On a évidemment $m_1 < m_2 < \ldots$ et d'après (5)

(6) $$|f^{m_k}(x_i) - f(x_i)| < 1/k \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Or, on a d'après (3)

$$\lim_{n=\infty} f_n^{m_k}(x) = f^{m_k}(x) \qquad \text{pour} \quad x \in E$$

et il existe pour tout k naturel un indice ν_k tel que

(7) $$|f_n^{m_k}(x_i) - f^{m_k}(x_i)| < 1/k \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad \text{et} \quad n > \nu_k.$$

Posons

$$n_k = 1 + \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k.$$

Alors $n_1 < n_2 < \ldots$ et d'après (7)

(8) $$|f_{n_k}^{m_k}(x_i) - f^{m_k}(x_i)| < 1/k \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Les formules (6) et (8) donnent

$$|f_{n_k}^{m_k}(x_i) - f(x_i)| < 2/k \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

ce qui entraîne (2) en vertu de (4), c. q. f. d.

L'existence d'une fonction de classe 2 de Baire montre que ce théorème ne subsiste pas pour les ensembles E de puissance du continu et, si l'on admet l'hypothèse du continu, même pour aucun ensemble E indénombrable. Or, il me semble que sans faire appel à l'hypothèse du continu il serait fort difficile de le démontrer.

Voici encore une application de notre théorème.

Soit Φ une famille quelconque de fonctions réelles définies sur un ensemble dénombrable E. Définissons par l'induction les familles Φ^α ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) comme suit: $\Phi^0 = \Phi$ et Φ^α pour $\alpha > 0$ est la famille de toutes les fonctions réelles definies sur E qui y sont des limites de suites infinies de fonctions de la famille $\Phi^{\alpha-1}$. D'après notre théorème, on a alors $\Phi^2 = \Phi^1$ pour toute famille Φ, ce qui résoût un problème posé par M^lle S. Braun et M. A. Lindenbaum, en montrant que le théorème de M. Neubauer[1]), établi pour les ensembles E non séparables, est en défaut pour les E dénombrables.

[1]) ce volume, p. 269, th. 1.2.

Beweis des Satzes, dass jede im kleinen zusammenhängende Kurve konvex metrisiert werden kann.

Von

Gustav Beer (Wien).

I. Problemstellung.

§ 1. Ein metrischer Raum heisst nach Menger[1]) *konvex*, wenn es zu je zweien seiner Punkte a und b einen Zwischenpunkt gibt, d.h. einen Punkt c, der von a und b verschieden ist und der Abstandsformel $r(a,b) = r(a,c) = r(c,b)$ genügt. Es wird a. a. O. bewiesen, dass jedes konvexe Kontinuum zusammenhängend im kleinen ist, und es wird die Frage aufgeworfen, ob umgekehrt jedes im kleinen zusammenhängende Kontinuum konvexifizierbar ist, d.h. ob in ihm eine zur ursprünglichen Metrik topologisch äquivalente konvexe Metrik existiert.

Hier soll nun gezeigt werden, dass dies für im kleinen zusammenhängende Kurven (d.h. eindimensionale Kontinua) tatsächlich der Fall ist. Es werden zunächst in den Abschnitten II, III und IV einige topologische Sätze über im kleinen zusammenhängende Kurven bewiesen, auf Grund deren dann in Abschnitt V die Konstruktion der konvexen Metrik durchgeführt wird.

§ 2. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$\bar{A}$ abgeschlossene Hülle von A.
$d(A)$ Durchmesser von A.
$B(A)$ Begrenzung von A.
0 die leere Menge.

[1]) K. Menger, *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann. **100** (1928), p. 81.

$A \cdot B$. Durchschnitt von A und B.
$A - B$ Differenz von A und B, d.i. die Menge aller Punkre von A, die nicht zu B gehören.
$A \subset B$ A ist Teilmenge von B.
$r(a,b)$ Abstand der Punkte a und b.

$\operatorname{Lim\,sup} M_i$ Menge aller Punkte, deren jede Umgebung mit unendlich vielen Mengen der Folge M_i Punkte gemein hat.

$\operatorname{Lim\,inf} M_i$ Menge aller Punkte, deren jede Umgebung mit fast allen Mengen der Folge M_i Punkte gemein hat.

Den Begriff des Limes superior wollen wir auch bei einem System von endlich vielen Mengen anwenden, und zwar sei dann $\operatorname{Lim\,sup} = 0$.

Wir werden häufig Mengensysteme zu betrachten haben, bei denen es ungewiss ist, ob sie aus endlich oder aus abzählbar unendlich vielen Mengen bestehen. Wir wollen die Mengen eines solchen Systems stets durch einen beigefügten Index bezeichnen, der je nachdem, ob es sich um ein endliches oder unendliches System handelt, die Werte $1, 2, \ldots$ bis zu einer bestimmten endlichen Zahl annimmt oder alle natürlichen Zahlen durchläuft. Ist etwa $M_1, M_2, \ldots$ ein solches Mengensystem, so ist es also ungewiss, ob M_i für sämtliche natürlichen Zahlen i definiert ist oder nur für alle Werte von i, die unter irgend einer endlichen Schranke liegen. Wenn wir nun einen Satz über „alle“ Mengen M_i aussprechen oder das Symbol $\sum_i M_i$ verwenden, so ist stets gemeint, dass der Index i alle Werte durchläuft, für welche M_i definiert ist. Dementsprechend bedeutet etwa $\sum_{i>i_0} M_i$, dass die Summe $\sum$ über alle diejenigen Werte von i zu erstrecken ist, welche grösser als i_0 sind und für welche M_i definiert ist. Sollte es keinen solchen Wert von i geben, so sei $\sum_{i>i_0} M_i = 0$.

II. Ein Zerlegungssatz für im kleinen zusammenhängende Kurven.

§ 3. Der unseren Betrachtungen zu Grunde liegende Raum *K sei im folgenden stets eine im kleinen zusammenhängende Kurve.*

Wir beweisen zunächst einige später zu verwendende topologische Sätze.

Satz 1. *Es sei O eine zusammenhängende offene Menge und A eine abgeschlossene Menge, die mit O einen nicht leeren Durchschnitt hat. Dann hat jede Komponente von $O-A$ einen Häufungspunkt in A.*

Beweis. $O-A$ ist offen und daher sind auch alle Komponenten von $O-A$ offen, da der Raum zusammenhängend im kleinen vorausgesetzt ist. Wegen $O \cdot A \neq 0$ ist nun jede Komponente von $O-A$ echter offener Teil von O und somit wegen des Zusammenhanges von O nicht in O abgeschlossen und muss also einen Häufungspunkt in A haben.

Satz 2. *Ist O eine zusammenhängende offene Menge und A eine in O enthaltene abgeschlossene Menge, so ist der Limes superior der Komponenten von $O-A$ Teilmenge von A.*

Beweis. Ist A leer, so ist der Satz trivial. Für den Fall $A \neq 0$ führen wir den Beweis indirekt. Angenommen, der Limes superior der Komponenten von $O-A$ enthielte einen nicht zu A gehörenden Punkt p. Dann können wir aus den Komponenten von $O-A$ eine Folge $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$ derart herausgreifen, dass p zu $\operatorname{Lim\,inf} O_n$ gehört. Setzen wir $\operatorname{Lim\,sup} O_n = L$, so ist L auf Grund des Satzes von Zoretti zusammenhängend. Aus Satz 1 ergibt sich ferner, dass L mit A einen Punkt gemein haben muss, und schliesslich folgt aus der Offenheit der Komponenten von $O-A$, dass L zu $O-A$ fremd und somit $L \cdot O = L \cdot A$ ist. L wäre also eine zusammenhängende abgeschlossene Menge, welche mit der offenen Menge O einen nicht leeren abgeschlossenen Durchschnitt hat. Dann müsste L ganz in O enthalten sein, während L den Punkt p enthält, der als Punkt von L nicht zu $O-A$ gehört und nach Annahme nicht zu A gehört, also ausserhalb O liegt.

Definition I. Unter einem *Normalstück* verstehen wir die abgeschlossene Hülle einer nicht leeren zusammenhängenden offenen Menge mit höchstens nulldimensionaler Begrenzung.

Satz 3. *Zwei Punkte eines Normalstückes können durch einen Bogen verbunden werden, der bis auf die Endpunkte ganz im Innern des Normalstückes liegt.*

Der Satz folgt unmittelbar aus einem Satz von Whyburn[1]), wonach unter den Voraussetzungen von Satz 3 jeder Punkt der Begrenzung aus dem Innern durch Bögen erreichbar ist, d.h. mit einem inneren Punkt durch einen Bogen verbunden werden kann, der bis auf den einen in der Begrenzung liegenden Endpunkt ganz im Innern verläuft.

---

[1]) G. T. Whyburn, *A generalized notion of accessibility*, Fund. Math. **14** (1929), p. 315, Corollar.

§ 4. *Definition II.* Unter einer *halbnormalen Zerlegung* $\mathfrak{Z}$ eines Normalstückes S verstehen wir ein System von endlich oder abzählbar unendlich vielen Normalstücken $S_1, S_2, \ldots$, welches die folgenden vier Forderungen erfüllt:

1. $S=\overline{\sum_i S_i}$.

2. *Zwei verschiedene Stücke S_i und S_k haben miteinander höchstens Begrenzungspunkte gemein.*

3. $\overline{\sum_i B(S_i)}$ *ist höchstens nulldimensional.*

4. $B(S) \cdot \operatorname{Lim\,sup} S_i = 0$.

Wir nennen diejenigen Stücke von $\mathfrak{Z}$, welche mit $B(S)$ Punkte gemein haben, *Randstücke* von $\mathfrak{Z}$, alle andern Stücke nennen wir *innere Stücke* von $\mathfrak{Z}$. Die abgeschlossene Hülle der Summe aller inneren Stücke heisse das *Zentrum* von $\mathfrak{Z}$ und werde mit $Z(\mathfrak{Z})$ bezeichnet. Wegen Forderung 4 ist $Z(\mathfrak{Z}) \cdot B(S)=0$ und daher das Zentrum im offenen Kern von S enthalten. Die nach Forderung 3 höchstens nulldimensionale Menge $\overline{\sum_i B(S_i)}$ bezeichnen wir mit $B(\mathfrak{Z})$.

Aus Forderung 4 folgt unmittelbar:

Satz 4. *Eine halbnormale Zerlegung enthält nur endlich viele Randstücke.*

Zufolge Satz 4 kann man die Stücke einer halbnormalen Zerlegung $\mathfrak{Z}$ derart anordnen, dass zuerst die Randstücke kommen. Eine solche Anordnung nennen wir eine *normale Anordnung* der halbnormalen Zerlegung $\mathfrak{Z}$.

Definition II'. Ist ε eine positive Zahl, so verstehen wir unter einer *halbnormalen ε-Zerlegung* eines Normalstückes S eine halbnormale Zerlegung von S, deren Stücke sämtlich einen kleineren Durchmesser als ε haben.

Satz 5. *Ist S ein Normalstück, O dessen offener Kern und A eine zur Begrenzung von S fremde höchstens nulldimensionale abgeschlossene Menge, so bilden die abgeschlossenen Hüllen der Komponenten von $O-A$ eine halbnormale Zerlegung von S.*

Beweis. Es seien $S_1, S_2, \ldots$ die abgeschlossenen Hüllen der (endlich oder unendlich vielen) Komponenten von $O-A$. Wir zeigen, dass für die S_i die vier Forderungen von Definition II erfüllt sind.

Forderung 1 folgt daraus, dass A als höchstens nulldimensionale abgeschlossene Menge in O nirgends dicht ist und somit $O-A$ in O, und daher in S dicht ist.

Forderung 2 ergibt sich unmittelbar aus der Definition der S_i.

Forderung 3. Die Komponenten von $O-A$ sind sämtlich offen und daher $\overline{\sum_i B(S_i)}$ zu $O-A$ fremd. Nun ist

$$S=O+B(S)=(O-A)+B(S)+A \cdot S;$$

folglich $\overline{\sum_i B(S_i)} \subset B(S)+A$. Die Mengen $B(S)$ und A sind beide abgeschlossen und höchstens nulldimensional, also ist $B(S)+A$ und $\overline{\sum B(S_i)}$ ebenfalls höchstens nulldimensional.

Forderung 4: Weil $A \cdot B(S)$ leer ist, ist $A \cdot O$ abgeschlossen. Wir können daher auf O und $A \cdot O$ den Satz 2 anwenden, woraus Forderung 4 folgt.

Die S_i sind definitionsgemäss abgeschlossene Hüllen nicht leerer zusammenhängender offener Mengen, deren Begrenzung wegen Forderung 3 höchstens nulldimensional ist. Die S_i sind daher sämtlich Normalstücke (Definition I), womit Satz 5 vollständig bewiesen ist.

