden:

Satz 1.58. Damit es eine Maßfunktion im System $\boldsymbol{T}$ *gibt, ist notwendig und hinreichend, daß* $\varepsilon\,\epsilon\,\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ *und* $\varepsilon\,\epsilon\,\boldsymbol{Nrm}$; *damit es insbesondere eine Maßfunktion in* $\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ *gibt, ist notwendig und hinreichend, daß* $\varepsilon\,\epsilon\,\boldsymbol{Nrm}$. [Nach 1.6, 1.11, 1.21, 1.23, 1.55].

Bemerkung 1.59. Mit Rücksicht auf seinen fundamentalen Charakter wollen wir diesen Satz noch in der üblichen algebraischen Terminologie formulieren (wobei wir auch $+\infty$ als einen möglichen Wert einer Maßfunktion zulassen, vgl. 1.14):

Es sei $\boldsymbol{S}$ *ein System von Dingen, für dessen Elemente* $\alpha,\beta\ldots$ *eine stets ausführbare, kommutative und assoziative binäre Operation* $+$ *bestimmt ist;* ε *sei ein beliebiges Element von* $\boldsymbol{S}$. *Damit es einen Homomorphismus gibt, der das ganze System* $\boldsymbol{S}$ *(oder irgendein Teilsystem* $\boldsymbol{T}$ *von* $\boldsymbol{S}$*) auf eine Menge von nichtnegativen reellen Zahlen, jede Summe* $\alpha+\beta$ *auf die Summe der zugeordneten Zahlen und* ε *auf eine endliche positive Zahl abbildet, ist notwendig und hinreichend, daß* ε *im Sinne von Definition 1.9 normal ist.*

Mit Rücksicht auf Anwendungen wollen wir hier noch paar Begriffe speziellerer Natur erörtern.

Wir fügen zunächst dem anfangs gegebenen Postulatensystem noch folgenden Satz hinzu.

Postulat E. Es gibt keine natürliche Zahl k, *für die* $(k+1)\cdot\varepsilon\leqslant k\cdot\varepsilon$.

Bemerkung 1.60. Postulate D und E drücken zusammen aus, daß ε normal ist.

Definition 1.61. Ist $\alpha\,\epsilon\,\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, *so wird die obere, bzw. untere, Schranke der Menge aller* $z=(k-l)/m$, *wo* $k\cdot\varepsilon\leqslant l\cdot\varepsilon+m\cdot\alpha$, *bzw.* $l\cdot\varepsilon+m\cdot\alpha\leqslant k\cdot\varepsilon$, *inneres, bzw. äußeres, absolutes Maß des Elements* α *genannt und mit* $a_i(\alpha)$, *bzw.* $a_e(\alpha)$, *bezeichnet.*

Definition 1.62. Jedes Element $\alpha\,\epsilon\,\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, *wo* $a_i(\alpha)=a_e(\alpha)$, *nennen wir absolut meßbar und bezeichnen das System dieser Elemente mit* $\boldsymbol{A}$; *ist* $\alpha\,\epsilon\,\boldsymbol{A}$ *und* $z=a_i(\alpha)=a_e(\alpha)$, *so wird die Zahl* z *absolutes Maß des Elements* α *genannt und mit* $a(\alpha)$ *bezeichnet.*

Satz 1.63. Ist $\boldsymbol{T}=\{\varepsilon\}$, *so sind die Formeln:* $f\,\epsilon\,\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ *und* $f(\varepsilon)=1$ *äquivalent; jede dieser Formeln hat zur Folge, daß* $a_i(\zeta)=f_i^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)$ *und* $a_e(\zeta)=f_e^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)$ *für jedes* $\zeta\,\epsilon\,\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$ *und* $a(\zeta)=f_p^{(\boldsymbol{T})}(\zeta)$ *für jedes* $\zeta\,\epsilon\,\boldsymbol{A}$. [Nach 1.23, 1.25, 1.45, 1.46, 1.61, 1.62].

Korollar 1.64. Es gilt: $\alpha\,\epsilon\,\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{A})$, $a_i^{(\boldsymbol{A})}(\zeta)=a_i(\zeta)$ *und* $a_e^{(\boldsymbol{A})}(\zeta)=a_e(\zeta)$ *für jedes* $\zeta\,\epsilon\,\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, *ferner* $\boldsymbol{M}(a,\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ *und* $a_p^{(\boldsymbol{A})}(\zeta)=a(\zeta)$ *für jedes* $\zeta\,\epsilon\,\boldsymbol{A}$. [Nach 1.52, 1.53, 1.63].

Bemerkung 1.65. Auf Grund von 1.63 und 1.64 erweisen sich die soeben definierten absoluten Begriffe als Spezialfälle der vorher betrachteten relativen Begriffe. Die wichtigsten Sätze über diese neuen Begriffe können somit als unmittelbare Folgerungen aus den uns schon bekannten allgemeineren Sätzen gewonnen werden. So darf man z.B. mit Rücksicht auf 1.64 in Sätzen 1.29–1.37 und 1.47–1.51 $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{M}(f,\boldsymbol{T})$ durch $\boldsymbol{A}$, f und $f_p^{(\boldsymbol{T})}$ durch a, ferner $f_i^{(\boldsymbol{T})}$ durch a_i und $f_e^{(\boldsymbol{T})}$ durch a_e ersetzen und dabei die Voraussetzung: $f\,\epsilon\,\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{T})$ weglassen. Bei den Sätzen 1.56 und 1.57 ist es vorteilhafter anders zu verfahren, und zwar auf Grund von 1.63 $\boldsymbol{T}$ durch $\{\varepsilon\}$ zu ersetzen, $f_i^{(\boldsymbol{T})}$, $f_e^{(\boldsymbol{T})}$ und $f_p^{(\boldsymbol{T})}$ aber wiederum durch a_i, a_e und a; nach einer Vereinfachung erhält man dann:

Satz 1.66. Es sei $\varepsilon\,\epsilon\,\boldsymbol{U}\subset\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ *und* $\alpha\,\epsilon\,\boldsymbol{U}$; Z *sei die Menge der Zahlen* z, *für die es eine Funktion* $g\,\epsilon\,\mathfrak{Ms}(\boldsymbol{U})$ *gibt, so daß* $g(\alpha)=z$. *Es ist dann* $Z=\underset{z}{E}[a_i(\alpha)\leqslant z\leqslant a_e(\alpha)]$; $a_i(\alpha)$ *ist also die kleinste und* $a_e(\alpha)$ *die größte aller Zahlen der Menge* Z. [Nach 1.11, 1.56, 1.63].

