Man beweist, dass die Bedingung des Satzes hinreichend ist, wörtlich so, wie bei Montel[3]) (Montel selbst setzt voraus, dass der verbotene Wert a nur von $\bar{D}_1$, nicht aber von der Funktion U abhängig ist).

Die Notwendigkeit der Bedingung beweist man wie folgt. Wenn die Bedingungen des Satzes nicht erfüllt sind, so gibt es ein $\bar{D}_1$ derart, dass für jedes $M>0$ ein $U_M \epsilon E$ existiert, welches auf $\bar{D}_1$ alle Werte a mit $|a|<M$ annimmt. Wählt man $M_n \to +\infty$, so kann die Folge U_{M_n} offenbar keine konvergente Teilfolge enthalten.

---

[3]) l.c. Fund. Math. **25** (1935), 390.

Sur la représentation paramétrique régulière des ensembles analytiques.

Par

Motokiti Kondô (Sapporo, Japon).

Pour un ensemble linéaire N, appelons *régulière* (dans N) toute fonction $f(t)$ définie dans N qui ne prend de valeurs égales pour des points distincts, c. à d. telle que, pour deux points $t_1 \neq t_2$ de N, on a toujours $f(t_1) \neq f(t_2)$.

Nous dirons qu'un ensemble linéaire E admet une *représentation paramétrique régulière* sur N, si E est l'ensemble des valeurs d'une fonction $x=f(t)$ définie dans N, continue et régulière dans cet ensemble. M. N. Lusin a démontré le théorème suivant[1]):

Tout ensemble mesurable (B) indénombrable admet une représentation paramétrique régulière sur l'ensemble de tous les nombres irrationnels, quand on néglige une infinité dénombrable de points de cet ensemble.

M. Sierpiński a posé le problème suivant: *existe-t-il un ensemble linéaire N tel que tout ensemble analytique indénombrable admette une représentation paramétrique régulière sur N?* [2]).

Nous allons résoudre affirmativement ce problème[3]). Plus précisément:

---

[1]) N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 114.

[2]) Fund. Math. **26** (1936), p. 334.

[3]) Pour une autre méthode de résoudre ce problème, voir M. Kondô, *Sur la représentation paramétrique des ensembles*, Proc. Imp. Acad. Japan **14** (1937), p. 59.

P étant un ensemble plan quelconque, soit $H^{(x)}$ l'ensemble de tous les points de P dont x est la projection sur l'axe $0X$.

Soit H le crible binaire[4]) de M. H. Lebesgue et N l'ensemble (de Lebesgue) de tous les points binairement irrationnels x tels que $H^{(x)}$ est bien ordonné par rapport à la direction positive de l'axe $0Y$. L'ensemble $H^{(x)}$ n'est bien ordonné par rapport à la direction positive de l'axe $0Y$ pour aucun point

$$x=\frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_2}}+\dots+\frac{1}{2^{n_k}}.$$

Nous allons établir ce

Théorème. *Tout ensemble analytique indénombrable admet une représentation paramétrique régulière sur l'ensemble de Lebesgue N, quand on néglige une infinité dénombrable de points de cet ensemble.*

L'ensemble N augmenté de l'ensemble de tous les nombres naturels est un complémentaire analytique N^* tel que tout ensemble analytique indénombrable admet une représentation paramétrique régulière sur N^*.

Remarque. L'ensemble N, qui donne (selon le théorème) une représentation paramétrique régulière, est, comme on sait, un complémentaire analytique. Or, *on ne peut remplacer dans l'énoncé du théorème l'ensemble N par aucun ensemble analytique.*

En effet, l'ensemble E de tous les nombres irrationnels étant mesurable (B) et indénombrable, il existerait dans le cas contraire une fonction régulière $f(t)$ continue dans l'ensemble analytique N et telle que E serait l'ensemble des valeurs de cette fonction. Considérons la fonction inverse $f^{-1}(x)$, uniforme et définie dans E. Pour tous les nombres rationnels r, les ensembles de points t de N qui remplissent la condition $t>r$ (ou $t\leqslant r$) sont analytiques, et $f(t)$ est continue dans ces ensembles. Par conséquent, les ensembles de points x de E pour lesquels $f^{-1}(x)>r$ (ou $f^{-1}(x)\leqslant r$) sont analytiques. Comme ces deux ensembles sont complémentaires l'un à l'autre, les ensembles $\mathrm{Ens}\{f^{-1}(x)>r\}$ et $\mathrm{Ens}\{f^{-1}(x)\leqslant r\}$ sont mesurables (B). D'après le théorème de M. H. Lebesgue, la fonction $f^{-1}(x)$ serait donc mesurable (B). Comme l'image biunivoque de E par rapport à $f^{-1}(x)$, l'ensemble N serait aussi mesurable (B). Par suite, tout ensemble non dénombrable analytique admettrait une représentation paramétrique régulière sur un ensemble mesurable (B), ce qui contredit un théorème de M. N. Lusin[5]), c. q. f. d.

[4]) N. Lusin, loc. cit., p. 199.

[5]) N. Lusin, loc. cit., p. 166.

Pour démontrer le théorème, nous préciserons la définition de l'ensemble de Lebesgue, en la modifiant un peu. Nous désignerons par R^* et appellerons *domaine fondamental* l'ensemble de tous les nombres de l'intervalle fermé $[0,1]$ dont le développement

$$x=\frac{\theta_1}{2}+\dots+\frac{\theta_n}{2^n}+\dots \qquad (\theta_n=0 \text{ ou } 1;\ n=1,2,\dots)$$

contient toujours une infinité de chiffres 1. Soit σ une suite infinie de nombres rationnels distincts deux à deux: $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ Menons sur le plan $R(x,y)$ par le point s_k de l'axe $0Y$ la parallèle à l'axe $0X$ et considérons sur cette parallèle les segments fermés

$$\frac{2i-1}{2^k}\leqslant x\leqslant\frac{i}{2^{k-1}} \qquad \text{où} \qquad i=1,\dots,2^{k-1}.$$

Alors, en faisant varier k $(k=1,2,\dots)$, nous obtenons un ensemble de segments fermés. Désignons-le par H_σ.

Appelons *ensemble de Lebesgue de type* (σ) et désignons par N_σ le complémentaire de l'ensemble criblé au moyen du crible H_σ, c. à d. l'ensemble des points x du domaine fondamental R^* pour lesquels l'ensemble linéaire $H_\sigma^{(x)}$ est bien ordonné dans la direction positive de l'axe $0Y$. L'ensemble N_σ est un complémentaire analytique non mesurable (B) quand l'ensemble D de nombres rationnels de la suite σ contient une partie dense en soi. Dans la suite, nous supposerons que l'ensemble D est semblable au point de vue de l'ordre à l'ensemble R de tous les nombres rationnels, c. à d. qu'il existe une fonction biunivoque $\chi(t)$ qui transforme D en R de manière que $\chi(t_1)<\chi(t_2)$ pour deux points $t_1<t_2$ de D.