Satz 6. *Ist S ein Normalstück, so gibt es für jedes $\varepsilon>0$ eine halbnormale ε-Zerlegung von S.*

Wir schicken dem Beweise folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. *Ist A eine nulldimensionale abgeschlossene Menge, so gibt es in jedem Punkt p eine Umgebung, deren Begrenzung nulldimensional und zu A fremd ist und deren Durchmesser kleiner ist als eine beliebige positive Zahl ε.*

Beweis. Da der zu Grunde gelegte Raum eine Kurve ist, gibt es in jedem Punkt beliebig kleine Umgebungen mit nulldimensionaler Begrenzung. Gehört nun der Punkt p nicht zur Menge A, so ist die Behauptung trivial, denn wegen der Abgeschlossenheit von A ist in diesem Fall die Begrenzung jeder hinlänglich kleinen Umgebung zu A fremd.

Um nun den Hilfssatz für den Fall zu beweisen, dass p ein Punkt der Menge A ist, nehmen wir mit A folgende Zerlegung vor. Es sei $A=A_1+\ldots+A_n$, wobei die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen und paarweise fremd sein und einen kleineren Durchmesser als $\varepsilon/3$ haben mögen. Da A nulldimensional und abgeschlossen ist, ist eine solche Zerlegung stets möglich. Es sei nun etwa A_k derjenige Teil, welcher den Punkt p enthält. Da die Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sämtlich abgeschlossen sind, hat A_k von allen anderen Mengen A_i einen positiven Abstand, wir können also jedem Punkt q von A_k eine Umgebung $U(q)$ derart zuordnen, dass:

(1) die abgeschlossene Hülle $\overline{U(q)}$ zu allen von A_k verschiedenen Mengen fremd ist,

(2) $U(q)$ einen kleineren Durchmesser als $\varepsilon/3$ hat,

(3) die Begrenzung $B(U(q))$ nulldimensional ist.

Nach dem Borelschen Theorem können wir ferner aus den Umgebungen $U(q)$ endlich viele herausgreifen, welche die ganze Menge A_k überdecken. Die Vereinigung dieser endlich vielen Umgebungen stellt nun eine Umgebung dar, wie sie in unserem Hilfssatz verlangt wird, denn sie hat als Vereinigung endlich vieler Mengen mit nulldimensionaler Begrenzung selbst eine nulldimensionale Begrenzung, hat ferner wegen $d(A_k) < \varepsilon/3$ und $d(U(q)) < \varepsilon/3$ einen kleineren Durchmesser als ε und hat schliesslich eine zu A fremde Begrenzung, denn sie enthält A_k im Innern und ihre abgeschlossene Hülle ist zu allen andern Mengen A_i fremd.

Nun gehen wir an den Beweis von Satz 6. Wir bezeichnen den offenen Kern von S mit O. Um eine halbnormale ε-Zerlegung von S erhalten, haben wir nach Satz 5 eine abgeschlossene höchstens nulldimensionale Menge A anzugeben, für welche $A \cdot B(S)$ leer ist und alle Komponenten von $O - A$ einen Durchmesser $< \varepsilon$ haben.

Zu diesem Zwecke ordnen wir jedem Punkt p von S eine Umgebung $U(p)$ zu, welche einen kleineren Durchmesser als ε hat und deren Begrenzung nulldimensional und zu $B(S)$ fremd ist. Nach dem eben bewiesenen Hilfssatz gibt es in jedem Punkt solche Umgebungen, denn $B(S)$ ist nach Definition I höchstens nulldimensional. Nach dem Borelschen Theorem können wir nun aus diesem Umgebungssystem endlich viele Umgebungen derart herausgreifen, dass ganz S von ihnen überdeckt wird. Die Summe der Begrenzungen dieser endlich vielen Umgebungen ist dann eine nulldimensionale abgeschlossene Menge der gewünschten Art.

III. Sätze über halbnormale Zerlegungen.

§ 5. Während dieses ganzen Abschnittes bedeute $\mathfrak{Z}$ eine halbnormale Zerlegung eines Normalstückes S. Die Normalstücke, aus denen die Zerlegung besteht, seien $S_1, S_2, \ldots$ Der offene Kern von S möge O, die offenen Kerne der Stücke S_i mögen O_i heissen.

Satz 7. Lim sup $S_i \subset B(\mathfrak{Z})$.

Beweis. Es sei p ein Punkt von Lim sup S_i. Da $B(\mathfrak{Z})$ abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, dass in jeder Umgebung von p Punkte von $B(\mathfrak{Z})$ liegen. Wir können uns hiebei auf zusammenhängende Umgebungen von p beschränken, denn wegen des Zusammenhanges im kleinen ist in jeder Umgebung eine zusammenhängende Umgebung enthalten.

Es sei also $U(p)$ eine zusammenhängende Umgebung von p. Da p zu Lim sup S_i gehört, hat $U(p)$ mit unendlich vielen Stücken S_i Punkte gemein. Andererseits ist $U(p)$ in keinem dieser Stücke ganz enthalten, denn p kann zufolge Definition II, Forderung 2, nicht im Innern eines Stückes S_i liegen. Als zusammenhängende Menge muss daher $U(p)$ mit der Begrenzung unendlich vieler Stücke S_i Punkte gemein haben und somit Punkte von $B(\mathfrak{Z})$ enthalten.

Satz 8. $S = B(\mathfrak{Z}) + \sum\limits_i O_i$.

Beweis. Nach Definition II, Forderung 1, ist

$$S = \overline{\sum_i S_i} = \sum_i S_i + \text{Lim sup } S_i$$

und daher nach Satz 7 $S = B(\mathfrak{Z}) + \sum\limits_i S_i$. Ferner ist

$$S_i = O_i + B(S_i) \subset O_i + B(\mathfrak{Z})$$

und somit tatsächlich $S = B(\mathfrak{Z}) + \sum\limits_i O_i$.

Satz 9. *Eine Teilmenge M von S, die mit jedem Stück S_i einen höchstens nulldimensionalen Durchschnitt hat, ist höchstens nulldimensional.*

Beweis. Es ist zufolge Satz 8

$$M = M \cdot S = M \cdot (B(\mathfrak{Z}) + \sum_i S_i) = M \cdot B(\mathfrak{Z}) + \sum_i M \cdot S_i.$$

$B(\mathfrak{Z})$ ist nach Definition II, Forderung 3, höchstens nulldimensional, $M \cdot S_i$ nach Voraussetzung höchstens nulldimensional. M ist somit als Summe abzählbar vieler in M abgeschlossener nulldimensionaler oder leerer Mengen höchstens nulldimensional.

Satz 10. *Für jede positive Zahl δ gibt es nur endlich viele Stücke S_i, deren Durchmesser grösser als δ ist.*

Beweis. Gäbe es unendlich viele Stücke S_i, deren Durchmesser über einer positiven Schranke liegt, so könnte man aus diesen Stücken eine Teilfolge herausgreifen, deren Limes inferior mindestens zwei Punkte hätte und deren Limes superior daher (nach dem Satz von Zoretti) ein mehrpunktiges Kontinuum wäre. Dies ist aber nicht möglich, denn nach Satz 7 ist $\operatorname{Lim\,sup} S_i$ in der höchstens nulldimensionalen Menge $B(\mathfrak{Z})$ enthalten.

Satz 11. *Wird mit jedem Stück S_i der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ eine halbnormale Zerlegung $\mathfrak{Z}_i$ vorgenommen, welche aus den Normalstücken $S_{i,1}, S_{i,2}, \ldots$ bestehen möge, so bildet die Gesamtheit aller Stücke $S_{i,k}$ wieder eine halbnormale Zerlegung $\mathfrak{Z}^*$ von S und es ist $B(\mathfrak{Z}) \subset B(\mathfrak{Z}^*)$.*

Beweis. Man sieht unmittelbar, dass die Forderungen 1 und 2 von Definition II für $\mathfrak{Z}^*$ erfüllt sind. Für die beiden letzten Forderungen ergibt sich der Beweis folgendermassen:

Forderung 3: Es ist

$$B(\mathfrak{Z}^*) = \overline{\sum_{i,k} B(S_{i,k})} = \overline{\sum_i B(\mathfrak{Z}_i)} = \sum_i B(\mathfrak{Z}_i) + \operatorname{Lim\,sup} B(\mathfrak{Z}_i).$$

Nun ist $B(\mathfrak{Z}_i) \subset S_i$ und daher nach Satz 7 $\operatorname{Lim\,sup} B(\mathfrak{Z}_i) \subset B(\mathfrak{Z})$. Also ist $B(\mathfrak{Z}^*)$ enthalten in der Menge $\sum_i B(\mathfrak{Z}_i) + B(\mathfrak{Z})$, welche als Summe abzählbar vieler abgeschlossener höchstens nulldimensionaler Mengen höchstens nulldimensional ist.

Forderung 4: Es ist $\operatorname{Lim\,sup}_k S_{i,k}$ (d. i. der Limes superior aller Stücke $S_{i,k}$ für festes i und variables k) $\subset \overline{\sum_k S_{i,k}} \subset S_i$. Ferner ist wegen Forderung 4 von Definition II, angewandt auf $\mathfrak{Z}_i$, $B(S_i) \cdot \operatorname{Lim\,sup}_k S_{i,k} = 0$, also ist $\operatorname{Lim\,sup}_k S_{i,k}$ im Innern von S_i und somit wegen $S_i \subset S$ auch im Innern von S enthalten. Es ist daher $B(S) \cdot \operatorname{Lim\,sup}_k S_{i,k} = 0$.

Ein Punkt p des Limes superior aller Stücke $S_{i,k}$ von $\mathfrak{Z}^*$ gehört nun entweder zu $\operatorname{Lim\,sup}_k S_{i,k}$ für irgend einen Index i oder er ist Punkt von $\operatorname{Lim\,sup} S_i$ und gehört also in keinem Fall zu $B(S)$.

Es bleibt noch die zweite in Satz 11 ausgesprochene Behauptung zu beweisen, dass $B(\mathfrak{Z}) \subset B(\mathfrak{Z}^*)$ ist. Wie aus Satz 8 hervorgeht, ist $B(S_i) \subset B(\mathfrak{Z}_i)$ für jede halbnormale Zerlegung $\mathfrak{Z}_i$ und daher

$$B(\mathfrak{Z}) = \overline{\sum_i B(S_i)} \subset \overline{\sum_i B(\mathfrak{Z}_i)} = \overline{\sum_i \Big(\overline{\sum_k B(S_{i,k})}\Big)} = \overline{\sum_{i,k} B(S_{i,k})} = B(\mathfrak{Z}^*)$$

(auf Grund der allgemeingültigen Beziehung $\overline{\sum \bar{A}_n} = \overline{\sum A_n}$).

Satz 12. *Es sei $B(\mathfrak{Z})$ zerspalten in zwei zueinander fremde abgeschlossene Mengen A_1 und A_2 und es sei C ein im kleinen zusammenhängendes Kontinuum, welches mit A_1 und mit A_2 einen nicht leeren Durchschnitt hat. Dann gibt es einen in C liegenden Bogen B, der ebenfalls mit A_1 und mit A_2 einen nicht leeren Durchschnitt hat und der ganz in einem Stück S_i enthalten ist.*

Beweis. Es sei p_1 ein Punkt von $C \cdot A_1$ und p_2 ein Punkt von $C \cdot A_2$. Da C zusammenhängend im kleinen ist, können die Punkte p_1 und p_2 durch einen in C liegenden Bogen B^* verbunden werden. Da nun A_1 und A_2 zwei zueinander fremde abgeschlossene Mengen sind, so muss es in B^* einen Teilbogen B geben, dessen einer Endpunkt in A_1 und dessen anderer Endpunkt in A_2 liegt und der bis auf die Endpunkte fremd zu $A_1 + A_2 = B(\mathfrak{Z})$ ist. Dieser Bogen B ist ganz in einem Stück S_i enthalten, denn er enthält ausser seinen Endpunkten keinen Punkt von $B(\mathfrak{Z})$ und somit keinen Begrenzungspunkt eines Stückes S_i.

§ 6. ***Definition III.*** Eine Menge M heisse *holomorph bezüglich der halbnormalen Zerlegung $\mathfrak{Z}$, wenn:*

1. *M Teilmenge von S ist,*
2. *Für jedes Stück S_i der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ der offene Kern O_i entweder Teil von M ist oder zu M fremd ist.*

Wir lassen den Zusatz „bezüglich der halbnormalen Zerlegung $\mathfrak{Z}$" in diesem Abschnitt weg, da wir hier stets die während des ganzen Abschnitts betrachtete halbnormale Zerlegung $\mathfrak{Z}$ im Auge haben.

Holomorphe Mengen sind insbesondere die leere Menge, das ganze Stück S und die Stücke S_i.