Korollar 1.67. Es sei $\varepsilon\,\epsilon\,\boldsymbol{U}\subset\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ *und* $\alpha\,\epsilon\,\boldsymbol{U}$. *Folgende Bedingungen sind dann äquivalent:*

(i) $\alpha\,\epsilon\,\boldsymbol{A}$;

(ii) $g(\alpha)=h(\alpha)$ *für beliebige Maßfunktionen* g *und* h *in* $\boldsymbol{U}$;

(iii) $g(\alpha)=a(\alpha)$, *bzw.* $=a_i(\alpha)$, *bzw.* $=a_e(\alpha)$ *für jede Maßfunktion* g *in* $\boldsymbol{U}$. [Nach 1.61, 1.62, 1.66].

§ 2. Man kann fragen, inwiefern die Postulate von § 1 zur Begründung der bisherigen Ergebnisse notwendig sind. Es stellt sich nun folgendes heraus: bei einer geeigneten Verallgemeinerung der betreffenden Begriffe bewahren die wichtigsten Ergebnisse aus § 1 auch dann ihre Gültigkeit, wenn keine allgemeinen Voraussetzungen über das System $\boldsymbol{S}$ und die Operation $+$ getroffen werden. Insbesondere bleibt der Fundamentalsatz 1.58 in Kraft: nach wie vor hängt die Existenz von Maßfunktionen lediglich von der Beschaffenheit des Einheitselements ab.

Wir wollen hier diesem Gedanken einen ganz konkreten und präzisen Ausdruck geben. Da aber wegen der Komplizierung der Begriffe die Konstruktion in ihren Einzelheiten wesentlich an Interesse verliert, so wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf den Fundamentalsatz 1.58 konzentrieren.

Es seien also gegeben: ein System S, eine binäre Operation $+$ und ein Element ε; es werden keine Eigenschaften dieser Begriffe vorausgesetzt (nicht einmal die, daß die Operation $+$, mit Elementen von S ausgeführt, immer ein bestimmtes Ding und umsoweniger ein neues Element von S ergibt). — Mit φ, ψ, χ wollen wir endliche Folgen von Elementen des Systems S bezeichnen; im übrigen wird die Symbolik aus § 1 verwendet.

Wir nehmen folgende Definitionen an:

Definition 2.1. Zwei endliche Folgen φ und ψ von Elementen des Systems S heißen unmittelbar äquivalent, in Zeichen: $\varphi \sim \psi$, wenn sie einer der Bedingungen (i) *und* (ii) *genügen:*

(i) *die Folge φ ist eine Permutation der Folge ψ;*

(ii) *es gibt ein k, so daß eine dieser Folgen k, die andere $k+1$ Elemente hat und daß dabei $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = \psi_2, \ldots, \varphi_{k-1} = \psi_{k-1}$ und entweder $\varphi_k = \psi_k + \psi_{k+1}$ oder $\psi_k = \varphi_k + \varphi_{k+1}$ ist.*

Definition 2.2. Zwei Folgen φ und ψ heißen äquivalent, wenn es Folgen $\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(k)}$ gibt, so daß $\varphi \sim \chi^{(1)} \sim \ldots \sim \chi^{(k)} \sim \psi$.

Definition 2.3. $\alpha \in \boldsymbol{E}(\delta)$, wenn es zwei äquivalente Folgen φ und ψ gibt, derart daß $\varphi_1 = \alpha$ und alle Glieder von ψ gleich δ sind.

Definition 2.4. $\alpha \in \boldsymbol{Nrm}$, wenn $\alpha \in S$ und es keine zwei äquivalente Folgen: φ mit k Gliedern und ψ mit l Gliedern gibt, derart daß $k > l$ und $\varphi_1 = \ldots = \varphi_k = \varphi_{k+1} = \psi_1 = \ldots = \psi_k = \alpha$.

Definition 2.5. $f \in \mathfrak{M}s(\boldsymbol{T})$, wenn $\varepsilon \in \boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und f der Bedingung (i) *aus 1.11 sowie folgender Bedingung genügt:*

(ii) *ist φ eine Folge von k Elementen und ψ eine Folge von l Elementen des Systems $\boldsymbol{T}$ und ist φ mit ψ oder mit einer Teilfolge von ψ äquivalent, so ist $f(\varphi_1) + \ldots + f(\varphi_k) \leqslant f(\psi_1) + \ldots + f(\psi_l)$.*

Aus diesen Definitionen ergeben sich folgende Sätze:

Satz 2.6. Ist $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{E}(\varepsilon)$, so ist dann und nur dann $f \in \mathfrak{M}s(\boldsymbol{T})$, wenn $\varepsilon \in S$ und f die Bedingungen (i) *aus 1.11 und* (ii) *aus 1.18 erfüllt.*

Der Beweis besteht in einem leichten Induktionsverfahren.