Lemme 1. *Quels que soient deux ensembles $N_{\sigma_k}^{(k)}$ $(k=1,2)$ de Lebesgue de type (σ_k), il existe une fonction biunivoque et bicontinue $\Phi(t)$ qui transforme R^* en lui-même de la manière que $N_{\sigma_2}^{(2)}=\Phi(N_{\sigma_1}^{(1)})$.*

Démonstration. Soient $\sigma_k=\{r_{kn}\}$ $(k=1,2;\ n=1,2,\dots)$ deux suites de nombres rationnels telles que les ensembles D_k de r_{kn} $(n=1,2,\dots)$ soient semblables par leur ordre à l'ensemble R de tous les nombres rationnels. On peut alors définir une fonction biunivoque $\chi(t)$ qui transforme D_1 en D_2 de manière que $\chi(t_1)<\chi(t_2)$ pour tout couple de points $t_1<t_2$ de D_1.

Désignons par $\varphi(x)$ une fonction de nombre naturel telle que $\chi(r_{1n})=r_{2\varphi(n)}$, et considérons la fonction

$$\Phi(x)={\sum_{k=1}^{\infty}}'\frac{1}{2^{\varphi(n_k)}}\qquad\text{pour}\qquad x={\sum_{k=1}^{\infty}}'\frac{1}{2^{n_k}}\qquad(n_1<n_2<\ldots),$$

définie sur R^*. On voit sans peine que $\Phi(x)$ transforme R^* en lui-même d'une façon biunivoque.

Pour démontrer que $\Phi(x)$ est bicontinue sur R^*, considérons d'abord un point $x_0=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-n_{0k}}$ de R^* et une suite $\{x_j=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-n_{jk}}\}$ $(j=1,2,\ldots)$ de points de R^* qui converge vers x_0. Etant donné un nombre naturel M, prenons un nombre naturel ν tel qu'on ait $\varphi(n)>M$ pour $n>n_{0\nu}$. Puisque x_j converge vers x_0, il existe un nombre naturel M_0 tel que $n_{jk}=n_{0k}$ $(k=1,2,\ldots,\nu)$ pour $j>M_0$. Nous avons alors

$$|\Phi(x_0)-\Phi(x_j)|=\left|{\sum_{k=1}^{\infty}}'\left(\frac{1}{2^{\varphi(n_{0k})}}-\frac{1}{2^{\varphi(n_{jk})}}\right)\right|\leqslant{\sum_{k=\nu+1}^{\infty}}'\left(\frac{1}{2^{\varphi(n_{0k})}}+\frac{1}{2^{\varphi(n_{jk})}}\right)$$

pour tout $j>M_0$. Or, $n_{jk}>n_{0\nu}$ pour $k>\nu$, $j=0$ ou $j>M_0$, de sorte que $\varphi(n_{jk})>M$ pour les mêmes valeurs d'indices, et $\varphi(n_{jk})$ sont distincts deux à deux pour tout j naturel. Par suite

$$|\Phi(x_0)-\Phi(x_j)|\leqslant{\sum_{k=M+1}^{\infty}}'\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{M-1}},$$

ce qui montre que $\Phi(x)$ est continue au point x_0. Par conséquent, selon la définition de x_0, $\Phi(x)$ est continue dans R^*. On montre d'une façon analogue que la fonction inverse $\Phi^{-1}(x)$ est aussi continue sur R^*. Donc, $\Phi(x)$ transforme R^* en lui-même topologiquement.

Enfin, on a pour tout point x de R^*

$$\chi(H_{\sigma_1}^{(x)})=H_{\sigma_2}^{(\Phi(x))}.\tag{1}$$

En effet, si $x=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-n_k}$, l'ensemble $H_{\sigma_1}^{(x)}$ est formé de nombres rationnels r_{1n_k} $(k=1,2,\ldots)$. Puisque $\Phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\varphi(n_k)}$, l'ensemble $H_{\sigma_2}^{(\Phi(x))}$ est celui des nombres rationnels $r_{2\varphi(n_k)}$ $(k=1,2,\ldots)$. Mais,

$$\chi(r_{1n_k})=r_{2\varphi(n_k)}\qquad(k=1,2,\ldots),$$

ce qui entraîne l'égalité (1). Or, $\chi(H_{\sigma_1}^{(x)})$ et $H_{\sigma_1}^{(x)}$ étant simultanément bien ordonnés ou non dans la direction positive de l'axe $0Y$, nous avons selon (1) $\Phi(N_{\sigma_1}^{(1)})=N_{\sigma_2}^{(2)}$, c. q. f. d.

Lemme 2. *Soient N un ensemble de Lebesgue de type (σ) et U un sous-ensemble ouvert de R^*. Alors N et UN sont homéomorphes.*

Démonstration. Considérons d'abord le cas où U est un intervalle de Baire $I=(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ [6]) de R^*. Par une transformation bicontinue et biunivoque $\Phi(x)$ qui transforme I en R^* de façon que le point $x=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-n_i}$ de I est transformé en $\Phi(x)=2^{n_k}\sum_{i=1}^{\infty}2^{-n_{k+i}}$, IN est transformé en ensemble de Lebesgue de type (σ^*) où $\sigma^*=\{r_{k+n}\}$, $n=1,2,\ldots$ D'après le lemme 1, l'ensemble de Lebesgue de type (σ^*) est homéomorphe à N. Par suite, N et IN sont homéomorphes.

Considérons le cas général. Comme ensemble ouvert, U est décomposable en une suite infinie d'intervalles de Baire de R^* disjoints deux à deux. En désignant ces intervalles par I_k $(k=1,2,\ldots)$, nous avons $UN=\sum_{k=1}^{\infty}I_kN$. Or, pour les intervalles de Baire (k) de R^*, où $k=1,2,\ldots$, on a $N=\sum_{k=1}^{\infty}(k)N$ et I_kN sont homéomorphes à $(k)N$. Donc UN est homéomorphe à N, c. q. f. d.