Wir stellen im folgenden eine Reihe von später zu verwendenden Sätzen über holomorphe Mengen zusammen, deren Beweis sich zum Teil unmittelbar aus der Definition III ergibt.

Satz 13. *Der offene Kern einer holomorphen Menge ist holomorph.*

Satz 14. *Die abgeschlossene Hülle einer holomorphen Menge ist holomorph.*

Satz 15. *Die Summe holomorpher Mengen ist holomorph.*

***Satz 16.** Die Differenz zweier holomorpher Mengen ist holomorph.*

***Satz 17.** Die Komponenten einer holomorphen Menge sind holomorph.*

Satz 17 folgt daraus, dass die Stücke S_i Normalstücke und daher die offenen Kerne O_i zusammenhängend sind (Definition I).

***Satz 18.** Die Begrenzung einer holomorphen Menge ist Teil von $B(\mathfrak{Z})$.*

Beweis. Ein Begrenzungspunkt einer holomorphen Menge kann nicht in einem der offenen Kerne O_i liegen und gehört daher nach Satz 8 zu $B(\mathfrak{Z})$.

***Satz 19.** Ist A eine abgeschlossene holomorphe Menge und S_i ein Stück von $\mathfrak{Z}$, das mit A einen nicht nulldimensionalen oder leeren Durchschnitt hat, so ist S_i Teil von A.*

Beweis. Da die Begrenzung von S_i höchstens nulldimensional ist, enthält der Durchschnitt $A\cdot S_i$ Punkte des offenen Kernes O_i und es ist daher O_i, und wegen der Abgeschlossenheit von A auch S_i Teil von A.

***Satz 20.** Ein holomorphes Kontinuum ist zusammenhängend im kleinen.*

Beweis. Da der Raum zusammenhängend im kleinen ist, ist jede Menge in allen inneren Punkten zusammenhängend im kleinen. Nun ist nach Satz 18 die Begrenzung einer holomorphen Menge höchstens nulldimensional, und daher ist ein holomorphes Kontinuum in allen Punkten zusammenhängend im kleinen, denn sonst müssten die Punkte, in denen kein Zusammenhang im kleinen besteht, ein mehrpunktiges Kontinuum enthalten [1]).

***Satz 21.** Ist M eine holomorphe Menge, so ist $M-B(\mathfrak{Z})$ gleich der Summe aller in M enthaltenen offenen Kerne O_i.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für jeden offenen Kern O_i der Durchschnitt $B(\mathfrak{Z})\cdot O_i$ leer ist. Es ist nämlich $S_i\cdot O_i=0$ für $i\neq j$ nach Definition II, Forderung 2; folglich, da die Stücke S_i entweder abgeschlossen oder offen sind, $B(S_j)\cdot O_i=0$ für $i\neq j$. Da nun O_i

[1]) Vgl. C. Kuratowski, *Quelques propriétés topologiques de la droite*, Fund. Math. **3** (1922), S. 60—61.

offen ist, ist auch $B(S_i)\cdot O_i=0$ und somit $\sum_j B(S_j)\cdot O_i=0$ und schliesslich, wieder wegen der Offenheit von O_i, $B(\mathfrak{Z})\cdot O_i=\overline{\sum_j B(S_j)}\cdot O_i=0$.

Hieraus folgt nun, dass $B(\mathfrak{Z})$ und daher auch $M-B(\mathfrak{Z})$ holomorph ist (Satz 16). Es ist nun ferner $M-B(\mathfrak{Z})$ zufolge Satz 8 Teil von $\sum_i O_i$ und daher Summe gewisser Mengen O_i.

***Satz 22.** Ein holomorphes Kontinuum ist die abgeschlossene Hülle der Summe aller in ihm enthaltenen Stücke S_i.*

Beweis. Ist C ein holomorphes Kontinuum, so ist nach Satz 21 $C-B(\mathfrak{Z})$ die Summe aller in C enthaltenen offenen Kerne O_i. Da nun $B(\mathfrak{Z})$ als höchstens nulldimensionale Menge in C nirgends dicht ist, so ist C die abgeschlossene Hülle der Summe aller in C liegenden Kerne O_i und somit auch gleich der abgeschlossenen Hülle der Summe aller in C enthaltenen Stücke S_i.

***Satz 23.** Ein zur Begrenzung von S fremdes holomorphes Kontinuum liegt im Zentrum von $\mathfrak{Z}$.*

Beweis. Ein zur Begrenzung von S fremdes holomorphes Kontinuum ist nach Satz 22 die abgeschlossene Hülle der Summe gewisser innerer Stücke von $\mathfrak{Z}$ und liegt somit im Zentrum von $\mathfrak{Z}$.

***Satz 24.** Es sei $\mathfrak{H}$ ein System von endlich oder abzählbar unendlich vielen holomorphen Normalstücken $H_1, H_2, \ldots$, für welches die beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:*

(1) $\overline{\sum_i H_i}=S$.

(2) *Zwei verschiedene Stücke H_i und H_k haben höchstens Begrenzungspunkte miteinander gemein.*

Dann ist $\mathfrak{H}$ eine halbnormale Zerlegung von S.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass die vier Forderungen von Definition II erfüllt sind.

Forderung 1 und 2 sind gleichlautend mit den beiden Voraussetzungen (1) und (2). Forderung 3 folgt aus Satz 18. Forderung 4 schliesslich ergibt sich folgendermassen. Nach Satz 22 ist jedes Stück H_i die abgeschlossene Hülle der Summe gewisser Stücke von $\mathfrak{Z}$, und wegen Voraussetzung (2) enthalten zwei verschiedene Stücke von H_i und H_k lauter verschiedene Stücke von $\mathfrak{Z}$. Es ist daher $\operatorname{Lim\,sup} H_i$ enthalten in $\operatorname{Lim\,sup} S_i$ und somit zu $B(S)$ fremd.

Satz 25. *Ist C ein holomorphes Kontinuum und sind a und b zwei Punkte von C, so gibt es einen in C liegenden a und b verbindenden Bogen B^*, dessen Durchschnitt mit irgend einem Stück S_i von $\mathfrak{Z}$ entweder ein Bogen oder nulldimensional ist.*

Beweis. Nach Satz 20 ist ein holomorphes Kontinuum zusammenhängend im kleinen, es können also die Punkte a und b durch einen in C liegenden Bogen B verbunden werden.

Zufolge Satz 9 muss es mindestens ein Stück der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ geben, welches mit B einen nicht nulldimensionalen oder leeren Durchschnitt hat. Es sei n_1 der kleinste Index, für welchen $B\cdot S_{n_1}$ nicht nulldimensional oder leer ist, es mögen also die Stücke $S_1,\ldots,S_{n_1-1}$ mit B einen höchstens nulldimensionalen Durchschnitt haben, während S_{n_1} mit B Teilbögen gemein hat.

Es sei nun B_1 der grösste Teilbogen von B, dessen beide Endpunkte in S_{n_1} liegen. Einen solchen muss es geben, da die Stücke S_i abgeschlossen sind. Den aus B_1 durch Tilgung der beiden Endpunkte entstehenden offenen Bogen bezeichnen wir mit I_1. Ferner setzen wir $B-I_1=R_1$.

Wenn B_1 echter Teil von B ist, so ist R_1 nicht nulldimensional und wir können wieder nach Satz 9 schliessen, dass es einen kleinsten Index n_2 geben muss, für welchen $R_1\cdot S_{n_2}$ nicht nulldimensional oder leer wird. Da ferner R_1 und somit $R_1\cdot S_{n_2}$ abgeschlossen ist, so gibt es in diesem Fall einen grössten Teilbogen von B, dessen beide Endpunkte in $R_1\cdot S_{n_2}$ liegen. Wir bezeichnen diesen grössten Teilbogen mit B_2. Der durch Tilgung der Endpunkte aus B_2 entstehende offene Bogen heisse I_2, die Menge $B-(I_1+I_2)$ bezeichnen wir mit R_2.

In dieser Weise fahren wir fort. Sind die Indizes $n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}$ und die Bögen $B_1,B_2,\ldots,B_{k-1}$ schon definiert, und ist $B\neq B_1+\ldots+B_{k-1}$, so definieren wir n_k und B_k folgendermassen: n_k ist der kleinste Index, für welchen $R_{k-1}\cdot S_{n_k}$ nicht nulldimensional oder leer ist. Hiebei ist $R_{k-1}=B-(I_1+\ldots+I_{k-1})$ und I_j der aus B_j durch Tilgung der Endpunkte entstehende offene Bogen ($j=1,\ldots,k-1$). Dann wird B_k definiert als der grösste Teilbogen von B, dessen beide Endpunkte in $R_{k-1}\cdot S_{n_k}$ liegen.

Unser Definitionsverfahren bricht ab, wenn für irgend einen Index k $B=B_1+\ldots+B_k$ und somit R_k nulldimensional wird. Andernfalls erhalten wir eine unendliche Folge von Bögen $B_1,\ldots,B_k,\ldots$

Das Bogensystem $B_1,B_2,\ldots$, welches, wie wir gesehen haben, aus endlich oder unendlich vielen Bögen bestehen kann, bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}$. Wir wollen nun über dieses System eine Reihe von Hilfssätzen ableiten. Um den Fall $k=1$ nicht immer gesondert behandeln zu müssen, setzen wir $B=R_0$. Die im folgenden ausgesprochenen Sätze gelten dann für jeden Index k, für den n_k und B_k definiert sind.

Hilfssatz a. *Zwei Bögen B_k und B_j des Systems $\mathfrak{B}$ sind entweder bis auf die Endpunkte fremd oder einer ist Teil des anderen.*

Beweis. Ist etwa $k<j$, so ist R_{j-1} fremd zu I_k und die Endpunkte von B_j, welche definitionsgemäss der Menge R_{j-1} angehören, liegen nicht im Innern der Bogens B_k. Also ist entweder B_k Teil von B_j oder die beiden Bögen haben höchstens einen Endpunkt gemein.

Hilfssatz b. $R_{k-1}\cdot S_{n_k}\subset B_k$.

Beweis. B_k ist definitionsgemäss der grösste Teilbogen von B, dessen beide Endpunkte in $R_{k-1}\cdot S_{n_k}$ liegen.

Hilfssatz c. *Der Durchschnitt $R_k\cdot S_{n_k}$ ist Teil der aus den beiden Endpunkten von B_k bestehenden Menge B_k-I_k.*

Beweis. Aus der Definition von R_k geht hervor, dass $R_k\cdot I_k$ leer ist. Nun ist ferner $R_k\subset R_{k-1}$ und daher $R_k\cdot S_{n_k}\subset R_{k-1}\cdot S_{n_k}\subset B_k$ (Hilfssatz b). Folglich ist $R_k\cdot S_{n_k}\subset B_k-I_k$.

Hilfssatz d. *Es ist $n_k>n_{k-1}$ (für $k>1$).*

Beweis. n_k ist definitionsgemäss der kleinste Index, für welchen $S_{n_k}\cdot R_{k-1}$ nicht nulldimensional oder leer wird. Wegen $R_{k-1}\subset R_{k-2}$ folgt hieraus $n_k\geqslant n_{k-1}$. Anderseits ist $n_k\neq n_{k-1}$, denn es ist $R_{k-1}\cdot S_{n_{k-1}}$ nach Hilfssatz c höchstens nulldimensional. Also ist $n_k>n_{k-1}$.

Es sei R der Durchschnitt aller Mengen R_k. Dann gilt

Hilfssatz e. *R ist nulldimensional.*

Beweis. Besteht das System $\mathfrak{B}$ nur aus einer endlichen Anzahl n von Bögen, so ist $R=R_n$ und R_n ist nulldimensional, denn sonst würde unser Verfahren nicht beim n-ten Schritt abbrechen und $\mathfrak{B}$ bestünde aus mehr als n Bögen.

Ist jedoch das System $\mathfrak{B}$ unendlich, so wächst die Folge $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ ins unendliche (Hilfssatz d). Es gibt daher für jedes Stück S_j einen Index k derart, dass $n_{k+1} > j$ und somit $R_k \cdot S_j$ höchstens nulldimensional wird. Daraus folgt, dass R mit jedem Stück S_j einen höchstens nulldimensionalen Durchschnitt hat und daher nach Satz 9 nulldimensional ist.

Hilfssatz f. *Falls das System $\mathfrak{B}$ aus unendlich vielen Bögen besteht, ist* $\lim\limits_{k\to\infty} d(B_k)=0$.

Beweis. Die Endpunkte von B_k liegen in S_{n_k}. Die Indizes n_k bilden nach Hilfssatz d eine wachsende Folge, es konvergieren daher mit Rücksicht auf Satz 10 die Abstände der Endpunkte und somit auch die Durchmesser von B_k mit wachsendem k gegen Null, da die Bögen B_k sämtlich Teilbögen des Bogens B sind.