Aus 2.6 ersieht man, daß der in 2.5 definierte Maßbegriff, auf das ganze System $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{E}(\varepsilon)$ angewendet, seinen komplizierten Charakter verliert und sich mit dem entsprechenden Begriff aus § 1 deckt.

Satz 2.7. Damit es eine Funktion $f \in \mathfrak{M}s(\boldsymbol{T})$ gibt, ist notwendig und hinreichend, daß $\varepsilon \in \boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{E}(\varepsilon)$ und $\varepsilon \in \boldsymbol{Nrm}$; damit es insbesondere eine Funktion $f \in \mathfrak{M}s(\boldsymbol{E}(\varepsilon))$ gibt, ist notwendig und hinreichend, daß $\varepsilon \in \boldsymbol{Nrm}$ (m. a. W. Satz 1.58 bewahrt in unverändertem Wortlaut seine Gültigkeit).

Es soll hier der Beweis kurz skizziert werden.

Ist φ eine endliche Folge von Elementen des Systems S, so wollen wir mit φ^* die Menge der mit φ äquivalenten Folgen bezeichnen; S^* sei das System aller dieser Mengen φ^*.

Für die Mengen $A, B, \ldots$ des Systems S^* definieren wir eine Addition $\overset{*}{+}$ in folgender Weise: es sei $A, B \in S^*$; wir betrachten eine beliebige Folge $\varphi \in A$ und eine beliebige Folge $\psi \in B$; φ sei von k und ψ von l Gliedern; wir bilden nun eine Folge χ mit $k+l$ Gliedern, derart daß $\chi_1 = \varphi_1, \ldots, \chi_k = \varphi_k, \chi_{k+1} = \psi_1, \ldots, \chi_{k+l} = \psi_l$, und bezeichnen mit $A \overset{*}{+} B$ die Menge aller so gewonnenen Folgen χ und der mit ihnen äquivalenten Folgen.

Jedem Element $\alpha \in S$ entspricht offenbar eine Folge $\varphi = \bar{\alpha}$, die α als einziges Glied enthält: anstatt $\bar{\alpha}^*$ wollen wir einfach α^* schreiben. Man kann annehmen, daß $\varepsilon \in S$, da sonst Satz 2.7 in trivialer Weise („ins leere") erfüllt ist.

Es ist leicht zu zeigen, daß S^*, $\overset{*}{+}$ und ε^* den Postulaten A—D aus § 1 genügen; es gelten also für diese drei Begriffe auch alle aus A—D abgeleiteten Sätze, insbesondere Satz 1.58 (man muß freilich in diesen Sätzen alle Konstanten durch die entsprechenden Symbole „mit Stern" ersetzen).

Durch die Funktion $F(\alpha) = \alpha^*$ wird das System S (und jedes Systems $\boldsymbol{T} \subset S$) auf ein Teilsystem von S^* abgebildet. Diese Abbildung hat folgende Eigenschaften: ist $\alpha, \beta, \gamma \in S$ und $\alpha + \beta = \gamma$, so ist $\alpha^* \overset{*}{+} \beta^* = \gamma^*$; ist α endlich in Bezug auf δ im Sinne von 2.3, so ist α^* endlich in Bezug auf δ^* im Sinne von 1.5, und umgekehrt; das Analoge gilt für die Begriffe „normal" und „Maßfunktion". Mit Rücksicht darauf kann man den für S^*, $\overset{*}{+}$ und ε^* aufgestellten Satz 1.58 auf S, $+$ und ε übertragen; dadurch ist der Beweis zu Ende geführt.

Bemerkung 2.8. Analysiert man die eben skizzierte Überlegung, so sieht man, daß sie implizite einen Beweis für folgenden algebraischen Satz liefert:

Zu jedem System S und jeder binären Operation $+$ kann man ein System S^* und eine Operation $\overset{*}{+}$ konstruierten, die den Postulaten A—C aus § 1 genügen und dabei folgende Bedingung erfüllen: es gibt einen Homomorphismus $\alpha \to \alpha^*$, der S auf ein Teilsystem von S^* derart abbildet, daß zwei endliche Folgen φ und ψ von Elementen des Systems S dann und nur dann im Sinne von 2.2 äquivalent sind, wenn $\varphi_1^* \overset{*}{+} \ldots \overset{*}{+} \varphi_k^* = \psi_1^* \overset{*}{+} \ldots \overset{*}{+} \psi_l^*$ (k ist die Anzahl der Glieder von φ und l diejenige von ψ).

Satz 2.9. Genügen S, $+$ und ε den Postulaten A—D und behalten Definitionen 1.1–1.3 ihre alte Form, so sind Definitionen 2.3, 2.4 und 2.5 beziehungsweise mit 1.5, 1.9 und 1.11 äquivalent.

Der Satz ergibt sich aus einem leicht beweisbaren Hilfssatz, wonach unter den Voraussetzungen von 2.9 zwei Folgen φ und ψ dann und nur dann äquivalent sind, wenn $\varphi_1 + \ldots + \varphi_k = \psi_1 + \ldots + \psi_l$ (wo k die Anzahl der Glieder von φ und l von ψ ist).

Bemerkung 2.10. Aus 2.9 erhellt, daß Satz 2.7 als eine Verallgemeinerung des Satzes 1.58 gelten kann: 2.7 ist nämlich unabhängig von irgendwelchen Postulaten, geht aber automatisch in 1.58 über, wenn man Postulate A—D zugrundelegt.

Es ist noch zu bemerken, daß alles, was hier über Satz 1.58 gesagt wurde, auch auf verschiedene andere Sätze aus § 1 (z. B. auf 1.55) übertragen werden kann.

§ 3. Wir wollen jetzt zeigen, wie man die in § 1 skizzierte algebraische Konstruktion auf das eigentliche, geometrische Maßproblem anwenden kann.