Lemme 3. *Soient E un ensemble analytique contenu dans l'ensemble R_0 de tous les nombres irrationnels de l'intervalle* $[0,1]$ *et $\sigma=\{r_n\}$, $n=1,2,\ldots$, une suite de nombres rationnels telle que l'ensemble de tous les nombres de σ est semblable au sens d'ordre à l'ensemble R des nombres rationnels. Il existe dans le plan $R(x,y)$ un crible H tel que les conditions suivantes soient remplies:*

1⁰ *E est l'ensemble criblé au moyen du crible H.*

2⁰ *H est un ensemble composé d'une infinité dénombrable d'intervalles de Baire I_n $(n=1,2,\ldots)$, chaque I_n étant situé sur la parallèle à l'axe $0X$ qui passe par le point r_n de l'axe $0Y$.*

3⁰ *la longueur de I_n converge vers 0 pour $n\to\infty$.*

4⁰ *quel que soit le point x de R_0, $H^{(x)}$ contient une infinité dénombrable de nombres rationnels.*

---

[6]) Nous entendons par *intervalle de Baire* $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ de R^* l'ensemble de tous les nombres $x=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-m_k}$ de R^* tels que $n_i=m_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$ et $\max(n_1,\ldots,n_k)<m_{k+1}<m_{k+2}\ldots$ Nous pouvons toujours supposer que $n_1<n_2<\ldots<n_k$.

Le crible H satisfait alors aux conditions suivantes:

5⁰ *pour deux points distincts* x_i $(i=1,2)$ *de* R_0, *on a* $H^{(x_1)} \neq H^{(x_2)}$.

6⁰ *quel que soit le point* x *de* R_0, $D-H^{(x)}$ (où D désigne l'ensemble de tous les nombres rationnels de la suite σ) *contient une infinité dénombrable de nombres rationnels.*

Nous appelons H *crible du type* (σ) de E.

Démonstration. Soit S un sous-ensemble de D formé d'une suite infinie bien ordonnée selon la grandeur croissante. Soient s_n $(n=1,2,...)$ les nombres de S. L'ensemble $D-S$ étant semblable au sens d'ordre à l'ensemble R de tous les nombres rationnels, il existe d'après MM. N. Lusin et W. Sierpiński [7]) un crible Γ formé d'intervalles de Baire I_i tels que $r_i \epsilon D-S$ et situés respectivement sur les droites $y=r_i$, la longueur de I_i tendant vers 0 avec i et l'ensemble E étant l'ensemble criblé au moyen de Γ.

Pour obtenir le crible H, rangeons, pour chaque n naturel, tous les intervalles de Baire d'ordre n en une suite infinie $\{\Delta_k^{(n)}\}$ où $k=1,2,...$ et désignons, pour $r_k \epsilon S$ tels que $r_k = s_{2^i(2j-1)}$, par I_k l'intervalle de Baire $\Delta_j^{(i)}$, situé sur la droite $y=r_k$. L'ensemble $H=\Gamma+\sum_{i=1}^{\infty} I_i$ remplit alors les conditions 1⁰-4⁰, et par conséquent 5⁰-6⁰, du lemme 3. En effet, pour tout point x de R_0, on a $H^{(x)}=\Gamma^{(x)}+(H-\Gamma)^{(x)}$. Or, d'après la définition de H, $(H-\Gamma)^{(x)}$ est contenu dans S et S est bien ordonné selon la grandeur croissante; les deux ensembles $H^{(x)}$ et $\Gamma^{(x)}$ sont donc simultanément bien ordonnés ou non selon la grandeur croissante. Par suite, H est un crible qui définit l'ensemble E.

D'autre part, le crible H est par définition formé d'intervalles de Baire I_i, situés sur les droites $y=r_i$ respectivement et dont la longueur tend vers 0 avec i.

Enfin, pour chaque point x de R_0, l'ensemble $(H-\Gamma)^{(x)}$ contient, d'après la définition de $H-\Gamma$, une infinité dénombrable de s_i. L'ensemble $H^{(x)}$ contient donc une infinité dénombrable de nombres rationnels et il en est de même de $D-H^{(x)}$.

Considérons $H^{(x_1)}$ et $H^{(x_2)}$ pour deux points distincts x_i $(i=1,2)$ de R_0. Comme la longueur de I_i tend vers 0 avec i, un intervalle I_i d'indice i assez grand et qui coupe la droite $x=x_1$, ne coupe pas la droite $x=x_2$. On a donc $H^{(x_1)} \neq H^{(x_2)}$, c. q. f. d.

[7]) N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur un ensemble non mesurable* (B), Journ. de Math. 2 (1923), § 7, p. 65-68.

Envisageons à présent le crible H_σ, qui définit l'ensemble de Lebesgue de type (σ). Quel que soit le point x de R_0, il existe un et un seul point x^* de R^* tel que $H^{(x)}=H_\sigma^{(x^*)}$. Grâce à cette correspondance, on peut définir une fonction $\varphi(x)$ sur R_0 telle qu'on ait $x^*=\varphi(x)$. On peut alors démontrer le

Lemme 4. *$\varphi(x)$ transforme biunivoquement R_0 en un sous-ensemble M fermé dans R^*, et la fonction inverse $\varphi^{-1}(x)$ est continue sur M.*

Démonstration. Comme $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ pour deux points distincts x_1 et x_2 de R_0, la fonction $\varphi(x)$ transforme R_0 en M biunivoquement.

Pour montrer que M est fermé dans R^*, soit $\{x_n\}$ où $x_n=\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\nu_k^{(n)}}$, $n=1,2,...$, une suite de points de M qui converge vers un point $x_0=\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\nu_k^{(0)}}$ de R^*. Etant donné un nombre naturel k, il existe pour la suite finie $\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, ..., \nu_k^{(0)}$ de nombres naturels un N_0 naturel tel que pour $n>N_0$

$$\nu_i^{(0)}=\nu_i^{(n)} \qquad (i=1,2,...,k). \tag{2}$$

$H_\sigma^{(x_n)}$ contient les nombres rationnels $r_{\nu_i^{(n)}}$ et $H_\sigma^{(x_n)}=H^{(\varphi^{-1}(x_n))}$ $(n=1,2,...)$. Selon (2), on a $r_{\nu_i^{(0)}} \epsilon H^{(\varphi^{-1}(x_n))}$ pour $i=1,2,...,k$ et $n>N_0$. Par conséquent, J_i désignant la projection (sur l'axe $0X$) de l'intervalle de H situé sur la parallèle $y=r_{\nu_i^{(0)}}$ à l'axe $0X$, il vient

$$\varphi^{-1}(x_n) \epsilon \prod_{i=1}^{k} J_i \qquad (n>N_0). \tag{3}$$

Or, pour tout k naturel, on a $\prod_{i=1}^{k} J_i \neq 0$ où J_n est l'intervalle de Baire dont la longueur tend vers 0 avec $n\to\infty$. Par suite, $\prod_{i=1}^{\infty} J_i$ contient un et un seul point; désignons-le par x^*. En vertu de (3), $\varphi^{-1}(x_n)$ converge vers x^* pour $n\to\infty$, c. à d. $\lim_{n\to\infty} \varphi^{-1}(x_n)=x^*$. D'autre part, comme x^* est un point de J_i, on a $r_{\nu_i^{(0)}} \epsilon H^{(x^*)}$ pour $i=1,2,...$

