$Z_n'^{r+1}$ is homologous to $Z_n'^{r+1}$ in M, and therefore $Z_n'^{r+1}$ is homologous to Z^{r+1} in M for every n.

Thus to establish the lemma for any $\varepsilon>0$, one takes n so great that $\varepsilon>2\delta_n$ and puts $Z_\varepsilon^{r+1}=Z_n'^{r+1}$.

(3.11) ***Corollary.*** *The* $(r+1)$*-dimensional Betti group* (*mod* 2) [16]) *of* M^r *is isomorphic with the corresponding group of* M.

4. Let one replace M^r in the above theorem by a closed subset M^* of M such that dimension of $(M-M^*)\leqslant r$, then one obtains a known result, which is the consequence of a theorem proved by Eilenberg [17]). It will be shown that M^r *is contained in* M^*, *while the converse is not true*. Thus for the case of complete cycles (mod 2) M^r is a more essential kernel of the set M. If $M^r=0$ the assertion is trivial. However, it is well to point out that in this case M can contain no essential Z^{r+1}. [15]) If M contains an E_r, it suffices to show that a point p belonging to the minimum M^r implies that there exists a sequence of points $\{p_i\}$ contained in M^r such that for each i the dimension of M^r at p_i is greater than or equal to $(r+1)$, and that $\overline{\Sigma p_i}$ contains p. Select a sequence of positive numbers $\{\varepsilon_i\}$ approaching zero and take ε_i-neighborhoods, $V_{\varepsilon_i}(p)$, of p. Then by definition of M^r there exists a point p_i contained in $V_{\varepsilon_i}(p)$ for each i, such that p_i belongs to some E_r which in turn is contained in M^r. By a known theorem [18]) the dimension of E_r at p_i is greater than or equal to $(r+1)$. Hence the dimension of M^r at p_i is not less than $(r+1)$.

That M^r need not contain M^* is shown by the example of a space consisting of a 2-sphere and of a tangent square.

The University of Virginia.

[16]) This group is called the r-th connectivity group by Vietoris, loc. cit.

[17]) S. Eilenberg, *Deux théorèmes sur l'homologie dans les espaces compacts*, loc. cit.

[18]) See W^1 (1.7), p. 135.

Eine Normalitätsbedingung für Familien von Potentialfunktionen.

Von

A. Tulajkov (Moskau).

Es sei E eine Familie reeller Potentialfunktionen $U(P)$, die wir uns in einem offenen (eventuell unbeschränkten) zusammenhängenden Gebiet D des n-dimensionalen Euklidischen Raumes definiert und regulär denken. Man nennt E *normal* in D, wenn eine beliebige Folge von Funktionen aus E eine Teilfolge enthält, welche auf jedem beschränkten abgeschlossenen $\overline{D}_1\subset D$ entweder im üblichen Sinne gleichmässig konvergiert oder im ganzen $\overline{D}_1$ nach $+\infty$ bzw. nach $-\infty$ gleichmässig strebt.

Die erste Normalitätsbedingung für solche Funktionenfamilien bei beliebiger Dimensionszahl wurde von Privaloff [1]) gegeben. Weitere Bedingungen findet man bei Montel [2]). Da seine letzte Abhandlung auch notwendige und hinreichende Bedingungen enthält, gestattet sich Verfasser folgenden Satz mitzuteilen, obwohl der Beweis fast trivialerweise aus Montelschen Ausführungen folgt:

Satz. *Die Familie E in dem Gebiet D* (unter den oben angegebenen Bedingungen) *ist dann und nur dann normal, wenn für jedes beschränkte, zusammenhängende, abgeschlossene Teilgebiet $\overline{D}_1$ von D es eine Zahl $M=M(\overline{D}_1)>0$ gibt, derart dass jede Funktion $U\in E$ mindestens einen Wert $a=a(U)$ mit $|a|<M$ auf $\overline{D}_1$ nicht annimmt.*

[1]) I. Privaloff, *Sur les fonctions harmoniques*, Rec. Math. Moscou 32 (1925), 464-469.

[2]) P. Montel, *Familles de fonctions harmoniques*, Fund. Math. 25 (1935), 388-407.

Man beweist, dass die Bedingung des Satzes hinreichend ist, wörtlich so, wie bei Montel[3]) (Montel selbst setzt voraus, dass der verbotene Wert a nur von $\overline{D}_1$, nicht aber von der Funktion U abhängig ist).

Die Notwendigkeit der Bedingung beweist man wie folgt. Wenn die Bedingungen des Satzes nicht erfüllt sind, so gibt es ein $\overline{D}_1$ derart, dass für jedes $M>0$ ein $U_M \epsilon E$ existiert, welches auf $\overline{D}_1$ alle Werte a mit $|a|<M$ annimmt. Wählt man $M_n \to +\infty$, so kann die Folge U_{M_n} offenbar keine konvergente Teilfolge enthalten.

[3]) l.c. Fund. Math. **25** (1935), 390.

Sur la représentation paramétrique régulière des ensembles analytiques.

Par

Motokiti Kondô (Sapporo, Japon).

Pour un ensemble linéaire N, appelons *régulière* (dans N) toute fonction $f(t)$ définie dans N qui ne prend de valeurs égales pour des points distincts, c. à d. telle que, pour deux points $t_1 \neq t_2$ de N, on a toujours $f(t_1) \neq f(t_2)$.

Nous dirons qu'un ensemble linéaire E admet une *représentation paramétrique régulière* sur N, si E est l'ensemble des valeurs d'une fonction $x=f(t)$ définie dans N, continue et régulière dans cet ensemble. M. N. Lusin a démontré le théorème suivant[1]):

Tout ensemble mesurable (B) *indénombrable admet une représentation paramétrique régulière sur l'ensemble de tous les nombres irrationnels, quand on néglige une infinité dénombrable de points de cet ensemble.*

M. Sierpiński a posé le problème suivant: *existe-t-il un ensemble linéaire N tel que tout ensemble analytique indénombrable admette une représentation paramétrique régulière sur N?* [2]).

Nous allons résoudre affirmativement ce problème[3]). Plus précisément:

[1]) N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 114.

[2]) Fund. Math. **26** (1936), p. 334.

[3]) Pour une autre méthode de résoudre ce problème, voir M. Kondô, *Sur la représentation paramétrique des ensembles*, Proc. Imp. Acad. Japan **14** (1937), p. 59.