Es sei R ein beliebiger metrischer Raum; wir wählen eine bestimmte Menge $E\subset R$ als Einheitsmenge (d. i. als Einheit des Maßes). Der Begriff der Kongruenz (Isometrie) wird als bekannt vorausgesetzt; die Formel $X\cong Y$ drückt wie gewöhnlich aus, daß Punktmengen $X\subset R$ und $Y\subset R$ kongruent sind. Wir wollen sagen, daß die Punktmenge X durch die Punktmenge Y beschränkt ist, wenn X in endlich viele Teilmengen zerlegt werden kann, von denen jede zu einer Teilmenge von Y kongruent ist.

Zwei Punktmengen X und Y heißen (endlich-) zerlegungsgleich, in Zeichen: $X\equiv Y$, wenn sie in endlich viele paarweise fremde Teile zerlegt werden können: $X=X_1+\ldots+X_k$, $Y=Y_1+\ldots+Y_k$, derart daß $X_1\cong Y_1, \ldots, X_k\cong Y_k$. Das System der Punktmengen, die mit einer gegebenen Punktmenge zerlegungsgleich sind, wird Zerlegungstypus genannt [5]). Da die Relation der Zerlegungsgleichheit reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, so gehört jede Punktmenge X zu genau einem Zerlegungstypus, den wir mit $\tau(X)$ bezeichnen; insbesondere setzen wir $\tau(E)=\varepsilon$. $\boldsymbol{S}$ sei das System aller Zerlegungstypen. Sind α und β zwei Zerlegungstypen, so bezeichnen wir als ihre Summe $\alpha+\beta$ das System der Punktmengen $X+Y$, wo $X\cdot Y=0$, $\tau(X)=\alpha$ und $\tau(Y)=\beta$ ist.

Die eben definierten Begriffe $\boldsymbol{S}$, $+$ und ε genügen offenkundig Postulaten B–D aus § 1. Postulat A gilt im allgemeinen nicht: es läßt sich zwar leicht zeigen, daß die Summe zweier Zerlegungstypen entweder leer oder ein Zerlegungstypus ist, die erste Möglichkeit ist aber keineswegs ausgeschlossen. Man kann jedoch in einfacher Weise den Raum R in einen umfassenderen Raum R_1 derart einbetten, daß auch Postulat A gilt: es genügt z. B. den Raum R_1 als das Cartesische Produkt des Raumes R mit dem Raum der natürlichen Zahlen zu definieren [6]).

R sei z. B. eine euklidische Gerade; R_1 besteht dann aus abzählbar vielen Geraden, die zu R parallel sind. Die Begriffe des Zerlegungstypus und der Summe von Zerlegungstypen werden auf den ganzen Raum R_1 bezogen. Mit $\boldsymbol{S}$ bezeichnen wir aber das System der Zerlegungstypen von denjenigen Punktmengen, welche in R liegen oder zumindest durch R beschränkt sind, d. h. in einer Summe von endlich vielen parallelen Geraden enthalten sind. Wie leicht ersichtlich, ist dann die Addition von Zerlegungstypen innerhalb des Systems $\boldsymbol{S}$ stets ausführbar.

Sind nun Postulate A–D erfüllt, so gelten auch offenbar alle Sätze, die sich aus diesen Postulaten ergeben; wenn man insbesondere die entsprechenden Definitionen aus § 1 auf Zerlegungstypen bezieht, so gewinnt man den Fundamentalsatz 1.58.

In der Algebra der Zerlegungstypen gelten überdies zahlreiche Sätze, die keine Folgerungen aus den genannten Postulaten sind. Bezeichnet man z. B. mit 0 den Zerlegungstypus der leeren Menge, so hat man offenbar:

Satz 3.1. $0\in\boldsymbol{S}$; *ist* $\alpha\in\boldsymbol{S}$, *so ist* $\alpha+0=\alpha$; *ist* $\beta,\gamma\in\boldsymbol{S}$ *und* $\beta+\gamma=0$, *so ist* $\beta=\gamma=0$.

Tiefer liegend ist

Satz 3.2. Ist $\alpha,\beta,\delta\in\boldsymbol{S}$ *und* $\alpha+\beta\leqslant\alpha+\delta$, *so gibt es ein* $\gamma\in\boldsymbol{S}$, *derart daß* $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$ *und* $\gamma\leqslant\delta$. [7])

Korollar 3.3. Ist $\alpha,\beta\in\boldsymbol{S}$ *und* $\alpha+\beta\leqslant\alpha$, *so ist* $\alpha+\beta=\alpha$; *m. a. W. ist* $\alpha,\beta\in\boldsymbol{S}$, $\alpha\leqslant\beta$ *und* $\beta\leqslant\alpha$, *so ist* $\alpha=\beta$. [Nach 3.1, 3.2].

Satz 3.4. Ist $\alpha,\beta\in\boldsymbol{S}$ *und* $k\cdot\alpha\leqslant k\cdot\beta$, *so ist* $\alpha\leqslant\beta$. [7])

Korollar 3.5. Ist $\alpha,\beta\in\boldsymbol{S}$ *und* $k\cdot\alpha=k\cdot\beta$, *so ist* $\alpha=\beta$. [Nach 3.3, 3.4].

Korollar 3.6. Ist $\alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{S}$ *und* $k\cdot\alpha+l\cdot\gamma=k\cdot\beta+l\cdot\gamma$, *bzw.* $k\cdot\alpha+l\cdot\gamma\leqslant k\cdot\beta+l\cdot\gamma$, *so ist* $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, *bzw.* $\alpha+\gamma\leqslant\beta+\gamma$. [Nach 3.4, 3.5].