Wir wollen einen Bogen des Systems $\mathfrak{B}$, der in keinem anderen Bogen von $\mathfrak{B}$ als *echter* Teil enthalten ist, einen *Maximalbogen* nennen. Bezüglich der Maximalbogen gilt

Hilfssatz g. *Jeder Bogen des Systems $\mathfrak{B}$ ist Teil eines Maximalbogens.*

Beweis. Ein Bogen, der nicht selbst schon Maximalbogen ist, ist echter Teil eines anderen Bogens aus $\mathfrak{B}$. Dieser ist wieder entweder selbst Maximalbogen oder echter Teil eines dritten Bogens usw. Hiebei müssen wir nach endlich vielen Schritten auf einen Maximalbogen kommen, denn sonst gäbe es eine monoton wachsende Folge von Bögen des Systems $\mathfrak{B}$, was nach Hifssatz f nicht möglich ist.

Es sei nun $\mathfrak{B}'$ das aus allen Maximalbögen von $\mathfrak{B}$ bestehende Bogensystem. Die Bögen des Systems $\mathfrak{B}'$ seien die Bögen $B_{m_1}, B_{m_2}, \ldots$, welche alle von einander verschieden sein mögen. Das heisst, dass wir von mehreren gleichen Maximalbögen des Systems $\mathfrak{B}$ immer nur einen in das System $\mathfrak{B}'$ aufnehmen. Für das System $\mathfrak{B}'$ gelten die beiden folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz h. *Zwei Bögen aus $\mathfrak{B}'$ haben höchstens einen Endpunkt mit einander gemein.*

Der Beweis folgt aus Hilfssatz a und aus der Definition des Maximalbogens.

Hilfssatz i. $B=R+\sum\limits_j I_{m_j}$.

Beweis. Es ist $B=R_k+I_1+\ldots+I_k$ und daher $B=R+\sum\limits_k I_k$. Nach Hilfssatz g ist nun jeder Bogen B_k in einem Maximalbogen B_{m_j} enthalten und somit auch jeder offene Bogen I_k Teil eines offenen Bogens I_{m_j}. Also ist $\sum\limits_k I_k \subset \sum\limits_j I_{m_j}$ und daher $B=R+\sum\limits_j I_{m_j}$. Wir bemerken, dass diese Gleichung auf Grund von Hilfssatz h eine Zerspaltung von B in lauter fremde Summanden darstellt.

Die beiden Endpunkte irgend eines dem System $\mathfrak{B}'$ angehörenden Bogens B_{m_j} liegen in $S_{n_{m_j}}$, wir können daher auf Grund von Satz 3 die Endpunkte von B_{m_j} durch einen Bogen $B^*_{m_j}$ verbinden, der bis auf die Endpunkte ganz im Innern von $S_{n_{m_j}}$ liegt. Den aus $B^*_{m_j}$ durch Weglassen der beiden Endpunkte entstehenden offenen Bogen bezeichnen wir mit $I^*_{m_j}$.

Wir sind nun imstande, einen Bogen B^* anzugeben, wie er im Satz 25 verlangt wird. Da nach Definition II, Forderung 2, die offenen Kerne O_l paarweise fremd sind, so sind auch die darin gelegenen offenen Bögen $I^*_{m_j}$ paarweise fremd. Ferner ist für den Fall einer unendlichen Anzahl von Bögen B_{m_j} zufolge Satz 10 $\lim\limits_{j\to\infty} d(B^*_{m_j})=0$. Wenn wir daher alle Teilbögen B_{m_j} von B durch die Bögen B_{m_j} ersetzen, so erhalten wir aus B mit Rücksicht auf Hilfssatz i wieder einen die Punkte a und b verbindenden Bogen B^*, von welchem wir beweisen wollen, dass er die in Satz 25 geforderten Eigenschaften hat.

Wir zeigen zunächst, dass B^* in C liegt. Definitionsgemäss hat jedes Stück S_{n_k} mit dem Bogen B und folglich auch mit C einen nicht nulldimensionalen Durchschnitt. Da C holomorph vorausgesetzt war, so liegt nach Satz 19 jedes Stück S_{n_k} und somit auch jeder Bogen $B^*_{m_j}$ in C. Also liegt auch der Bogen B^* in C.

Nun haben wir zu zeigen, dass der Durchschnitt irgend eines Stückes S_l mit B^* entweder nulldimensional oder ein Bogen ist. Wir betrachten zunächst ein Stück S_l, welches unter den Stücken $S_{n_{m_1}}, S_{n_{m_2}}, \ldots$ nicht vorkommt, und zeigen, dass dann $B^* \cdot S_l$ nulldimensional ist. Aus Hilfssatz i folgt nämlich $B^*=R+\sum\limits_j I^*_{m_j}$. Nun liegen die offenen Bögen $I^*_{m_j}$ im Innern der Stücke $S_{n_{m_j}}$ und sind daher zu S_l fremd.

Also ist $B^*\cdot S_i$ Teil von R und somit nach Hilfssatz e nulldimensional.

Es bleibt nun nur noch der Durchschnitt von B^* mit den Stücken $S_{n_{m_j}}$ zu untersuchen. Es ist

$$S_{n_{m_j}}\cdot B^*=S_{n_{m_j}}\cdot(R+\sum_j I^*_{m_j})=S_{n_{m_j}}\cdot R+I^*_{m_j}.$$

Nach Hilfssatz c ist $S_{n_{m_j}}\cdot R$ Teil der aus den beiden Endpunkten von B_{m_j} bestehenden Menge. Die Endpunkte von B_{m_j} sind aber zugleich die Endpunkte von $B^*_{m_j}$ und daher ist der Durchschnitt $S_{n_{m_j}}\cdot B^*$ in dem Bogen $B^*_{m_j}$ enthalten. Wegen $B^*_{m_j}\subset S_{n_{m_j}}$ und $B^*_{m_j}\subset B^*$ ist nun umgekehrt $B^*_{m_j}\subset S_{n_{m_j}}\cdot B^*$, somit also $S_{n_{m_j}}\cdot B^*$ gleich dem Bogen $B^*_{m_j}$.

IV. Verschärfung des in Abschnitt II bewiesenen Zerlegungssatzes.

§ 7. ***Definition IV.*** Unter einer *normalen Zerlegung* eines Normalstückes S verstehen wir eine halbnormale Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von S, welche die beiden folgenden Forderungen erfüllt:

1. *Das Zentrum von $\mathfrak{Z}$ ist zusammenhängend.*

2. *Das Zentrum von $\mathfrak{Z}$ hat mit jedem Randstück von $\mathfrak{Z}$ einen nicht leeren Durchschnitt.*

Aus Forderung 2 folgt, dass das Zentrum einer normalen Zerlegung nicht leer ist. Eine normale Zerlegung ist daher stets eine echte Zerlegung, d. h. sie besteht nicht bloss aus dem zu zerlegenden Stück S, sondern aus mehreren echten Teilstücken von S. Daraus folgt, dass für eine normale Zerlegung $B(\mathfrak{Z})$ nicht leer ist.

Wir wollen den zufolge Definition II, Forderung 4, stets positiven Abstand zwischen der Begrenzung eines Normalstückes S und dem Zentrum einer normalen Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von S die *Randbreite* von $\mathfrak{Z}$ nennen.

Da $Z(\mathfrak{Z})\neq 0$ ist, so ist die Randbreite definiert, sobald $B(S)\neq 0$, also, da der Raum zusammenhängend ist, stets dann, wenn S nicht der ganze Raum ist.

Definition IV'. Unter einer *normalen ε-Zerlegung* verstehen wir eine normale Zerlegung, deren Stücke alle einen kleineren Durchmesser als ε haben.

Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen, der eine Verschärfung von Satz 6 darstellt.

Satz 26. *Ist S ein Normalstück, so gibt es für jedes $\varepsilon>0$ eine normale ε-Zerlegung von S.*

Hilfssatz a. *Ist O eine zusammenhängende offene Menge und A eine in O enthaltene abgeschlossene Menge, so gibt es eine positive zahl σ, so dass je zwei Punkte von A durch einen in O liegenden Bogen verbunden werden können, dessen Abstand von $B(O)$ grösser als σ ist.*

Beweis. Die Behauptung ist gleichbedeutend mit folgendem Satz:

Ist p ein Punkt von A, so gibt es eine positive Zahl σ, so dass jeder Punkt von A mit p durch einen in O gelegenen Bogen verbunden werden kann, dessen Abstand von $B(O)$ grösser als σ ist.

Hiefür führen wir den Beweis indirekt. Angenommen, es gäbe keine solche Zahl σ. Dann müsste es in A eine Folge von Punkten $q_1,\dots,q_i,\dots$ geben, so dass der Abstand jedes die Punkte p und q_i verbindenden Bogens von $B(O)$ kleiner als $1/i$ ist. Es sei nun q ein Häufungspunkt dieser Punktfolge. Wegen der Abgeschlossenheit von A liegt q in A und somit in O. Da O als zusammenhängende offene Menge eines im kleinen zusammenhängenden Raumes bogenverknüpft ist, kann q mit p durch einen in O gelegenen Bogen verbunden werden. Der Abstand dieses Bogens von $B(O)$ sei δ. Wählen wir nun i so, dass erstens $1/i<\delta/2$ ist und zweitens q_i so nahe an q liegt, dass q_i und q durch einen Bogen von einem kleineren Durchmesser als $\delta/2$ verbunden werden können, so gibt es einen q_i und p verbindenden Bogen, dessen Abstand von $B(O)$ grösser als $1/i$ ist, im Widerspruch zur Wahl des Punktes q_i.

Auf Grund von Satz 6 können wir mit S eine halbnormale ε-Zerlegung $\mathfrak{Z}$ vornehmen. $\mathfrak{Z}$ möge aus den Stücken $S_1, S_2, \dots$ bestehen. Die zufolge Satz 4 endliche Anzahl der Randstücke sei n.

Es sei nun A eine abgeschlossene Menge, welche:

(1) im offenen Kern von S enthalten ist,

(2) das Zentrum $Z(\mathfrak{Z})$ enthält,

(3) mit dem offenen Kern eines jeden Stückes S_i einen nicht leeren Durchschnitt hat.

Man sieht ohne weiteres, dass es solche Mengen gibt, z. B. hätte eine aus dem Zentrum und je einem inneren Punkt eines jeden Randstückes von $\mathfrak{Z}$ bestehende Menge die verlangten Eigenschaften. (Diese Menge ist abgeschlossen zufolge Satz 4).

A hat mit jedem Stück von $\mathfrak{Z}$ einen nicht leeren Durchschnitt und ist deshalb nicht leer, denn zufolge Definition II, Forderung 1, muss $\mathfrak{Z}$ aus mindestens einem Stück bestehen, weil S als Normalstück nicht leer ist (Definition I).

Ferner ist nach Definition I der offene Kern von S zusammenhängend und wir können daher (auf Grund von Hilfssatz a) eine positive Zahl σ derart bestimmen, dass je zwei Punkte von A durch einen in S gelegenen Bogen verbunden werden können, dessen Abstand von $B(S)$ grösser als σ ist.

Wir nehmen nun mit jedem Stück S_i von $\mathfrak{Z}$ eine halbnormale σ-Zerlegung $\mathfrak{Z}_i$ vor, welche aus den Stücken $S_{i,1}, S_{i,2}, \dots$ bestehen möge. Nach Satz 11 bilden die sämtlichen Stücke $S_{i,j}$ eine halbnormale Zerlegung von S, welche $\mathfrak{Z}^*$ heissen möge. Für $\mathfrak{Z}^*$ gelten die folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz b. *Jedes Stück S_i ist holomorph bezüglich $\mathfrak{Z}^*$.*

Beweis. Es ist $S_i = \overline{\sum_k S_{i,k}}$ (Definition II, Forderung 1). Die Mengen $S_{i,k}$ sind als Stücke der halbnormalen Zerlegung $\mathfrak{Z}^*$ holomorph bezüglich $\mathfrak{Z}^*$. Folglich ist nach Satz 15 und 14 S_i holomorph bezüglich $\mathfrak{Z}^*$.

Hilfssatz c. *A ist Teil einer Komponente des Zentrums von $\mathfrak{Z}^*$.*

Beweis. Die Zerlegungen $\mathfrak{Z}_i$ sind sämtlich σ-Zerlegungen, d. h., die Stücke $S_{i,j}$ haben einen kleineren Durchmesser als σ. Es liegt folglich jeder Punkt, dessen Abstand von $B(S)$ grösser als σ ist, nicht in einem Randstück von $\mathfrak{Z}^*$ und daher im Zentrum $Z(\mathfrak{Z}^*)$, denn S ist gleich der Summe aus den Randstücken und dem Zentrum von $\mathfrak{Z}^*$ (zufolge Definition II, Forderung 1, und Satz 4). Nun ist σ so gewählt, dass je zwei Punkte von A durch einen in S liegenden Bogen verbunden werden können, dessen Abstand von $B(S)$ grösser als σ ist. Je zwei Punkte von A sind also durch einen in $Z(\mathfrak{Z}^*)$ liegenden Bogen verknüpft.