Or, $H^{(x^*)}$ ne contient que les ponts $r_{\nu_i^{(0)}}$. En effet, soient r_ν un point de $H^{(x^*)}$ et J la projection (sur l'axe $0X$) de l'intervalle de H situé sur la parallèle $y=r_\nu$ à l'axe $0X$. Comme J est l'intervalle ouvert de R_0 qui contient x^* et $\lim_{n\to\infty}\varphi^{-1}(x_n)=x^*$, il existe un N_1 naturel tel qu'on a $\varphi^{-1}(x_n)\epsilon J$ pour $n>N_1$. Comme $H_\sigma^{(x_n)}=H^{(\varphi^{-1}(x_n))}$ pour tout n naturel, nous avons $r_\nu \epsilon H_\sigma^{(x_n)}$ pour $n>N_1$. Par suite, on peut choisir un k_n naturel de manière que $\nu_{k_n}^{(n)}=\nu$ pour $n>N_1$. On voit sans peine que $k_n\leqslant\nu_{k_n}^{(n)}$. On a donc $k_n\leqslant\nu_{k_n}^{(n)}=\nu$ pour $n>N_1$, de sorte qu'il existe un k_0 naturel tel que l'égalité $k_0=k_n$ est réalisée pour une infinité dénombrable des n et on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $k_0=k_n$ pour $n>N_1$, c. à d. que $\nu_{k_0}^{(n)}=\nu$ pour $n>N_1$. Comme $\lim_{n\to\infty}\nu_{k_0}^{(n)}=\nu_{k_0}^{(0)}$, il vient $\nu_{k_0}^{(0)}=\nu$, ce qui montre que $H^{(x^*)}$ ne contient que les points $r_{\nu_i^{(0)}}$ $(i=1,2,\ldots)$, c. à d. que $H^{(x^*)}=H_\sigma^{(x_0)}$.

Par conséquent, x_0 est un point de M et $\varphi^{-1}(x_0)=x^*=\lim_{n\to\infty}\varphi^{-1}(x_n)$. Donc, M est fermé dans R^* et $\varphi^{-1}(x)$ est continue sur M, c. q. f. d.

Lemme 5. *Dans tout ensemble analytique E condensé en soi, il existe une suite dénombrable d'ensembles F_σ, disjoints deux à deux et condensés dans E.*

Démonstration. Soit $\{p_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ une partie dénombrable de E, dense dans E. Soit i un indice donné. Le point p_i, comme un point de E, est un point de condensation de E. Nous allons déterminer par l'induction complète la suite d'ensembles parfaits (non vides) $F_j^{(i)}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1⁰ $F_j^{(i)}$ est contenu dans $EI_{i,j}$, où $I_{i,j}$ désigne l'intervalle fermé $\left[p_i-\frac{1}{j},\ p_i+\frac{1}{j}\right]$, et non-dense dans cet ensemble.

2⁰ $F_j^{(i)}$ sont disjoints deux à deux.

Définissons d'abord $F_1^{(1)}$. Le point p_1 étant un point de condensation de E, l'ensemble $I_{1,1}E$ est un ensemble analytique indénombrable. Il y existe donc un sous-ensemble parfait non-dense dans E. Désignons-le par $F_1^{(1)}$.

Supposons maintenant que nous avons déjà défini les ensembles $F_j^{(i)}$ pour $i+j\leqslant n$ $(n\geqslant 2)$ et que les conditions 1⁰ et 2⁰ sont satisfaites. Considérons les intervalles $I_{n,1}, I_{n-1,2},\ldots,I_{1,n}$. Puisque les ensembles $F_j^{(i)}$ où $i+j\leqslant n$ sont non-denses dans E, l'ensemble $\sum_{i+j\leqslant n}F_j^{(i)}$ l'est également. Or, E étant condensé en soi, il existe dans les ensembles $(I_{n-i,i+1}-\sum_{i+j\leqslant n}F_j^{(i)})E$ respectivement des ensembles parfaits disjoints $F_{n-i}^{(i+1)}$ $(i=0,1,2,\ldots,n-1)$ non-denses dans E.

Les ensembles $F_j^{(i)}$ sont ainsi définis par l'induction complète pour $i+j=2,3,\ldots$ Posons

$$E_n=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}F^{(i)}_{2^{n-1}(2k-1)}\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Je dis que les ensembles E_n (qui sont évidemment des F_σ contenus dans E et disjoints deux à deux) sont partout condensés dans E. Soient n un nombre naturel donné, p un point arbitraire de E et I un intervalle quelconque contenant p. Les points $\{p_n\}$ formant une partie dense de E, il existe un point p_i et, pour un k naturel assez grand, un intervalle $I_{i,2^{n-1}(2k-1)}$ contenus dans I. Alors, d'après 1⁰, on a $F^{(i)}_{2^{n-1}(2k-1)}\subset I$, d'où (selon la définition de E_n) $F^{(i)}_{2^{n-1}(2k-1)}\subset IE_n$. L'ensemble $F^{(i)}_{2^{n-1}(2k-1)}$ étant parfait et non vide, donc indénombrable, et I étant un intervalle arbitraire contenant p, le point p est donc le point de condensation de E_n, c. q. f. d.

Lemme 6. *E étant un ensemble analytique linéaire condensé en soi, il existe un complémentaire analytique Z contenu dans R_0 et tel que:*

1⁰ E admet une représentation paramétrique régulière sur Z quand on néglige au plus une infinité dénombrable de points de Z.

2⁰ quels que soient le point p de Z et l'intervalle ouvert I contenant p, il existe un sous-ensemble parfait P de Z tel que $P\subset IZ$.

Démonstration. Soit T un ensemble dénombrable de nombres irrationnels, dense dans R_0. L'ensemble analytique linéaire E étant condensé en soi, ER_0 en est aussi un. Il existe donc dans E, d'après le lemme 5, une suite dénombrable $\{E_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ d'ensembles F_σ disjoints deux à deux et condensés dans E.

Posons $E^*=ER_0-\sum_{n=1}^{\infty}E_n$. Puisque R_0-T est homéomorphe à R_0 et que E^* est un ensemble analytique, il existe dans le plan $R(x,y)$, d'après le théorème de M. S. Mazurkiewicz[8], un complémentaire analytique Z_0 tel que E^* est la projection uniforme de Z_0 sur l'axe OX et que la projection de Z_0 sur l'axe OY est contenue dans R_0-T.

---

[8]) Voir N. Lusin, loc. cit., p. 284.