Auf Grund von 3.1–3.6 läßt sich die in § 1 skizierte Konstruktion in gewissen Einzelheiten vereinfachen. Insbesondere erhält man:

Satz 3.7. Damit $\alpha\in\boldsymbol{Nrm}$, *ist notwendig und hinreichend, daß* $\alpha\in\boldsymbol{S}$ *und* $\alpha\neq2\cdot\alpha$. [Nach 1.9, 3.3, 3.5].

Mit Rücksicht darauf nimmt Satz 1.58 (genauer: der zweite Teil dieses Satzes) folgende Form an:

Satz 3.8. Damit es eine Maßfunktion im System $\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ *gibt, ist notwendig und hinreichend, daß* $\varepsilon\neq2\cdot\varepsilon$. [Nach 1.58, 3.7].

Wir wollen dieses Ergebnis rein geometrisch ausdrücken:

Es sei R ein metrischer Raum und E eine beliebige Punktmenge dieses Raumes. Damit es eine Maßfunktion (im üblichen, geometrischen Sinne) gibt, die für alle durch E beschränkten Mengen dieses Raumes definiert ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Menge E nicht „paradoxal zerlegbar" ist, d. h. daß E in keine zwei disjunkten Teilmengen zerlegt werden kann, von denen jede mit E zerlegungsgleich ist.

Um diese Formulierung aus 3.8 abzuleiten, muß man Folgendes bemerken:

(1) Ist f eine Maßfunktion in $\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ (im Sinne von 1.11 oder 1.19) und setzt man $g(X)=f(\tau(X))$, so gewinnt man eine Maßfunktion g (im üblichen, am Anfang der Arbeit präzisierten Sinne), die für alle durch E beschränkte Mengen bestimmt ist; auch umgekehrt kann jeder solchen Maßfunktion g eine Maßfunktion f in $\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ zugeordnet werden.

(2) Der in Rede stehende Satz gilt zunächst für den erweiterten Raum R_1, kann aber nachträglich ohne irgendwelche Schwierigkeit auf den ursprünglichen Raum R erstreckt werden.

Zur Frage, ob sich dieses Ergebnis auf beliebige, nicht nur durch E beschränkten Punktmengen des Raumes R erweitern läßt, vergleiche man 1.13.

Anstatt metrischer Räume kann man gewisse Gebilde von allgemeinerem Charakter betrachten, nämlich die sog. Räume mit einer ausgezeichneten Abbildungsgruppe [8]). Als ein derartiger Raum wird nämlich eine beliebige Menge R bezeichnet, für die eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von eineindeutigen Abbildungen definiert ist. Der Begriff der Abbildungsgruppe kann hier etwas weiter als üblich gefaßt werden: es genügt zu verlangen, daß der Vor- und Nachbereich jeder Funktion der Gruppe $\mathfrak{G}$ in R enthalten ist, aber sich nicht notwendig mit R deckt; die identische Abbildung des ganzen Raumes R wird aber jedenfalls zu $\mathfrak{G}$ gezählt. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ spielt in solch einem Raum R dieselbe Rolle wie die Gruppe der isometrischen Abbildungen in einem metrischen Raum: die Begriffe der Kongruenz, der Zerlegungsgleichheit u. s. w. werden auf $\mathfrak{G}$ bezogen (zwei Mengen $X\subset R$ und $Y\subset R$ heißen also kongruent, wenn es eine Funktion der Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt, die X auf Y abbildet). Für die der Gruppe $\mathfrak{G}$ entsprechenden Zerlegungstypen sind wiederum Postulate B—D erfüllt; die Gültigkeit von A kann durch eine Erweiterung des Raumes erreicht werden. Es gelten ferner Sätze 3.1—3.7 und demnach auch Satz 3.8 in beiden oben angegeben Formulierungen.

Nehmen wir insbesondere an, R sei eine nicht-leere Menge und $\mathfrak{G}$ die Gruppe der eineindeutigen Abbildungen h, deren Vor- und Nachbereich gleich R ist und die sich nur an endlich vielen Stellen von der identischen Abbildung unterscheiden (d. h.: $\underset{x}{E}[h(x)\neq x]$ ist endlich). Als E wählen wir den ganzen Raum R. Wie leicht ersichtlich, ist dann der Zerlegungstypus ε von E normal; da hiebei das System S aller Zerlegungstypen sich mit $\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ deckt, so gibt es nach 3.8 eine Maßfunktion f in S. Setzt man nun $g(X)=f(\tau(X))$ für jedes $X\subset R$, so gewinnt man einen Satz, der die positive Lösung des Maßproblems in seiner allgemein-mengentheoretischen Gestalt mit sich bringt:

Zu jeder Menge $R\neq 0$ gibt es eine Funktion g mit folgenden Eigenschaften:

(i) *jeder Menge $X\subset R$ entspricht eine reelle Zahl $f(X)\geqslant 0$ und insbesondere der Menge R die Zahl $f(R)=1$;*

(ii) *sind X und Y zwei endliche gleichmächtige Mengen $\subset R$, so ist $f(X)=f(Y)$ (und demnach $f(X)=f(Y)=0$, falls R selbst unendlich ist);*

(iii) *ist $X+Y\subset R$ und $X\cdot Y=0$, so ist $f(X+Y)=f(X)+f(Y)$.* [9])

Wir gehen zu Anwendungen speziellerer Natur über. R sei diesmal die gerade Linie, E eine Strecke, die mehr als einen Punkt enthält; die durch E beschränkten Mengen decken sich dann mit den beschränkten Mengen im üblichen Sinne. Die Symbole S, $+$ und ε behalten ihre frühere Bedeutung (es wäre etwas bequemer, mit S nur das System der Zerlegungstypen von beschränkten Mengen zu bezeichnen: Postulat A würde dann vom Anfang an erfüllt, und man brauchte nicht den Raum zu erweitern). Die Algebra der Zerlegungstypen wird jetzt mit neuen Sätzen bereichert, und zwar zunächst mit dem trivialen

Satz 3.9. $\varepsilon\neq 0$; zu jedem natürlichen m gibt es ein $\alpha\in S$, so daß $\varepsilon=m\cdot\alpha$.