Wir bezeichnen die Komponente von $Z(\mathfrak{Z}^*)$, welche die Menge A enthält, mit C. Da A nicht leer ist, ist C eindeutig definiert. Als Komponente einer abgeschlossenen Menge ist C abgeschlossen. Ferner ist das Zentrum einer halbnormalen Zerlegung als abgeschlossene Hülle der Summe gewisser Stücke $S_{i,k}$, also holomorpher Mengen, nach Satz 15 und 14 holomorph und es gilt daher zufolge Satz 17 der

Hilfssatz d. *C ist holomorph bezüglich $\mathfrak{Z}^*$.*

Es seien $O_1, \dots, O_n$ die offenen Kerne der Randstücke von $\mathfrak{Z}$. Wir zerlegen nun die Mengen $O_i - C$ $(i = 1, \dots, n)$ in ihre Komponenten. Die abgeschlossenen Hüllen dieser Komponenten bezeichnen wir mit $T_{i,1}, T_{i,2}, \dots$ Für die $T_{i,k}$ gelten die beiden folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz e. *Die Mengen $T_{i,k}$ sind holomorph bezüglich $\mathfrak{Z}^*$.*

Der Beweis ergibt sich aus Hilfssatz b und d auf Grund der Sätze 13, 16, 17 und 14.

Hilfssatz f. *Jedes $T_{i,k}$ hat mit C einen nicht leeren Durchschnitt.*

Beweis. Wegen $A \subset C$ hat C mit allen offenen Kernen O_i einen Punkt gemein, also haben alle Komponenten von $O_i - C$ einen Häufungspunkt in C (Satz 1).

Hilfssatz g. *Die $T_{i,k}$ sind sämtlich Normalstücke.*

Beweis. Die Mengen $O_i - C$ sind offen und daher wegen des Zusammenhanges im kleinen auch die Komponenten von $O_i - C$. Die $T_{i,k}$ sind also abgeschlossene Hüllen zusammenhängender offener Mengen. Ferner folgt aus Hilfssatz e und Satz 18, dass die Begrenzung der $T_{i,k}$ höchstens nulldimensional ist. Die $T_{i,k}$ haben also alle in Definition I verlangten Eigenschaften.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun imstande, eine normale ε-Zerlegung $\mathfrak{N}$ von S anzugeben, und zwar möge $\mathfrak{N}$ aus den folgenden Mengen bestehen:

1⁰ aus allen $T_{i,k}$,

2⁰ aus denjenigen Stücken $S_{i,k}$, welche in C enthalten sind.

Die Mengen des Systems $\mathfrak{N}$ sind lauter Normalstücke (Hilfssatz g) und haben alle einen kleineren Durchmesser als ε, denn jedes Stück von $\mathfrak{N}$ ist Teil eines Stückes der ε-Zerlegung $\mathfrak{Z}$.

Unser nächstes Ziel ist es nun zu zeigen, dass $\mathfrak{N}$ eine halbnormale Zerlegung von S ist. Zufolge Hilfssatz e sind die $T_{i,k}$ und somit alle Stücke des Systems $\mathfrak{N}$ holomorph bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{Z}^*$. Wir wollen nun beweisen, dass die beiden Voraussetzungen von Satz 24 für das System $\mathfrak{N}$ erfüllt sind.

Voraussetzung (1) ergibt sich folgendermassen:

Es ist $Z(\mathfrak{Z}) \subset A \subset C$ und daher $S = Z(\mathfrak{Z}) + \sum_{i=1}^{n} S_i = C + \sum_{i=1}^{n} S_i =$ $= C + \overline{\sum_{i=1}^{n} O_i} =$ (wegen $C = \overline{C}$) $= C + \overline{\sum_{i=1}^{n} O_i - C} = C + \sum T_{i,k}$. Ferner ist C als (Hilfssatz d) holomorphes Kontinuum bezüglich $\mathfrak{Z}^*$ nach Satz 22 gleich der abgeschlossenen Hülle der Summe aller in C enthaltenen Stücke $S_{i,k}$, also Voraussetzung (1) von Satz 24 erfüllt.

Voraussetzung (2) von Satz 24 läuft darauf hinaus, dass alle offenen Kerne paarweise fremd sind, da wir es durchwegs mit Stücken (abgeschlossene Hüllen offener Mengen) zu tun haben. Nun waren die $T_{i,k}$ definiert als die abgeschlossenen Hüllen der Komponenten der Mengen $O_i - C$, diese Komponenten sind aber als Komponenten offener Mengen in einem im kleinen zusammenhängenden Raum selbst offen und sind daher die offenen Kerne der Stücke $T_{i,k}$, welche wir mit $U_{i,k}$ bezeichnen wollen. Die Mengen $U_{i,j}$ sind also zu C und daher zu allen der Zerlegung $\mathfrak{N}$ angehörenden Stücken $S_{i,k}$ fremd. Ferner sind zwei Mengen $U_{i,k}$ und $U_{i,j}$ für $j \neq k$ fremd als verschiedene Komponenten von $O_i - C$, und zwei Mengen $U_{i,k}$ und $U_{j,k}$ für $i \neq j$ sind fremd wegen $O_i \cdot O_j = 0$ (Forderung 2 von Definition II, angewandt auf $\mathfrak{Z}$). Schliesslich erfüllen auch die Stücke $S_{i,k}$ (ebenfalls zufolge Forderung 2 von Definition II, diesmal angewandt auf $\mathfrak{Z}^*$) die Forderung (2) von Satz 24, welche somit für alle Stücke von $\mathfrak{N}$ nachgewiesen ist. $\mathfrak{N}$ ist also eine halbnormale Zerlegung von S.

Zum Beweis, dass $\mathfrak{N}$ normal ist (Definition IV), dient nun

Hilfssatz h. *Jedes Stück $T_{i,k}$ ist ein Randstück von $\mathfrak{N}$.*

Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, eines der Stücke $T_{i,k}$ wäre kein Randstück von $\mathfrak{N}$, so wäre es nach Hilfssatz e und Satz 23 Teil von $Z(\mathfrak{Z}^*)$. Da nun C eine Komponente von $Z(\mathfrak{Z}^*)$ ist, so müsste also jenes Stück entweder Teil von C oder zu C fremd sein. Beide Fälle sind jedoch nicht möglich, denn die offenen Kerne der Stücke $T_{i,k}$ sind zu C fremd und anderseits hat C mit jedem Stück $T_{i,k}$ einen Punkt gemein (Hilfssatz f).

Da nun C als Teilmenge des Zentrums von $\mathfrak{Z}^*$ zur Begrenzung von S fremd ist, sind die Mengen $T_{i,k}$ bereits die sämtlichen Randstücke von $\mathfrak{N}$. Daraus ergibt sich unter Verwendung von Satz 22, dass C das Zentrum von $\mathfrak{N}$ ist. Es ist daher Forderung 1 und, zufolge Hilfssatz f, auch Forderung 2 von Definition IV erfüllt. $\mathfrak{N}$ ist also tatsächlich eine normale ε-Zerlegung von S.

V. Konstruktion einer konvexen Metrik in einer im kleinen zusammenhängenden Kurve.

§ 8. Wir gehen nun an die Konstruktion einer konvexen Metrik in einer beliebigen im kleinen zusammenhängenden Kurve K, welche der unseren Betrachtungen zu Grunde liegende Raum ist. Wir wollen zu diesem Zweck zunächst ein Netz immer feiner werdender ineinandergeschachtelter normaler Zerlegungen durch wiederholte Anwendung von Satz 26 in geeigneter Weise herstellen.

Es sei $\mathfrak{Z}$ eine normale $\frac{1}{2}$-Zerlegung von K, welche aus den Normalstücken $S_1, S_2, \ldots$ bestehen möge. Die Anordnung der Stücke sei hier und bei allen im folgenden betrachteten Zerlegungen normal. Die Zahl der Randstücke von $\mathfrak{Z}$ sei n. Ferner setzen wir $B(\mathfrak{Z}) = B_1$.

B_1 ist eine nicht leere, abgeschlossene nulldimensionale Menge (§ 7) und wir können daher B_1 in der folgenden Weise zerlegen:

Es sei $B_1 = B_1^1 + \ldots + B_1^{m_1}$, wobei die Mengen B_1^i nicht leer, abgeschlossen und paarweise fremd sind und $d(B_1^i) < \frac{1}{2}$ ist $(i = 1, 2, \ldots, m_1)$. Ausserdem sei $m_1 \geqslant 2$, d. h. es soll eine wirkliche Zerlegung von B_1 vorliegen.

Die Stücke S_i von $\mathfrak{Z}$ nennen wir im folgenden *Stücke erster Stufe*, die Mengen B_1^i $(i = 1, \ldots, m_1)$ nennen wir die *Begrenzungsteile erster Stufe*. Ferner nennen wir ein solches Stück erster Stufe, welches mit zwei verschiedenen Begrenzungsteilen erster Stufe einen nicht leeren Durchschnitt hat, ein *Brückenstück erster Stufe*.

Wir wollen zeigen, dass *es mindestens ein Brückenstück erster Stufe gibt*. Zu diesem Zweck setzen wir $B_1^1 = A_1$ und $\sum_{i=2}^{m_1} B_1^i = A_2$. Dann erfüllen A_1 und A_2 die Voraussetzungen von Satz 12. Indem wir nun für das in Satz 12 betrachtete Kontinuum C den ganzen Raum K wählen, finden wir, dass es einen Bogen gibt, der mit A_1 und mit A_2 einen nicht leeren Durchschnitt hat und ganz in einem Stück erster Stufe liegt. Dieses Stück hat daher ebenfalls mit A_1 und A_2 einen nicht leeren Durchschnitt und ist somit ein Brückenstück.

Je zwei Begrenzungsteile erster Stufe haben voneinander einen positiven Abstand. Da es nun mindestens zwei, im ganzen aber nur endlich viele Begrenzungsteile erster Stufe gibt, so muss es unter ihren gegenseitigen Abständen einen kleinsten geben. Diesen von Null verschiedenen kleinsten Abstand zweier Begrenzungsteile erster Stufe bezeichnen wir mit δ_1. Der Durchmesser eines jeden Brückenstückes ist dann $\geqslant \delta_1$. Hieraus folgt nach Satz 10, dass es nur endlich viele Brückenstücke erster Stufe gibt. Da ferner die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ eine $\frac{1}{2}$-Zerlegung und somit $d(S_i)<\frac{1}{2}$ ist (Definition IV′), so folgt aus der vorhin bewiesenen Existenz eines Brückenstückes erster Stufe, dass $\delta_1<\frac{1}{2}$ ist.

Wir nehmen nun mit jedem Stück S_i eine normale $\delta_1/2$-Zerlegung $\mathfrak{Z}_i$ vor. Die Stücke von $\mathfrak{Z}_i$ seien $S_{i,1}, S_{i,2}, \ldots$, die Zahl der Randstücke von $\mathfrak{Z}_i$ sei n_i. Die Menge $\overline{\sum_{i_1,i_2} B(S_{i_1,i_2})}=\overline{\sum_i B(\mathfrak{Z}_i)}$ bezeichnen wir mit B_2. Nach Satz 11 bilden die sämtlichen Stücke S_{i_1,i_2} eine halbnormale Zerlegung von K und es ist daher B_2 nulldimensional. Ferner ist nach Satz 11 $B_1 \subset B_2$.

Da $\mathfrak{Z}$ eine normale Zerlegung ist, sind die Stücke erster Stufe sämtlich echte Teilmengen von K und es ist daher, weil $\mathfrak{Z}_i$ normale Zerlegungen sind, für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z}_i$ die Randbreite definiert (§ 7). Da es nun mindestens ein, im ganzen aber nur endlich viele Brückenstücke erster Stufe gibt, so muss es ein Brückenstück S_i geben, für welches die Randbreite der mit ihm vorgenommenen Zerlegung $\mathfrak{Z}_i$ ein Minimum wird. Diese kleinste Randbreite, welche also stets eine positive Zahl ist, bezeichnen wir mit β_1.

Wir zerlegen nun B_2 in ähnlicher Weise wie B_1. Wir setzen $B_2=B_2^1+\ldots+B_2^{m_2}$, wobei die Mengen B_2^i nicht leer, abgeschlossen und paarweise fremd sein mögen und $d(B_2^i)<\inf(\delta_1/4, \beta_1)$ sei $(i=1,\ldots,m_2)$. Dass $m_2\geqslant 2$ ist, brauchen wir hier nicht mehr eigens zu postulieren, denn das folgt daraus, dass $B_1\subset B_2$ und somit $d(B_2)\geqslant d(B_1)\geqslant \delta_1$, während $d(B_2^i)<\delta_1/4$ ist.