En désignant par t_n $(n=1,2,\ldots)$ les points de T, posons

$$Z_1=Z_0+\sum_{n=1}^{\infty}E_n\times(t_n).$$

L'ensemble Z_1 ainsi défini est un complémentaire analytique et on a

$$\mathrm{Proj}_{0X}Z_1=\mathrm{Proj}_{0X}Z_0+\sum_{n=1}^{\infty}E_n=E^*+\sum_{n=1}^{\infty}E_n=ER_0.$$

De plus, cette projection étant uniforme, l'ensemble analytique E admet une représentation paramétrique régulière sur Z_1 quand on néglige au plus une infinité dénombrable de points. Or, comme on sait, il existe une transformation $\varphi(t)$ qui transforme l'ensemble $R_0\times R_0$, c. à d., l'ensemble de tous les points irrationnels du carré $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, en R_0 par homéomorphie. D'après la définition de Z_1, tous les points de Z_1 sont irrationnels; Z_1 est donc transformé par l'homéomorphie $\varphi(t)$ en un ensemble Z contenu dans R_0. L'ensemble Z est donc un complémentaire analytique tel que Z_1, et par suite E, admet une représentation paramétrique régulière sur Z quand on néglige au plus une infinité dénombrable de points.

On voit de même que Z remplit la condition 2⁰ du lemme 6. Soient p_0 un point de Z et I un intervalle ouvert contenant p_0. D'après la définition de $\varphi^{-1}(t)$, IR_0 est transformé en un ensemble U ouvert dans $R_0\times R_0$ et qui contient le point $\varphi^{-1}(p_0)=(x_0,y_0)$. L'ensemble T étant dense dans R_0, il existe un point t_n tel que l'on a $|y_0-t_n|<\varepsilon$ pour un $\varepsilon>0$ donné. On peut choisir donc dans T un point t_{n_0} de manière que $(x_0,t_{n_0})\epsilon U$. Le point x_0, comme projection de $\varphi^{-1}(p_0)$ sur l'axe $0X$, est un point de E, donc un point de condensation de E_{n_0}; par conséquent (x_0,t_{n_0}) est un point de condensation de $(E_{n_0}\times(t_{n_0}))U$. Or, $(E_{n_0}\times(t_{n_0}))U$, en tant qu'un F_σ, contient un ensemble parfait P. D'après la définition de $\varphi(t)$, il existe donc dans l'intervalle I un sous-ensemble parfait de Z, à savoir l'ensemble $\varphi(P)$, c. q. f. d.

Démonstration du théorème. Soit E un ensemble analytique linéaire indénombrable. Alors, l'ensemble E_0 de tous les points de condensation de E qui sont contenus dans E est analytique et chaque point de E_0 est aussi un point de condensation de cet ensemble. D'après le lemme 6, E_0 admet donc une représentation paramétrique régulière sur un complémentaire analytique qui remplit les conditions du lemme 6 quand on néglige une infinité dénombrable de points. Or, $E-E_0$ est au plus dénombrable; pour démontrer le théorème, il suffit donc de montrer que tout complémentaire analytique F qui satisfait aux conditions du lemme 6 est une image continue biunivoque de l'ensemble de Lebesgue, en négligeant une infinité dénombrable de points.

Selon les conditions du lemme 6:

1⁰ F est contenu dans R_0,

2⁰ quel que soit le point x de F et le voisinage U de x, il existe un sous-ensemble parfait $P\subset U$ de F.

Soit $\sigma=\{r_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ une suite de nombres rationnels telle que l'ensemble des r_n est semblable au sens d'ordre à l'ensemble R de tous les nombres rationnels. Par une démonstration analogue à celle du lemme 5, on établit l'existence d'une suite double d'ensembles parfaits $\{D_j^i\}$ $(i,j=1,2,\ldots)$, disjoints deux à deux, contenus dans F et tels que pour chaque $i=1,2,\ldots$ l'ensemble $\sum\limits_{j=1}^{\infty}D_j^{(i)}$ est condensé dans F, de sorte que chaque point de F est un point de condensation de $\sum\limits_{j=1}^{\infty}D_j^{(i)}$. Tout ensemble parfait étant somme d'un ensemble homéomorphe à R^* et d'un ensemble au plus dénombrable, il en résulte l'existence des ensembles $\{F_{ij}\}$ $(i,j=1,2,\ldots)$ satisfaisant aux conditions:

1⁰ F_{ij} sont homéomorphes à R^* et disjoints deux à deux,

2⁰ chaque point de F est un point de condensation de $\sum\limits_{j=1}^{\infty}F_{ij}$ pour tout nombre naturel i.

Par une transformation biunivoque et bicontinue qui transforme R^* en F_{ij}, l'ensemble de Lebesgue N_σ est transformé en un sous-ensemble N_{ij} de F_{ij}. Posons:

$$M_{ij}=F_{ij}-N_{ij},\qquad M=\sum_{i,j=1}^{\infty}M_{ij},\qquad F_1=F-\sum_{i,j=1}^{\infty}F_{ij}.$$

Alors

$$F=(F_1+M)+\sum_{i,j=1}^{\infty}N_{ij}.$$

Puisque F_1 est un complémentaire analytique et M est un ensemble analytique, il existe, selon le théorème précité de M. S. Mazurkiewicz, un complémentaire analytique G de R_0 tel que F_1+M est l'image continue biunivoque de G. Comme R_0-G est analytique, il existe selon le lemme 3 un crible H de type σ qui définit R_0-G et qui satisfait aux conditions du lemme 3. Désignons par H_σ le crible qui définit l'ensemble N_σ de Lebesgue de type (σ). Alors, pour chaque point x de R_0, il existe un et un seul point x^* de R^* pour lequel $H^{(x)}=H_\sigma^{(x^*)}$. Grâce à cette correspondance, on peut définir une fonction $\varphi(x)$ sur R_0 telle que $x^*=\varphi(x)$. D'après le lemme 4, $\varphi(x)$ transforme biunivoquement R_0 en un sous-ensemble fermé Q de R^*, et G en QN_σ. Or, d'après le lemme 4, la fonction inverse $\varphi^{-1}(x)$ est continue sur Q; donc QN_σ est transformé par $\varphi^{-1}(x)$ d'une façon biunivoque et continue en G. L'ensemble F_1+M étant une image continue biunivoque de G, on peut définir une fonction continue $\chi(x)$ qui transforme biunivoquement QN_σ en F_1+M:

$$\chi(QN_\sigma)=F_1+M.$$

Maintenant, nous allons prolonger $\chi(x)$ d'une façon continue sur N_σ.