Mit Rücksicht auf diesen Satz kann man den Begriff des rationalen Vielfachen von ε einführen:

Definition 3.10. Es sei r eine rationale nichtnegative Zahl. Für $r=0$ setzen wir $r\cdot\varepsilon=0$; für $r>0$ bezeichnen wir mit $r\cdot\varepsilon$ das einzige Element $\alpha\in S$, das folgender Bedingung genügt: ist $r=l/m$ (l und m natürliche Zahlen), so ist $m\cdot\alpha=l\cdot\varepsilon$.

Die Operation $r\cdot\varepsilon$ ist stets ausführbar:

Satz 3.11. Ist r eine rationale nichtnegative Zahl, so ist $r\cdot\varepsilon\in S$.

[Nach 3.1, 3.5, 3.9].

Es gilt ferner folgender wichtiger

Satz 3.12. Ist $\alpha,\beta\in S$ und $2\cdot\alpha=\alpha+\beta$, so ist $\alpha=\beta$. [7])

Korollar 3.13. Ist $\alpha,\beta,\gamma\in S$, $k\neq l$ und $k\cdot\alpha+\beta=l\cdot\alpha+\gamma$, so ist $(k-l)\cdot\alpha+\beta=\gamma$ oder $\beta=(l-k)\cdot\alpha+\gamma$, je nachdem ob $k>l$ oder $k<l$; das Zeichen $=$ kann hier an allen Stellen durch $\leqslant$ ersetzt werden. [Nach 3.12].

*Korollar 3.14. Ist $\alpha\in S$ und $\alpha\neq 0$, so ist $\alpha\neq 2\cdot\alpha$ und demnach $\alpha\in$ **Nrm**.*

[Nach 3.1, 3.7, 3.12].

Als Spezialfall von 3.14 (mit Rücksicht auf 3.9) erhält man insbesondere Postulat E: ε ist normal. Nach 3.8 ergibt sich hieraus der bekannte Satz, gemäß dem das Maßproblem im System $\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ (und folglich im System aller beschränkten linearen Punktmengen) eine positive Lösung hat [10]).

Auf Grund des Postulates E kann man ferner in die Algebra der Zerlegungstypen linearer Punktmengen die Begriffe $a_l(\alpha)$, $a_e(\alpha)$, $\boldsymbol{A}$ und $a(\alpha)$ einführen und ihre Theorie entwickeln (1.61–1.67). Die Definition von $a_l(\alpha)$ und $a_e(\alpha)$ läßt sich dabei vereinfachen:

Satz 3.15. Ist $\alpha \epsilon \boldsymbol{E}(\varepsilon)$, so ist $a_i(\alpha)$, bzw. $a_e(\alpha)$, die obere, bzw. untere, Schranke der Menge aller rationalen nichtnegativen Zahlen r, für die $r \cdot \varepsilon \leqslant \alpha$, bzw. $\alpha \leqslant r \cdot \varepsilon$, gilt. [Nach 1.61, 3.10, 3.11, 3.13].

Hieraus gewinnt man sofort einfache Bedingungen dafür, daß $a_i(\alpha)=0$ oder $a_e(\alpha)=a(\alpha)=0$ oder schließlich $\alpha \epsilon \boldsymbol{A}$ ist.

Wenn man nun anstatt der Zerlegungstypen die Punktmengen selbst in Betracht zieht, so geht die Theorie der Begriffe $a_i(\alpha)$, $a_e(\alpha)$ usw. in die Theorie des absoluten Maßes linearer Punktmengen über, die ich anderswo skizziert habe[11]).

Mit Rücksicht auf 3.14 kann man als Einheitsmenge anstatt einer Strecke eine beliebige nicht-leere Punktmenge und insbesondere die ganze Gerade wählen. Es ist zu bemerken, daß Sätze 3.12–3.14 gültig bleiben, wenn man die euklidische Gerade durch einen beliebigen Raum mit einer ausgezeichneten Abelschen Gruppe ersetzt (die Sätze gelten übrigens auch für gewisse nicht-Abelsche, aber mit Abelschen nahe verwandte Gruppen).

Nehmen wir jetzt an, R sei die euklidische Ebene und E ein Quadrat. Sätze 3.12–3.14 gelten dann im allgemeinen nicht; die für uns wichtigste Folgerung aus diesen Sätzen, nämlich Postulat E, bewahrt jedoch ihre Gültigkeit[12]). Die Lösung des Maßproblems im System $\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ ist wiederum positiv[10]), und auch die Theorie des absoluten Maßes kann für ebene Punktmengen (wenn auch ohne die oben angedeuteten Vereinfachungen) entwickelt werden.

Die Situation ändert sich wesentlich, wenn man zu einem n-dimensionalen euklidischen Raum mit $n \geqslant 3$ übergeht. Wie bekannt, ist dann jedes Polyeder (und allgemeiner: jede beschränkte Punktmenge mit inneren Punkten) „paradoxal zerlegbar" und sein Zerlegungstypus ist nicht normal[3]). Es gibt hier freilich auch normale Zerlegungstypen ε (z. B. Zerlegungstypen endlicher Punktmengen), aber sie sind nicht interessant: die entsprechenden Systeme $\boldsymbol{E}(\varepsilon)$ sind nicht umfassend. Will man in diesen Räumen für die Konstruktion aus § 1 irgendwelche interessante Anwendungen finden, so muß man sich entweder auf gewisse Teilräume beschränken (etwa auf gewisse Flächen in dem dreidimensionalen Raum), oder den Kongruenzbegriff enger fassen (und anstatt der Gruppe aller isometrischen Abbildungen eine Teilgruppe, etwa die Gruppe der Translationen, betrachten), oder schließlich unter Beibehaltung des üblichen Kongruenzbegriffes den Begriff der Zerlegungsgleichheit einer Spezialisierung unterwerfen. Wir wollen diese dritte Möglichkeit kurz ins Auge fassen.