Wir nennen die Stücke S_{i_1,i_2} *Stücke zweiter Stufe*, insbesondere nennen wir diejenigen Stücke S_{i_1,i_2}, welche Randstücke der Zerlegung $\mathfrak{Z}_i$ sind, *Randstücke zweiter Stufe*, und die inneren Stücke von $\mathfrak{Z}_{i_1}$ *innere Stücke zweiter Stufe*. Ferner mögen die Mengen B_2^i $(i=1,\ldots,m_2)$ *Begrenzungsteile zweiter Stufe* heissen und schliesslich verstehen wir unter einem *Brückenstück zweiter Stufe* ein Stück S_{i_1,i_2}, welches mit zwei verschiedenen Begrenzungsteilen zweiter Stufe Punkte gemein hat.

Wir zeigen wieder durch Anwendung von Satz 12, dass es mindestens ein Brückenstück zweiter Stufe gibt. Die dem Satz zu Grunde liegende halbnormale Zerlegung sei das System der sämtlichen Stücke zweiter Stufe. Ferner setzen wir $A_1=B_2^1$, $A_2=\sum_{i=2}^{m_2} B_2^i$ und $C=K$. Dann ergibt sich aus Satz 12 die Existenz eines Brückenstückes zweiter Stufe.

Es sei δ_2 der kleinste Abstand zweier Begrenzungsteile zweiter Stufe. Jedes Brückenstück zweiter Stufe hat dann mindestens den Durchmesser δ_2 und es gibt daher (Satz 10) nur endlich viele Brückenstücke zweiter Stufe. Da die Zerlegungen $\mathfrak{Z}_i$ sämtlich $\delta_1/2$-Zerlegungen sind, folgt aus der Existenz eines Brückenstückes zweiter Stufe $\delta_2<\delta_1/2$.

Wir iterieren nun das ganze eben beschriebene Verfahren, indem wir die Stücke S_{i_1,i_2} wieder einer normalen Zerlegung in Stücke dritter Stufe S_{i_1,i_2,i_3} unterwerfen und die Menge $B_3=\overline{\sum B(S_{i_1,i_2,i_3})}$ in entsprechender Weise in Begrenzungsteile dritter Stufe zerlegen. Ebenso verfahren wir dann mit den Stücken dritter Stufe usw. in infinitum. Wir wollen nun angeben, wie sich für eine beliebige Zahl $k\geqslant 2$ der k-te Schritt unserer Konstruktion vollzieht. Hiebei nehmen wir an, dass der $(k-1)$-te Schritt bereits getan ist, dass also die Stücke, Begrenzungsteile und Brückenstücke $(k-1)$-ter Stufe und die positive Zahl δ_{k-1} schon definiert sind. Ferner seien die beiden folgenden Sätze bereits bewiesen:

Satz a. *Die sämtlichen Stücke $(k-1)$-ter Stufe bilden eine halbnormale Zerlegung von K.*

Satz b. *Es gibt mindestens ein, im ganzen aber nur endlich viele Brückenstücke $(k-1)$-ter Stufe.*

Der k-te Schritt verläuft nun folgendermassen: Jedes Stück $(k-1)$-ter Stufe erfährt eine normale $\delta_{k-1}/2$-Zerlegung $\mathfrak{Z}_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}}$, welche aus den Normalstücken $S_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},1}$, $S_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},2}, \ldots$ besteht. Die Zahl der Randstücke von $\mathfrak{Z}_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}}$ sei $n_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}}$. Die Menge $\overline{\sum_{i_1,\ldots,i_k} B(S_{i_1,i_2,\ldots,i_k})}$ setzen wir gleich B_k. Aus Satz a und Satz 11 folgt, dass die Gesamtheit aller Stücke $S_{i_1,\ldots,i_k}$ eine halbnormale Zerlegung von K bildet. B_k ist daher nulldimensional und es ist $B_{k-1}\subset B_k$.

Zufolge Satz b gibt es ein Brückenstück $(k-1)$-ter Stufe, für welches die Randbreite der mit diesem Stück vorgenommenen Zerlegung möglichst klein wird. Diese kleinste Randbreite sei β_{k-1}. Wir setzen nun $B_k=B_k^1+\ldots+B_k^{m_k}$, wobei die Mengen B_k^i $(i=1,\ldots,m_k)$ nicht leer, abgeschlossen und paarweise fremd sein mögen und $d(B_k^i)<\inf(\delta_{k-1}/4, \beta_{k-1})$ sei.

Man sieht wie im Fall $k=2$, dass $m_k \geqslant 2$ ist.

Die Stücke $S_{i_1,\dots,i_k}$ nennen wir *Stücke k-ter Stufe*, die Randstücke, bzw. die inneren Stücke der Zerlegungen $\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_{k-1}}$ nennen wir *Randstücke*, bzw. *innere Stücke k-ter Stufe*. Ferner nennen wir die Mengen B_k^i $(i=1,2,\dots,m_k)$ *Begrenzungsteile k-ter Stufe*, und schliesslich mögen diejenigen Stücke k-ter Stufe, welche mit zwei verschiedenen Begrenzungsteilen k-ter Stufe einen nicht leeren Durchschnitt haben, *Brückenstücke k-ter Stufe* heissen. Man beweist wie im Fall $k=2$ mit Hilfe von Satz 12, dass es mindestens ein Brückenstück k-ter Stufe gibt.

Der kleinste Abstand zweier Begrenzungsteile k-ter Stufe sei gleich δ_k. Da ein Brückenstück k-ter Stufe mindestens den Durchmesser δ_k hat, gibt es zufolge Satz 10 nur endlich viele Brückenstücke k-ter Stufe. Schliesslich folgt aus der Existenz eines Brückenstückes k-ter Stufe $\delta_k < \delta_{k-1}/2$.

Wir setzen $\delta_0=1$, um den folgenden Beziehungen auch für $k=1$ Gültigkeit zu verleihen, so dass diese jetzt also für jede natürliche Zahl k gelten:

$$d(S_{i_1,i_2,\dots,i_k}) < \delta_{k-1}/2, \qquad d(B_k^i) < \delta_{k-1}/4, \qquad \delta_k < \delta_{k-1}/2.$$

Alle im folgenden für einen Index k ausgesprochenen Definitionen und Sätze gelten für jede natürliche Zahl k, ohne dass wir das jedesmal ausdrücklich bemerken.

§ 9. *Definition V.* Unter einer *Brücke k-ter Stufe* verstehen wir einen Bogen P, der die beiden folgenden Forderungen erfüllt:

1. *P ist ein Teil eines Stückes k-ter Stufe.*

2. *P hat mit zwei verschiedenen Begrenzungsteilen k-ter Stufe einen nicht leeren Durchschnitt.*

Satz 27. *Jedes im kleinen zusammenhängende Kontinuum, dessen Durchmesser grösser als $\frac{5}{4}\cdot\delta_{k-1}$ ist, enthält eine Brücke k-ter Stufe.*

Beweis. Es sei C ein im kleinen zusammenhängendes Kontinuum und $d(C) > \frac{5}{4}\cdot\delta_{k-1}$. Dann gilt folgender

Hilfssatz. *Zu jedem Punkt p von C gibt es einen Punkt q von C, der in B_k liegt und für welchen $r(p,q) < \delta_{k-1}/2$ ist.*

Der Beweis des Hilfssatzes ergibt sich daraus, dass irgend ein Punkt p entweder zu B_k gehört oder innerer Punkt eines Stückes k-ter Stufe ist. Dies folgt aus Satz 8, angewandt auf die aus allen Stücken k-ter Stufe bestehende halbnormale Zerlegung. Liegt nun p schon in B_k, so setzen wir $q=p$; ist p jedoch innerer Punkt eines Stückes k-ter Stufe $S_{i_1,\dots,i_k}$, so enthält das Kontinuum C wegen $d(C) > \frac{5}{4}\cdot\delta_{k-1} > d(S_{i_1,\dots,i_k})$ einen Begrenzungspunkt von $S_{i_1,\dots,i_k}$ und dieser hat die im Hilfssatz verlangten Eigenschaften.

Wegen $d(C) > \frac{5}{4}\delta_{k-1}$ gibt es in C zwei Punkte p und p', für welche $r(p,p') > \frac{5}{4}\cdot\delta_{k-1}$ ist. Auf Grund des Hilfssatzes können wir nun zwei Punkte q und q' in $C\cdot B_k$ angeben, so dass $r(p,q) < \delta_{k-1}/2$ und $r(p',q') < \delta_{k-1}/2$ wird. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann $r(q,q') < \delta_{k-1}/4$. q und q' liegen daher in verschiedenen Begrenzungsteilen k-ter Stufe, denn diese haben (§ 8) einen kleineren Durchmesser als $\delta_{k-1}/4$. Der Punkt q möge etwa in dem Begrenzungsteil B_k^i liegen.

Wir wollen nun auf das im kleinen zusammenhängende Kontinuum C den Satz 12 anwenden. Die dem Satz zu Grunde liegende halbnormale Zerlegung $\mathfrak{Z}$ sei die Zerlegung von K in die sämtlichen Stücke k-ter Stufe. Ferner sei $A_1 = B_k^i$, $A_2 = B_k - B_k^i$. Dann erfüllen A_1 und A_2 die Voraussetzungen von Satz 12 und es folgt aus ihm die behauptete Existenz einer in C enthaltenen Brücke k-ter Stufe.

Satz 28. *Jede Brücke k-ter Stufe enthält zwei Brücken $(k+1)$-ter Stufe, welche in zwei verschiedenen Randstücken $(k+1)$-ter Stufe liegen.*

Beweis. Es sei P eine Brücke k-ter Stufe. Nach Definition V, Forderung 2, enthält P zwei Punkte p und q, die in verschiedenen Begrenzungsteilen k-ter Stufe liegen. Wegen $B_k \subset B_{k+1}$ gehört jeder der Punkte p,q auch einem Begrenzungsteil $(k+1)$-ter Stufe an, und zwar möge p in B_{k+1}^i und q in B_{k+1}^j liegen. Es gilt dann

Hilfssatz a. *B_{k+1}^i und B_{k+1}^j haben voneinander einen grösseren Abstand als $\delta_k/2$.*

Beweis. Da p und q zu zwei verschiedenen Begrenzungsteilen k-ter Stufe gehören, ist $r(p,q) \geqslant \delta_k$ (auf Grund der Definition von δ_k, § 8). B_{k+1}^i und B_{k+1}^j haben nun als Begrenzungsteile $(k+1)$-ter Stufe einen kleineren Durchmesser als $\delta_k/4$ und haben daher voneinander einen grösseren Abstand als $\delta_k/2$.

Aus Hiffssatz a folgt insbesondere, dass B^i_{k+1} und B^j_{k+1} zwei verschiedene Begrenzungsteile $(k+1)$-ter Stufe sind.

Nach Definition V, Forderung 1, ist P Teil eines Stückes k-ter Stufe $S_{i_1,\dots,i_k}$. Für dieses Stück gilt

Hilfssatz b. *Das Zentrum der mit $S_{i_1,\dots,i_k}$ vorgenommenen Zerlegung $\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k}$ ist zu B^i_{k+1} und zu B^j_{k+1} fremd.*

Beweis. $S_{i_1,\dots,i_k}$ enthält die Brücke P und ist deshalb ein Brückenstück k-ter Stufe. $\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k}$ hat daher mindestens die Randbreite β_k (zufolge der Definition von β_k, § 8). Nun haben B^i_{k+1} und B^j_{k+1} als Begrenzungsteile $(k+1)$-ter Stufe einen kleineren Durchmesser als β_k (§ 8), also sind diese beiden Mengen, welche ja mit der Begrenzung von $S_{i_1,\dots,i_k}$ die Punkte p, bzw. q gemein haben, zum Zentrum von $\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k}$ fremd.

Wir wenden nun auf P den Satz 12 an. Die dem Satz zu Grunde liegende halbnormale Zerlegung sei $\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k}$. Setzen wir nun $G=P$, $A_1=B(\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k})\cdot B^i_{k+1}$ und $A_2=B(\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k})-B^i_{k+1}$, so liegt p in A_1 und q in A_2, denn nach Hilfssatz a sind der den Punkt p enthaltende Begrenzungsteil B^i_{k+1} und der den Punkt q enthaltende Begrenzungsteil B^j_{k+1} verschieden und somit zueinander fremd, und es liefert uns Satz 12 eine in P liegende Brücke $(k+1)$-ter Stufe, die mit B^i_{k+1} einen nicht leeren Durchschnitt hat. Setzen wir jedoch $A_1=B(\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k})\cdot B^j_{k+1}$ und $A_2=B(\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k})-B^j_{k+1}$, so erhalten wir eine in P liegende Brücke $(k+1)$-ter Stufe, die mit B^j_{k+1} einen Punkt gemein hat. Diese beiden Brücken $(k+1)$-ter Stufe haben nun die die in Satz 28 verlangte Eigenschaft, denn aus Hilfssatz a folgt unter Berücksichtigung des Umstandes, dass der Durchmesser eines Stückes $(k+1)$-ter Stufe kleiner als $\delta_k/2$ ist, dass die beiden Brücken in verschiedenen Stücken $(k+1)$-ter Stufe liegen, und aus Hilfssatz b folgt, dass sie in Randstücken $(k+1)$-ter Stufe liegen.