Comme R^*-Q est ouvert dans R^* et N_σ est un sous-ensemble de R^*, l'ensemble $N_\sigma-Q$ est ouvert dans N_σ. Donc, $N_\sigma-Q$ est somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles [9]) de N_σ contigus à QN_σ et n'empiétant pas l'un sur l'autre. En les désignant par $I_n=(a_n,b_n)$ (où $a_n<b_n$ et $n=1,2,\ldots$), on a donc $N_\sigma-Q=\Sigma I_n$ et chaque a_n (b_n) peut être supposé égal à la borne supérieure (inférieure) des nombres $x\leqslant a_n$ $(x\geqslant b_n)$ de $N_\sigma Q$ si de tels nombres x existent, et à 0 (à 1) en cas contraire. Puisque N_σ est contenu dans l'intervalle $[0,1]$, on peut supposer en même temps que les intervalles I_n sont contenus dans l'intervalle $[0,1]$, c. à d. que $0\leqslant a_n<b_n\leqslant 1$.

Nous allons définir à présent deux nombres A_n et B_n pour tout intervalle I_n.

Considérons d'abord le cas où $0<a_n<b_n<1$. Pour tout entier $k>0$, les intervalles $[a_n-1/k,\ a_n]$ et $[b_n,b_n+1/k]$ de N_σ contiennent des points de $N_\sigma Q$. On peut donc considérer les bornes supérieures de $\chi(x)$ sur les $[a_n-1/k,\ a_n]$ et $[b_n,b_n+1/k]$ de N_σ (pour $x\in N_\sigma Q$). En désignant ces bornes supérieures par $A_n^{(k)}$ et $B_n^{(k)}$ respectivement, posons:

$$A_n=\lim_{k\to\infty}A_n^{(k)}\qquad\text{et}\qquad B_n=\lim_{k\to\infty}B_n^{(k)}.$$

---

[9]) Nous entendons ici par (a,b) et $[a,b]$ les intervalles de N_σ, qui sont les ensembles des nombres x de N_σ tels que $a<x<b$ et $a\leqslant x\leqslant b$ respectivement.

Considérons ensuite le cas où $0=a_n<b_n<1$. Comme pour tout entier $k>0$ l'intervalle $[b_n,b_n+1/k]$ de N_σ contient des points de $N_\sigma Q$, on peut définir les nombres $B_n^{(k)}$ de la même façon que plus haut. Posons alors $A_n=B_n=\lim\limits_{k\to\infty}B_n^{(k)}$.

Enfin, dans le cas où $0<a_n<b_n=1$, on définira les nombres $A_n^{(k)}$ comme dans le premier cas et posera $B_n=A_n=\lim\limits_{k\to\infty}A_n^{(k)}$.

Etant donnée une suite $\{\varepsilon_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ de nombres positifs convergeant vers 0, envisageons les intervalles ouverts

$$J_n=\big(\min(A_n,B_n)-\varepsilon_n,\ \max(A_n,B_n)+\varepsilon_n\big)\qquad(n=1,2,\ldots).$$

On voit que $J_n\sum\limits_{k=1}^{\infty}N_{nk}$ est non vide. En effet, d'après la définition de A_n et B_n, on a $J_n\chi(N_\sigma Q)\neq 0$; comme $\chi(N_\sigma Q)=F_1+M\subset F$, on a donc aussi $J_nF\neq 0$. Il en résulte selon la propriété 2° de l'ensemble F que $J_n\sum\limits_{k=1}^{\infty}F_{nk}\neq 0$. Par suite, il existe un k_0 naturel tel que $J_nF_{nk_0}\neq 0$ et, d'après le lemme 2, l'ensemble F_{nk_0} étant homéomorphe à R^* et N_{nk_0} étant le sous-ensemble de F_{nk_0} obtenu de N_σ par cette homéomorphie, on a $J_nN_{nk_0}\neq 0$. Par conséquent,

$$J_n\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}\neq 0.$$

D'ailleurs, $J_n\sum\limits_{k=1}^{\infty}N_{nk}$ est une image biunivoque et continue de N_σ. En effet, on peut décomposer R^* en un nombre fini aussi bien qu'en une infinité dénombrable d'ensembles ouverts dans R^* et deux à deux disjoints, donc séparés; d'après le lemme 2, la partie de N_σ située dans un quelconque de ces ensembles est homéomorphe à N_σ, donc, d'après le même lemme 2, homéomorphe aussi à chaque sommande non vide de $\sum\limits_{k=1}^{\infty}J_nN_{nk}$. Or, les ensembles N_{nk} étant disjoints deux à deux, $J_n\sum\limits_{k=1}^{\infty}N_{nk}$ est donc une image biunivoque et continue de N_σ.

Selon le lemme 2, I_nN_σ est homéomorphe à N_σ; il existe donc une transformation biunivoque et continue qui transforme I_nN_σ en $J_n\sum\limits_{k=1}^{\infty}N_{nk}$. Or, il existe une fonction $\varphi_n(x)$ continue et biunivoque sur I_nN_σ telle que:

$$\varphi_n(I_nN_\sigma)=J_n\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}-(A_n)-(B_n),\quad \lim_{x\to a_n+0}\varphi_n(x)=A_n,\quad \lim_{x\to b_n-0}\varphi_n(x)=B_n.$$

En effet, soit p_k un nombre réel étranger à R^* et situé entre c_{k+1} et c_k, où $c_k=a_n+\frac{b_n-a_n}{2^k}$ $(k=1,2,\ldots)$; soit q_k un nombre réel étranger à R^* et situé entre d_k et d_{k+1}, où $d_k=b_n-\frac{b_n-a_n}{2^k}$ $(k=1,2,\ldots)$.

Alors, on a:

$$a_n<\ldots<p_k<\ldots<p_2<p_1<q_1<q_2<\ldots<q_k<\ldots<b_n,$$

$$\lim_{k\to\infty} p_k=a_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty} q_k=b_n.$$

En désignant par L_{2i+1} l'intervalle (p_{i+1},p_i), par L_{2i} l'intervalle (q_i,q_{i+1}) et par L_1 l'intervalle (p_1,q_1), nous obtenons $I_nN_\sigma=\sum_{i=1}^{\infty}L_iN_\sigma$ et, d'après le lemme 2, chaque L_iN_σ est homéomorphe à N_σ.

Distinguons maintenant deux cas:

Premier cas: $A_n\neq B_n$. Supposons par exemple que $A_n<B_n$. De la même manière que nous avons établi l'inégalité $J_n\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}\neq 0$, on peut montrer que, pour chaque intervalle J contenant A_n ou B_n, on a $J\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}\neq 0$. L'ensemble N_{nk}, comme homéomorphe de N_σ, étant d'après le lemme 2 dense en soi, $\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}$ l'est aussi et il existe par conséquent deux suites monotones de points distincts $u_1,u_2,\ldots$ et $v_1,v_2,\ldots$ appartenant à $J_n\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}$ qui convergent vers A_n et B_n respectivement. Nous pouvons supposer que $u_i<\frac{A_n+B_n}{2}$ et $v_i>\frac{A_n+B_n}{2}$.