Es sei also R ein n-dimensionaler euklidischer Raum und E ein n-dimensionaler Würfel. Als Stück einer Punktmenge $X \subset R$ bezeichnen wir den Durchschnitt von X mit einem (nicht notwendig n-dimensionalen) offenen oder abgeschlossenen Simplex. Zwei Punktmengen X und Y werden stückweise zerlegungsgleich genannt, wenn sie in endlich viele paarweise fremde und entsprechend kongruente Stücke zerlegt werden können. Analog wie vorher wird der Begriff des Zerlegungstypus (genauer: des Typus der stückweisen Zerlegungsgleichheit) definiert; $\boldsymbol{S}$ bezeichne das System der Zerlegungstypen von beschränkten Punktmengen, ε den Zerlegungstypus von E. Als Summe $\alpha+\beta$ zweier Zerlegungstypen wird das System der Mengen $X+Y$ bezeichnet, wo X und Y disjunkte Stücke von $X+Y$ sind und dabei X zu α und Y zu β gehört. Postulate A—E sind dann erfüllt, das (allerdings wesentlich modifizierte) Maßproblem ist positiv lösbar; die Begriffe $a_i(\alpha)$, $a_e(\alpha)$ usw., auf Punktmengen angewendet, ergeben aber nicht das absolute, sondern das Peano-Jordansche Maß[1]). Wenn man den Begriff der Zerlegungsgleichheit weiter modifiziert und zwar die Zerlegung zweier Punktmengen nicht in endlich, sondern in abzählbar viele paarweise fremde und entsprechend kongruente Stücke betrachtet, so gelangt man auf demselben Wege zu dem Lebesgueschen Maß[1]). Es muß aber betont werden, daß die Theorie des Peano-Jordanschen und des Lebesgueschen Maßes, so wie sie hier durch unmittelbare Anwendung der algebraischen Konstruktion gewonnen wird, einen sehr unvollständigen, fragmentarischen Charakter hat; das hängt mit der speziellen Natur der hier in Betracht kommenden Addition von Zerlegungstypen zusammen, die einer ganz eng gefaßten Addition von Punktmengen entspricht. Um dabei die Theorie des Lebesgueschen Maßes in adäquater Weise abstrakt zu entwickeln, müßte man neben Summen zweier Elemente auch Summen von unendlichen Reihen ins Auge fassen, was vermutlich bedeutende Komplikationen verursachen und der Konstruktion ihren algebraischen Charakter teilweise entziehen würde.

Interessantere Anwendungsmöglichkeiten scheint eine andere Spezialisierung des Begriffs der Zerlegungsgleichheit zu bieten. R und E sollen ihre frühere Bedeutung behalten. Zwei Mengen X und Y werden als l-zerlegungsgleich bezeichnet, wenn sie in endlich viele paarweise fremde und entsprechend kongruente im Lebesgueschen Sinne meßbare Teilmengen zerlegt werden können. Der Begriff des l-Zerlegungstypus, der Summe zweier Typen, des Elements ε wird ganz analog wie im allgemeinen Fall (bei Erörterung der beliebigen metrischen Räume) eingeführt. Da aber die Relation der l-Zerlegungsgleichheit lediglich zwischen zwei meßbaren Mengen bestehen kann, so werden nur die meßbaren Mengen in l-Zerlegungstypen eingeteilt; $\boldsymbol{S}$ bezeichne das System der Zerlegungstypen von beschränkten meßbaren Mengen. Postulate A—E sind wiederum erfüllt. Die Existenz einer Maßfunktion in $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}(\varepsilon)$, die sich daraus ergibt, ist aber einleuchtend: eine solche Maßfunktion kann ja dadurch bestimmt werden, daß man jedem l-Zerlegungstypus α das (offenbar gemeinsame) Lebesguesche Maß der zu α gehörenden Punktmengen zuordnet. Es entsteht nun die Frage, ob die in dieser Weise gewonnene Funktion die einzige Maßfunktion in $\boldsymbol{S}$ ist, oder in einer (auf Grund von 1.67) äquivalenten Formulierung: ob sich das System $\boldsymbol{S}$ mit $\boldsymbol{A}$ deckt. Dieses Problem wurde für den Fall des 1- und 2-dimensionalen Raumes negativ gelöst[13]) und bleibt noch für den Fall der mehrdimensionalen Räume offen. Es besteht jedenfalls ein wichtiger Unterschied zwischen beiden Fällen. Im 1- oder 2-dimensionalen euklidischen Raum gibt es Mengen vom Lebesgueschen Maße 0, deren Zerlegungstypus nicht zu $\boldsymbol{A}$ gehört. Man kann dagegen zeigen, daß es in mehrdimensionalen Räumen derartige Mengen nicht gibt; mit anderen Worten: keine Maßfunktion, die für alle im Lebesgueschen Sinne meßbaren Mengen definiert ist, kann einer Menge vom Lebesgueschen Maße 0 ein von 0 verschiedenes Maß zuordnen.

Der Beweis hiefür beruht auf folgenden zwei Bemerkungen:

(1) in einem n-dimensionalen euklidischen Raum mit $n \geqslant 3$ ist jede beschränkte Menge mit einer Teilmenge eines beliebig kleinen Würfels zerlegungsgleich[3]);

(2) für die Mengen vom Lebesgueschen Maße 0 deckt sich die l-Zerlegungsgleichheit mit der Zerlegungsgleichheit im üblichen Sinne.