§ 10. ***Definition VI.*** Zwei Mengen mögen *k-stufig getrennt* heissen, wenn es kein Stück k-ter Stufe gibt, dessen offener Kern mit beiden Mengen einen nicht leeren Durchschnitt hat.

Unmittelbar aus dieser Definition folgt

Satz 29. *Sind M und N zwei k-stufig getrennte Mengen, und ist $P\subset M$ und $Q\subset N$, so sind P und Q k-stufig getrennt.*

Aus dem Umstand, dass jedes Stück von höherer als k-ter Stufe in einem Stück k-ter Stufe enthalten ist, ergibt sich

Satz 30. *Zwei k-stufig getrennte Mengen sind für jeden Index $j\geqslant k$ j-stufig getrennt.*

Wie wir in § 8 gesehen haben, bilden die Stücke k-ter Stufe eine halbnormale Zerlegung und es gilt daher vermöge Definition II, Forderung 2:

Satz 31. *Zwei verschiedene Stücke k-ter Stufe sind k-stufig getrennt.*

Definition VII. Jedem Stück $S_{i_1,\dots,i_k}$ wird eine *positive Zahl* $g(S_{i_1,\dots,i_k})$ auf Grund der folgenden rekursiven Definition zugeordnet:

1. *Für Stücke erster Stufe sei* $g(S_i)=\dfrac{1}{2^i}$.

2. *Für ein Randstück k-ter Stufe $S_{i_1,\dots,i_k}$ $(k\geqslant 2)$ sei*

$$g(S_{i_1,\dots,i_k})=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot g(S_{i_1,\dots,i_{k-1}}).$$

3. *Für ein inneres Stück k-ter Stufe $S_{i_1,\dots,i_k}$ $(k\geqslant 2)$ sei*

$$g(S_{i_1,\dots,i_k})=\frac{1}{k^2\cdot 2^{i_k-n_{i_1,\dots,i_{k-1}}}}\cdot g(S_{i_1,\dots,i_{k-1}}).$$

Der Exponent $i_k-n_{i_1,\dots,i_{k-1}}$ ist für innere Stücke k-ter Stufe stets positiv, denn $n_{i_1,\dots,i_{k-1}}$ ist die Zahl der Randstücke von $\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_{k-1}}$ und die Anordnung der Stücke ist normal vorausgesetzt. Es ist daher in jedem Falle $g(S_{i_1,\dots,i_k})<\frac{1}{2}g(S_{i_1,\dots,i_{k-1}})$. Da nun $g(S_i)=1/2^i\leqslant 1/2$ ist, so folgt

Satz 32. $g(S_{i_1,\dots,i_k})\leqslant 1/2^k$.

Definition VIII. Bezeichnet $O_{i_1,\dots,i_k}$ den offenen Kern von $S_{i_1,\dots,i_k}$, so möge für irgend eine Menge M

$$G_k(M)=\sum_{M\cdot O_{i_1,\dots,i_k}\neq 0} g(S_{i_1,\dots,i_1})$$

das *k-stufige Gewicht* von M heissen (d.h. wir bilden die Summe der Zahlen $g(S_{i_1,\dots,i_k})$ für alle jene Stücke $S_{i_1,\dots,i_k}$, deren offener Kern mit M einen nicht leeren Durchschnitt hat; falls es kein Stück k-ter Stufe gibt, dessen offener Kern mit M einen Punkt gemein hat, sei $G_k(M)=0$; wenn es unendlich viele solche Stücke k-ter Stufe gibt, ist $G_k(M)$ die Summe einer unendlichen Reihe mit lauter positiven Gliedern; wenn diese Reihe divergiert, sei $G_k(M)=+\infty$).

Wir führen nun einige Folgerungen aus Definition VIII an:

Satz 33. $G_k(S_{i_1,\dots,i_k})=g(S_{i_1,\dots,i_k})$.

Satz 34. $G_k(M)=G_k(\overline{M})$.

Satz 35. *Ist* $M\subset N$, *so ist* $G_k(M)\leqslant G_k(N)$.

Satz 36. *Für irgend ein endliches oder abzählbares Mengensystem* $M_1, M_2, \dots$ *ist* $G_k(\sum_l M_l)\leqslant\sum_l G_k(M_l)$.

Satz 37. *Für ein endliches oder abzählbares Mengensystem* $M_1, M_2, \dots$, *in welchem je zwei Mengen k-stufig getrennt sind, gilt*

$$G_k(\sum_l M_l)=\sum_l G_k(M_l).$$

Der Beweis von Satz 36 und 37 ergibt sich folgendermassen. $G_k(\sum_l M_l)$ enthält als Summanden alle diejenigen $g(S_{i_1,\dots,i_k})$, für welche der offene Kern $O_{i_1,\dots,i_k}$ mit $\sum_l M_l$ und daher mit wenigstens einer Menge M_l einen Punkt gemein hat. Jeder Summand der linken Seite kommt daher mindestens einmal auf der rechten Seite vor, woraus Satz 36 folgt.

Sind nun die Mengen M_l paarweise k-stufig getrennt, so hat jeder offene Kern $O_{i_1,\dots,i_k}$ nur mit einer Menge M_l Punkte gemein, also kommt auf der rechten Seite kein Summand doppelt vor und es gilt daher in diesem Falle das Gleichheitszeichen, wie im Satz 37 behauptet.

Satz 38. *Ist C ein Kontinuum, welches Teil eines Stückes* $S_{i_1,\dots,i_k}$ *ist, so ist* $G_k(C)=G_k(S_{i_1,\dots,i_k})=g(S_{i_1,\dots,i_k})$.

Der Beweis folgt daraus, dass die Begrenzung von $S_{i_1,\dots,i_k}$ nulldimensional ist und daher C Punkte des offenen Kernes von $S_{i_1,\dots,i_k}$ enthalten muss.

§ 11. ***Satz 39.*** *Eine Brücke k-ter Stufe P enthält zwei* $(k+1)$-*stufig getrennte Brücken* $(k+1)$-*ter Stufe* P' *und* P'', *für welche*

$$G_{k+1}(P')=G_{k+1}(P'')=\frac{G_k(P)}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

ist.

Beweis. P enthält nach Satz 28 zwei Brücken $(k+1)$-ter Stufe P' und P'', welche in verschiedenen Randstücken $(k+1)$-ter Stufe liegen. Wir wollen zeigen, dass P' und P'' die verlangten Eigenschaften haben.

Zunächst ergibt sich aus Satz 29 und 31, dass P' und P'' $(k+1)$-stufig getrennt sind.

Nach Definition V, Forderung 1, ist P Teil eines Stückes k-ter Stufe $S_{i_1,\dots,i_k}$. Da nach Forderung 2 und 3 der Definition II jedes nicht in $S_{i_1,\dots,i_k}$ liegende Stück $(k+1)$-ter Stufe mit $S_{i_1,\dots,i_k}$ einen nulldimensionalen Durchschnitt hat, so liegen die beiden P' und P'' enthaltenden Randstücke $(k+1)$-ter Stufe in $S_{i_1,\dots,i_k}$ und gehören also der Zerlegung $\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k}$ an (was sich übrigens auch beim Beweis von Satz 28 herausgestellt hat). Jene beiden Randstücke $(k+1)$-ter Stufe schreiben sich also in der Form $S_{i_1,\dots,i_k,i'}$ und $S_{i_1,\dots,i_k,i''}$ und es ist nach Definition VII

$$g(S_{i_1,\dots,i_k,i'})=g(S_{i_1,\dots,i_k,i''})=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\cdot g(S_{i_1,\dots,i_k}).$$

Nach Satz 38 ist nun

$$G_k(P)=g(S_{i_1,\dots,i_k}),\quad G_{k+1}(P')=g(S_{i_1,\dots,i_k,i'}),\quad G_{k+1}(P'')=g(S_{i_1,\dots,i_k,i''})$$

und es folgt die behauptete Gleichung.

Satz 40. *Ist P eine Brücke k-ter Stufe, so ist für jeden Index l*

$$G_l(P)>c\cdot G_k(P),\quad \text{wobei}\quad c=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Beweis. Ist $l\leqslant k$, so ergibt sich aus Definition VII und Satz 38 $G_l(P)\geqslant G_k(P)>c\cdot G_k(P)$. Wir haben den Beweis also nur mehr für den Fall $l>k$ zu führen.

Nach Satz 39 enthält P zwei $(k+1)$-stufig getrennte Brücken $(k+1)$-ter Stufe — wir nennen sie hier P_1 und P_2 — für welche

$$G_{k+1}(P_1)=G_{k+1}(P_2)=\frac{G_k(P)}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

ist. Wir wenden auf P_1 und auf P_2 wieder Satz 39 an und finden, dass es in P_1 und in P_2 je zwei Brücken $(k+2)$-ter Stufe $P_{1,1}$, $P_{1,2}$ bzw. $P_{2,1}$, $P_{2,2}$ gibt, so dass

$$G_{k+2}(P_{i,j}) = \frac{G_{k+1}(P_i)}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \frac{G_k(P)}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right)$$

ist $(i, j = 1, 2)$. Dabei sind $P_{1,1}$ und $P_{1,2}$ und ebenso $P_{2,1}$ und $P_{2,2}$ $(k+2)$-stufig getrennt. Da nun P_1 und P_2 $(k+1)$-stufig getrennt sind, so folgt aus Satz 29 und 30, dass alle vier Brücken $P_{i,j}$ paarweise $(k+2)$-stufig getrennt sind.

Auf jede der Brücken $P_{i,j}$ können wir nun abermals den Satz 39 anwenden und so fortfahrend erhalten wir durch r-fache Wiederholung derselben Schlussweise ein System von 2^r in P liegenden Brücken $(k+r)$-ter Stufe, welche paarweise $(k+r)$-stufig getrennt sind und deren jede das $(k+r)$-stufige Gewicht

$$\frac{G_k(P)}{2^r} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+r)^2}\right)$$

hat. Nach Satz 35 und 37 folgt hieraus

$$G_{k+r}(P) \geqslant G_k(P) \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+r)^2}\right) >$$

$$> G_k(P) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Hiemit ist Satz 40 auch für Indizes $l > k$ bewiesen.

Wir bemerken, dass $c = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{2} > 0$ ist.

Satz 41. *Das l-stufige Gewicht aller Brücken k-ter Stufe liegt über einer positiven Schranke b_k, die nur von k, aber nicht von l abhängt.*

Beweis. Wie wir in §8 gesehen haben, gibt es nur endlich viele Brückenstücke k-ter Stufe, es gibt also eine positive untere Schranke g_k der k-stufigen Gewichte aller Brückenstücke k-ter Stufe.

Nun liegt nach Definition V, Forderung 1, jede Brücke k-ter Stufe in einem Stück k-ter Stufe und aus Definition V, Forderung 2, folgt, dass dieses Stück ein Brückenstück k-ter Stufe ist. Es ist daher mit Rücksicht auf Satz 38 g_k auch nicht grösser als das k-stufige Gewicht aller Brücken k-ter Stufe. Setzen wir nun $b_k = c \cdot g_k$, so ist auf Grund von Satz 40 b_k für jeden Index l kleiner als das l-stufige Gewicht irgend einer Brücke k-ter Stufe.

Satz 42. *Die l-stufigen Gewichte aller im kleinen zusammenhängenden Kontinua, deren Durchmesser grösser als eine positive Zahl δ ist, liegen über einer positiven Schranke, die nur von δ, jedoch nicht von l abhängt.*

Beweis. Es ist (§8) $\delta_k < \delta_{k-1}/2$ und $\delta_0 = 1$, folglich $\delta_k < 1/2^k$. Wir können daher k so gross wählen, dass $\frac{5}{4}\delta_{k-1} < \delta$ wird. Dann enthält nach Satz 27 jedes im kleinen zusammenhängende Kontinuum, dessen Durchmesser grösser als δ ist, eine Brücke k-ter Stufe und hat daher nach Satz 35 und Satz 41 für jeden Index l mindestens das l-stufige Gewicht b_k.