Soient s_i un nombre binairement rationnel étranger à R^* et situé entre u_i et u_{i+1}, et t_i un nombre binairement rationnel étranger à R^* et situé entre v_i et v_{i+1}. En désignant par P_{2i-1} l'intervalle aux extrémités s_i,s_{i+1} et par P_{2i} l'intervalle aux extrémités t_i,t_{i+1}, les ensembles P_i sont disjoints et $P_i\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}\neq 0$ pour $i=1,2,\ldots$, puisque $u_{i+1}\in P_{2i-1}\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}$ et $v_{i+1}\in P_{2i}\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}$. On démontre (comme auparavant pour l'ensemble $J_n\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}$) que $P_i\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}$ est alors une image biunivoque et continue de N_σ, donc aussi de $L_{i+2}N_\sigma$ pour i impair et de L_iN_σ pour i pair.

L'ensemble $J_n\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}-(A_n)-B_n)-\sum_{i=1}^{\infty}(P_i\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk})$ n'est pas vide, puisque u_1 et v_1 lui appartiennent. On démontre sans peine que $J_n\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}-(A_n)-(B_n)-\sum_{i=1}^{\infty}P_i(\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk})$ est un ensemble ouvert par rapport à $\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}$; on peut donc montrer comme auparavant que cet ensemble est une image biunivoque et continue de N_σ et par suite de L_1N_σ.

En désignant par $\varphi_n(x)$ une fonction continue définie sur I_nN_σ qui transforme biunivoquement à la fois $N_\sigma L_{2i+1}$ en $P_{2i-1}\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}$, $N_\sigma L_{2i}$ en $P_{2i}\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}$ et L_1N_σ en $J_n\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}-(A_n)-(B_n)-\sum_{i=1}^{\infty}P_i(\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk})$, nous obtenons une fonction biunivoque et continue sur I_nN_σ qui transforme I_nN_σ en l'ensemble $J_n\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}-(A_n)-(B_n)$ et telle que:

$$\lim_{\substack{x\to a_n+0\\ x\in I_nN_\sigma}}\varphi_n(x)=A_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to b_n-0\\ x\in I_nN_\sigma}}\varphi_n(x)=B_n.$$

Deuxième cas: $A_n=B_n$. En conservant les significations précédentes de $\{u_i\}$ et $\{s_i\}$ (la condition $u_i<\frac{A_n+B_n}{2}$ étant maintenant superflue), désignons par P_{2i-1} l'intervalle aux extrémités s_{2i-1}, s_{2i} et par P_{2i} l'intervalle aux extrémités s_{2i}, s_{2i+1}. Alors $\varphi_n(x)$ est une fonction continue définie sur I_nN_σ qui établit une corespondance biunivoque entre $N_\sigma L_{i+1}$ et $P_i\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}$, de même qu'entre $N_\sigma L_1$ et $J_n\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}-(A_n)-\sum_{i=1}^{\infty}P_i(\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk})=J_n\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}-(A_n)-(B_n)-\sum_{i=1}^{\infty}P_i\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}$ simultanément.

La fonction $\varphi_n(x)$, comme biunivoque et continue sur chacun des ensembles L_iN_σ, separés deux à deux, est continue sur $I_nN_\sigma=\sum_{i=1}^{\infty}L_iN_\sigma$ et, les ensembles P_i et $J_n\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}-(A_n)-\sum_{i=1}^{\infty}P_i\sum_{k=1}^{\infty}N_{nk}$

étant deux à deux disjoints, elle est biunivoque sur $I_n N_\sigma$. Les points s_i convergeant vers A_n, on a $\lim\limits_{\substack{x\to a_n+0\\ x\in I_n N_\sigma}} \varphi_n(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b_n-0\\ x\in I_n N_\sigma}} \varphi_n(x) = A_n$ et

$$\varphi_n(I_n N_\sigma) = J_n \sum_{k=1}^{\infty} N_{nk} - (A_n) = J_n \sum_{k=1}^{\infty} N_{nk} - (A_n) - (B_n).$$

Posons $\chi(x) = \varphi_n(x)$ sur $I_n N_\sigma$. Alors $\chi(x)$ prend des valeurs distinctes sur des points distincts de N_σ. Nous allons montrer que $\chi(x)$ est continue sur N_σ.

Soit x_0 un point de N_σ. Lorsque x_0 appartient à l'intervalle $I_n N_\sigma$, on a $\chi(x) = \varphi_n(x)$ sur $I_n N_\sigma$ d'après la définition de $\chi(x)$, et $\varphi_n(x)$ est continue sur $I_n N_\sigma$. La fonction $\chi(x)$ est donc continue en tout point x_0 de $I_n N_\sigma$.

Soit maintenant x_0 un point de QN_σ. Trois cas sont alors à distinguer:

I. x_0 est un point isolé de QN_σ,
II. x_0 est un point d'accumulation de QN_σ de deux côtés,
III. x_0 est un point d'accumulation de QN_σ seulement d'un côté.

Dans le cas I, il existe deux intervalles I_{n_1} et I_{n_2} tels que $b_{n_1} = a_{n_2} = x_0$. Il résulte de la définition des nombres A_n et B_n que l'on a alors $B_{n_1} = \chi(x_0) = A_{n_2}$; la continuité de $\chi(x)$ au point x_0 résulte des formules:

$$\lim_{x\to x_0-0} \chi(x) = \lim_{x\to b_{n_1}-0} \chi(x) = \lim_{x\to b_{n_1}-0} \varphi_{n_1}(x) = B_{n_1}.$$

$$\lim_{x\to x_0+0} \chi(x) = \lim_{x\to a_{n_2}+0} \chi(x) = \lim_{x\to a_{n_2}+0} \varphi_{n_2}(x) = A_{n_2}.$$

Dans le cas II, la fonction $\chi(x)$ étant continue sur QN_σ et le point x_0 appartenant à QN_σ, comme il n'est l'extrémité d'aucun intervalle I_n et comme $\varepsilon_n \to 0$, on peut déterminer: d'abord un intervalle $J = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ de manière que