Anmerkungen.

[1]) Vgl. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, S. 399 ff.

[2]) Zu dem Begriff des Homomorphismus vgl. z.B. B. L. Van Der Waerden, *Moderne Algebra*, 1. Teil, Berlin (1930), S. 32.

[3]) Vgl. hiezu S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6** (1924), S. 244 ff.; A. Tarski, Przegląd mat.-fiz. **2** (1924), S. 47 ff.

[4]) Fast alle Ergebnisse der vorliegenden Arbeit (abgesehen von einigen spezielleren Anwendungen in § 3) stammen aus dem Jahre 1928; die Hauptergebnisse habe ich (ohne Beweis) in C. R. Soc. Sc. Vars. **22** (1929), Cl. III, S. 114 ff. veröffentlicht. Es bestehen gewisse Berührungspunkte zwischen den vorliegenden Betrachtungen und den Arbeiten von H. Hahn, Journ. f. Math. **157** (1927), S. 214 ff., und S. Banach, Stud. Math. **1** (1929), S. 211 ff. und S. 223 ff. (wo Banach seine früheren Untersuchungen in Fund. Math. **4** (1923), S. 7 ff., in abstraktere Form bringt). Hiezu ist jedoch zu bemerken, daß diese Autoren viel speziellere Voraussetzungen machen, indem sie ihre Untersuchungen auf die sog. linearen oder vektoriellen Räume beziehen; infolgedessen sind ihre Ergebnisse in erster Linie auf sozusagen stetige Gebilde anwendbar. Die vorliegende Konstruktion hingegen kann auf beliebige und insbesondere ganz diskrete Gebilde angewendet werden, was man an der Hand der Beispiele in § 3 sofort ersehen kann. — Wir bringen hier u. a. Verallgemeinerungen von Ergebnissen aus unserer Mitteilung in Fund. Math. **30** (1938), S. 218 ff.

[5]) Vgl. A. Lindenbaum et A. Tarski, C. R. Soc. Sc. Vars. **19** (1926), Cl. III, S. 319; A. Tarski, Atti Congr. Mat. Bologna 1928, 2. Bd., S. 251 f.

[6]) Vgl. z. B. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Mat. **3**, Warszawa-Lwów 1933, S. 7 ff. und 87 ff.

[7]) Sätze 3.2–3.6 und 3.12–3.14 sind algebraische (oder eher arithmetische) Übertragungen gewisser Ergebnisse aus der Theorie der Zerlegungsgleichheit, die in § 1 meiner Arbeit in Fund. Math. **30** (1938), S. 221 f. angegeben wurden. Und zwar entspricht Satz 3.2 dem Mittelwertsatz 1.7, Korollar 3.3 den Äquivalenzsätzen 1.9 und 1.10; Sätze 3.4–3.6 sind Übersetzungen der Divisionssätze 1.11–1.14, schließlich entsprechen Sätze 3.12–3.14 den Subtraktionssätzen 1.15–1.17.

[8]) Vgl. J. v. Neumann, Fund. Math. **13** (1929), S. 73 ff., sowie meine Mitteilung in Atti Congr. Mat. Bologna 1928, 2. Bd., S. 243 ff.

[9]) Einen anderen Beweis dieses Satzes habe ich in Fund. Math. **15** (1930), S. 42. ff., veröffentlicht.

[10]) Vgl. S. Banach, Fund. Math. **4** (1923), S. 7 ff.

[11]) Fund. Math. **30** (1938), S. 218 ff.

[12]) Vgl. hiezu meine eben zitierte Arbeit, S. 223 und 233 sowie S. 234, Anmerkungen 13 und 14.

[13]) Vgl. [10]) (das Problem wurde von S. Ruziewicz gestellt).

Ein Beitrag zum Mengerschen Begriff des fastmetrischen Raumes.

Von

Stanisław Gołąb (Kraków).

1. Der Fréchetsche Begriff der allgemeinen metrischen Räume wurde schon einigen Verallgemeinerungen unterworfen (halbmetrische Räume, quasimetrische Räume etc). Eine der neuesten Verallgemeinerungen ist der Begriff des *fastmetrischen Raumes*, der von Menger[1]) eingeführt wurde. Die Verallgemeinerung geht in der Richtung, dass der Fundamentalsatz über die Unterhalbstetigkeit der Bogenlänge erhalten bleibt, obwohl die Abstandsfunktion $\varrho(x, y)$ der Dreiecksungleichung nicht genügt. In der erwähnten Arbeit beschränkt sich Menger nicht nur auf allgemeine Betrachtungen, er gibt sogar interessante Anwendung auf das klassische Problem der Variationsrechnung. Der Hauptgrund dieser Anwendung liegt darin, dass der Verfasser mit Hilfe der Grundfunktion F den Raum derart metrisiert, dass der letzte ein fastmetrischer Raum wird, wonach die Sätze der vorher entwickelten Theorie angewandt werden können. Neben den Voraussetzungen der Stetigkeit und Beschränktheit der Grundfunktion F in dem vorgeschriebenen Gebiete Γ spielt eine wesentliche Rolle die Voraussetzung, dass die zugehörige Indicatrix in jedem Punkte des Gebietes Γ konvex ist.

Das Ziel dieser Note ist es eine in gewissem Sinne Umkehrung des Mengerschen Resultates zu beweisen. Ich zeige nämlich, dass die Konvexität der Indicatrix aus der Voraussetzung folgt, dass

[1]) K. Menger, *Metrische Geometrie und Variationsrechnung*, Fund. Math. **25** (1935), 441–458.