1⁰ l'oscillation de $\chi(x)$ sur JQN_σ soit $<\varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ donné,
2⁰ $\varepsilon_n \geqslant \varepsilon$ entraîne $I_n J = 0$,

et puis un intervalle $J' = (x_0 - \beta, x_0 + \beta)$ tel que

1'⁰ $\beta < \alpha$,
2'⁰ la condition $I_n J' \neq 0$, où $I_n = (a_n, b_n)$, entraîne

$$x_0 - \alpha < a_n < b_n < x_0 + \alpha.$$

Supposons maintenant que $x \in J' N_\sigma$ et $x_0 \neq x$. Si $x \in QN_\sigma$, la condition 1⁰ entraîne $|\chi(x) - \chi(x_0)| < \varepsilon$ (puisqu'on a d'après 1'⁰ $J' \subset J$). Supposons donc que $x \in N_\sigma - Q$. Alors, il existe un intervalle $I_{n_0} = (a_{n_0}, b_{n_0})$ tel que $x \in I_{n_0}$. D'après la définition de I_{n_0}, on a $J' I_{n_0} \neq 0$, ce qui donne d'après 2⁰ $x_0 - \alpha < a_{n_0} < b_{n_0} < x_0 + \alpha$. Selon la définition de A_n, B_n et $\chi(x)$, les nombres $|A_{n_0} - B_{n_0}|$, $|A_{n_0} - \chi(x_0)|$ ne dépassent pas l'oscillation de $\chi(x)$ sur JQN_σ; la condition 1⁰ entraîne donc $|A_{n_0} - B_{n_0}| < \varepsilon$ et $|A_{n_0} - \chi(x_0)| < \varepsilon$. Or, puisque la valeur de $\varphi_{n_0}(x)$, où $x \in I_{n_0} N_\sigma$, appartient à l'intervalle

$$J_{n_0} = \left(\min(A_{n_0}, B_{n_0}) - \varepsilon_{n_0},\ \max(A_{n_0}, B_{n_0}) + \varepsilon_{n_0}\right),$$

on a

$$\min(A_{n_0}, B_{n_0}) - \varepsilon_{n_0} < \varphi_{n_0}(x) < \max(A_{n_0}, B_{n_0}) + \varepsilon_{n_0},$$

ce qui donne $|(A_{n_0} - \varphi_{n_0}(x)| < |A_{n_0} - B_{n_0}| + \varepsilon_{n_0}$. Nous avons donc

$$|\chi(x) - \chi(x_0)| = |\varphi_{n_0}(x) - \chi(x_0)| \leqslant |\varphi_{n_0}(x) - A_{n_0}| + |A_{n_0} - \chi(x_0)| <$$
$$< |A_{n_0} - B_{n_0}| + \varepsilon_{n_0} + |A_{n_0} - \chi(x_0)| < 2\varepsilon + \varepsilon_{n_0}.$$

Par conséquent, la condition 2⁰ entraîne dans le cas considéré l'inégalité $|\chi(x) - \chi(x_0)| < 3\varepsilon$, de sorte que la continuité de $\chi(x)$ au point x_0 est dans ce cas établie.

Dans le cas III, où le point x_0 est un point accumulation p. ex. du côté gauche et isolé du côté droit, on démontre la continuité du côté droit comme dans le cas I, et du côté gauche comme dans le cas II.

Ainsi, dans tout les cas $\chi(x)$ est continue au point x_0, et par suite en tout point de N_σ.

Ceci établi, considérons l'ensemble $\chi(N_\sigma)$. Selon la définition de $\chi(x)$, nous avons

$$\chi(N_\sigma) = \chi(QN_\sigma) + \sum_{i=1}^{\infty} \chi(I_n N_\sigma) = F_1 + M + \sum_{n=1}^{\infty} \left(J_n \sum_{k=1}^{\infty} N_{nk} - (A_n) - (B_n)\right) =$$
$$= F - \sum_{n,k=1}^{\infty} (N_{nk} - J_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(J_n \sum_{k=1}^{\infty} N_{nk}\right)((A_n) + (B_n)).$$

Par conséquent

$$F = \chi(N_\sigma) + \sum_{n,k=1}^{\infty} (N_{nk} - J_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(J_n \sum_{k=1}^{\infty} N_{nk}\right)((A_n) + (B_n)).$$

Or, $\chi(N_\sigma)$ et $N_{nk} - J_n\ (n, k = 1, 2, \ldots)$ sont disjoints deux à deux et, d'après le lemme 2, $N_{nk} - J_n$ est homéomorphe à N_σ, quand on néglige au plus deux points (les points extrêmes de J_n). Donc, en négligeant au plus une infinité dénombrable de points, l'ensemble F est somme au plus d'une infinité dénombrable d'ensembles deux à deux disjoints qui sont des images biunivoques et continues de N_σ. Par conséquent, selon le lemme 2, F est une image biunivoque et continue de N_σ, quand on néglige au plus une infinité dénombrable de points, c. q. f. d.

Je tiens à remercier, en terminant, Mlle S. Braun de diverses remarques et corrections qu'elle m'a prêtées pendant la rédaction de cette Note.

Institut Mathématique
de l'Université Impériale de Hokkaidô,
Sapporo, Japon.

Algebraische Fassung des Maßproblems.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

Das geometrische Maßproblem besteht bekanntlich im Folgenden: es soll in einem gegebenen Punktmengensystem S eine Maßfunktion definiert werden, d. h. eine Funktion f, die jeder Menge X des Systems eine nichtnegative reelle Zahl $f(X)$, das sog. Maß, eindeutig zuordnet, wobei die als Eichmenge (Einheit des Maßes) gewählte Punktmenge E das Maß 1 erhält, zwei kongruente Punktmengen das gleiche Maß haben und schließlich das Maß der Summe zweier elementfremder Mengen gleich der Summe der Maße der beiden Summanden ist (von der Ausdehnung der letzten Forderung auf abzählbar viele Summanden wird hier abgesehen) [1].

In der vorliegenden Arbeit will ich eine möglichst allgemeine und abstrakte Fassung des Maßproblems skizzieren. In dieser Fassung gewinnen Begriffe und Ergebnisse einen algebraischen Charakter: es wird ein System von beliebigen Dingen betrachtet, für dessen Elemente eine stets ausführbare, kommutative und assoziative binäre Operation, die Addition, definiert ist; es wird gefragt, ob es einen Homomorphismus gibt, der dieses System auf eine Menge von nichtnegativen Zahlen abbildet, und zwar auf eine Menge, die mindestens eine von 0 verschiedene endliche Zahl enthält [2]). Es zeigt sich, daß die Möglichkeit, einen solchen Homomorphismus aufzustellen, ausschließlich von der Beschaffenheit des als Einheit gewählten Elements abhängt; eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür besteht in der sog. Normalität dieses Elements. Dieser Fundamentalsatz gründet sich auf gewisse Begriffe und Sätze, die an und für sich interessant zu sein scheinen und Verallgemeinerungen von gewissen geometrischen Begriffsbildungen darstellen (z.B. die Begriffe des inneren und des äußeren Maßes). Alle diese Ergebnisse sind in § 1 enthalten.