§ 12. ***Definition IX.*** Eine Menge heisse *k-stufig holomorph*, wenn sie holomorph ist bezüglich der aus allen Stücken k-ter Stufe bestehenden halbnormalen Zerlegung von K.

Satz 43. *Ist M eine mehrpunktige* (d. h. nicht nur aus einem einzigen Punkt bestehende) *zusammenhängende Menge, so gibt es ein k-stufig holomorphes Kontinuum, welches die Menge M enthält und das gleiche k-stufige Gewicht hat wie M.*

Beweis. Es sei V die Summe aller derjenigen Stücke k-ter Stufe, deren offener Kern mit M einen nicht leeren Durchschnitt hat. Dann ist zufolge Definition VIII

$$G_k(M) = \sum_{S_{i_1,\ldots,i_k} \subset V} g(S_{i_1,\ldots,i_k})$$

und $G_k(V)$ ist gleich derselben Summe, wie sich aus Satz 31, 37 und 33 ergibt. Also ist $G_k(M) = G_k(V) = G_k(\overline{V})$ (Satz 34).

$M - V$ ist fremd zu den offenen Kernen aller Stücke k-ter Stufe und daher nach Satz 8 Teil der nulldimensionalen Menge B_k. Da nun M zusammenhängend und mehrpunktig ist, so ist $M - V$ in M nirgends dicht und es ist M Teil von $\overline{V}$. Weiter folgt aus dem Zusammenhang von M und dem Zusammenhang der Stücke k-ter Stufe, dass $M + V$ zusammenhängend ist. Denn die Summanden von V haben definitionsgemäss alle mit M einen nicht leeren Durchschnitt. Es ist daher $\overline{V} = \overline{M + V}$ ein Kontinuum.

Schliesslich ist $\overline{V}$ zufolge Satz 15 und 14 k-stufig holomorph und hat somit alle in Satz 43 verlangten Eigenschaften.

Satz 44. *Sind a und b zwei Punkte des Stückes $S_{i_1,\dots,i_k}$, so können a und b durch einen Bogen B verbunden werden, der bis auf die Endpunkte a und b ganz im Innern von $S_{i_1,\dots,i_k}$ liegt und für welchen $G_{k+1}(B) \leqslant g(S_{i_1,\dots,i_k})$ ist.*

Beweis. Da $\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k}$ eine normale Zerlegung ist, so hat nach Definition IV, Forderung 2, jedes in $S_{i_1,\dots,i_k}$ enthaltene Randstück $(k+1)$-ter Stufe mit dem Zentrum von $\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k}$ einen Punkt gemein. Es sei nun p irgend ein Punkt von $S_{i_1,\dots,i_k}$ der nicht im Zentrum $Z(\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k})$ liegt. Dann gehört p zufolge Definition II, Forderung 1, und Satz 4 zu einem Randstück von $\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k}$ und kann daher auf Grund von Satz 3 mit einem Punkt des Zentrums (nämlich mit irgend einem dem Zentrum und dem den Punkt p enthaltenden Randstück gemeinsamen Punkt) durch einen Bogen verbunden werden, der bis auf die Endpunkte ganz im Innern des betreffenden Randstückes liegt. Ferner liegt das Zentrum wegen Definition II, Forderung 4, ganz im Innern von $S_{i_1,\dots,i_k}$. Schliesslich ist das Zentrum nach Definition IV, Forderung 1, zusammenhängend und zufolge Satz 15 und 14 $(k+1)$-stufig holomorph und daher nach Satz 20 ein im kleinen zusammenhängendes Kontinuum und somit bogenverknüpft.

Es ergibt sich also, dass a und b durch einen Bogen B verbunden werden können, der bis auf die Endpunkte a und b ganz im Innern von $S_{i_1,\dots,i_k}$ liegt und der in einer Menge T enthalten ist, welche Summe aus dem Zentrum und zwei Randstücken von $\mathfrak{Z}_{i_1,\dots,i_k}$ ist. Nun ergibt sich aus Definition VII unter Berücksichtigung der Sätze 34, 31, 37 und 33:

$$G_{k+1}(T) \leqslant g(S_{i_1,\dots,i_k})\left\{\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right\} = g(S_{i_1,\dots,i_k}).$$

Es ist daher nach Satz 35

$$G_{k+1}(B) \leqslant G_{k+1}(T) \leqslant g(S_{i_1,\dots,i_k}).$$

Satz 45. *Zwei Punkte a und b eines k-stufig holomorphen Kontinuums C können durch einen Bogen verbunden werden, dessen $(k+1)$-stufiges Gewicht nicht grösser ist als das k-stufige Gewicht von C.*

Beweis. Nach Satz 25 können a und b durch einen in C liegenden Bogen B verbunden werden, dessen Durchschnitt mit irgend einem Stück k-ter Stufe entweder höchstens nulldimensional oder ein Bogen ist. Es seien $S_{(1)}, S_{(2)}, \dots$ diejenigen Stücke k-ter Stufe, deren Durchschnitt mit B ein Bogen ist. Die Symbole $(1), (2), \dots$ bedeuten dabei gewisse Kombinationen von k Indizes. Wir setzen $B \cdot S_{(i)} = B_i$, wobei die Mengen B_i also lauter Bögen sind. Da der Durchschnitt zweier Stücke k-ter Stufe nulldimensional ist, sind zwei Bögen B_i und B_j bis auf die Endpunkte fremd. Die Menge $B-\sum_i B_i$ hat mit jedem Stück k-ter Stufe einen höchstens nulldimensionalen Durchschnitt und ist daher nach Satz 9 höchstens nulldimensional. Es ist infolgedessen $B=\overline{\sum_i B_i}$.

Wir ersetzen nun auf Grund von Satz 44 jeden Bogen B_i durch einen Bogen B'_i, welcher:

(1) die gleichen Endpunkte hat wie B_i,
(2) bis auf die Endpunkte ganz im Innern des Stückes $S_{(i)}$ liegt,
(3) höchstens das $(k+1)$-stufige Gewicht $g(S_{(i)})$ hat.

Zufolge Satz 10 gibt es nur endlich viele Stücke k-ter Stufe und somit auch nur endlich viele Bögen B_i, deren Durchmesser grösser als eine positive Zahl δ ist. Es entsteht daher, wenn man die Bögen B_i durch die Bögen B'_i ersetzt, aus B wieder ein a und b verbindender Bogen B' und zwar ist $B'=\overline{\sum_i B'_i}$.

Die Bögen B'_i liegen alle in verschiedenen Stücken k-ter Stufe und sind daher nach Satz 29 und 31 k-stufig getrennt und somit nach Satz 30 auch $(k+1)$-stufig getrennt. Also ist nach Satz 34, Satz 37 und (3)

$$G_{k+1}(B') = \sum_i G_{k+1}(B'_i) \leqslant \sum_i g(S_{(i)}).$$

Nun folgt aus Satz 19, dass die Stücke $S_{(i)}$ sämtlich in C enthalten sind und es ist daher nach Satz 33, 31, 37 und 35 $\sum_i g(S_{(i)}) \leqslant G_k(C)$. Also ist $G_{k+1}(B') \leqslant G_k(C)$ und somit B' ein Bogen der gewünschten Art.

Definition X. Es sei $\varrho_k(a,b)$ *die untere Grenze der k-stufigen Gewichte aller die Punkte a und b enthaltenden zusammenhängenden Mengen.*

Wir sehen hiebei einpunktige Mengen als zusammenhängend an, so dass wegen $\sum_i g(S_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1$ (Definition VII):

$\varrho_k(a, a)$ gleich dem k-stufigen Gewicht der nur aus dem Punkt a bestehenden Menge ist.

Zufolge Satz 32 gilt dann für irgend einen Punkt a:

Satz 46. $\varrho_k(a, a) \leqslant 1/2^k$.

Satz 47. *Sind a und b zwei verschiedene Punkte, so liegen alle Werte $\varrho_l(a, b)$ über einer positiven* (von l unabhängigen) *Schranke.*

Beweis. Auf Grund von Satz 43 und Satz 20 gibt es zu jeder die Punkte a und b enthaltenden zusammenhängenden Menge ein ebenfalls a und b enthaltendes im kleinen zusammenhängendes Kontinuum vom gleichen k-stufigen Gewicht. Also kann $\varrho_k(a, b)$ auch aufgefasst werden als die untere Grenze der k-stufigen Gewichte aller a und b enthaltenden im kleinen zusammenhängenden Kontinua und es folgt aus Satz 42 unsere Behauptung.

Satz 48. $\varrho_{k+1}(a, b) \leqslant \varrho_k(a, b)$.

Beweis. Ist M eine a und b enthaltende zusammenhängende Menge, so gibt es nach Satz 43 ein M enthaltendes k-stufig holomorphes Kontinuum C, für welches $G_k(M) = G_k(C)$ ist. Daher gibt es nach Satz 45 einen a und b verbindenden Bogen B, für welchen $G_{k+1}(B) \leqslant G_k(C) = G_k(M)$ ist, und hieraus folgt die behauptete Ungleichung.

§ 13. Aus Satz 48 folgt, dass $\varrho_k(a, b)$ stets eine endliche Zahl ist, denn $\varrho_1(a, b)$ ist endlich, weil das einstufige Gewicht jeder Menge endlich ist. Für irgend zwei Punkte a und b bilden daher die Zahlen $\varrho_k(a, b)$ eine monoton abnehmende und somit konvergente Folge.

Wir setzen nun $\varrho(a, b) = \lim\limits_{k\to\infty} \varrho_k(a, b)$.

$\varrho(a, b)$ wird sich als konvexe Metrik von K erweisen.

Zunächst folgt aus Satz 46, dass $\varrho(a, a) = 0$, und aus Satz 47, dass für zwei verschiedene Punkte $\varrho(a, b) > 0$ ist. Ferner sieht man leicht mit Hilfe von Satz 36, dass für $\varrho_k(a, b)$ und somit auch für $\varrho(a, b)$ die Dreiecksungleichung gilt. Was wir also noch zu beweisen haben, ist:

1. *die topologische Äquivalenz der neuen Metrik $\varrho(a, b)$ mit der ursprünglichen Metrik $r(a, b)$,*

2. *die Konvexität von $\varrho(a, b)$.*

Was die topologische Äquivalenz anlangt, so genügt es wegen der Kompaktheit von K zu zeigen, dass $\varrho(a, b)$ stetig ist. Wir haben also folgenden Satz zu beweisen:

Satz 49. *In jedem Punkt a gibt es eine Umgebung $U(a)$, so dass für jeden Punkt b von $U(a)$ $\varrho(a, b)$ kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Zahl ε wird.*

Ein Punkt a heisse *regulär*, wenn er für keinen Index k der Menge B_k angehört; andernfalls heisse a *singulär*. Unter der *Ordnung* eines singulären Punktes a verstehen wir den kleinsten Index k, für welchen a in B_k liegt.

Hilfssatz a. *Liegen die Punkte a und b in demselben Stück k-ter Stufe, so ist $\varrho(a, b) \leqslant 1/2^k$.*

Der Beweis folgt daraus, dass $\varrho(a, b) \leqslant \varrho_k(a, b)$ ist und dass für alle Stücke k-ter Stufe $G_k(S_{i_1,\ldots,i_k}) = g(S_{i_1,\ldots,i_k}) \leqslant 1/2^k$ ist (Satz 32).

Aus Hilfssatz a folgt für reguläre Punkte die Richtigkeit von Satz 49, denn ein regulärer Punkt liegt vermöge Satz 8 für jeden Index k im Innern eines Stückes k-ter Stufe und dessen offener Kern stellt für hinreichend grosses k eine Umgebung der verlangten Art dar.

Wir haben den Beweis nun für singuläre Punkte zu führen und schicken zu diesem Zweck noch einige Hilfssätze voraus.

Es sei $V_k(a)$ die Summe aller Stücke k-ter Stufe, welche den Punkt a enthalten. Wenn a keinem Stück k-ter Stufe angehört, sei $V_k(a)$ die nur aus dem Punkt a bestehende Menge. $V_k(a)$ enthält somit in jedem Falle den Punkt a. Zufolge Satz 10 kann der Limes superior der Summanden von $V_k(a)$ höchstens aus dem Punkt a bestehen und es gilt

Hilfssatz b. *$V_k(a)$ ist abgeschlossen.*

Hilfssatz c. *Ist a ein Punkt von B_k und $S_{i_1,\ldots,i_k}$ irgend ein Stück k-ter Stufe, so gehört für jeden Index l a nicht zur abgeschlossenen Hülle $\overline{S_{i_1,\ldots,i_k} - V_l(a)}$.*

Beweis. Ist $l \leqslant k$, so ist die Behauptung trivial, denn wenn das Stück $S_{i_1,\ldots,i_k}$ den Punkt a überhaupt enthält, so ist es für $l \leqslant k$ Teil von $V_l(a)$ und $S_{i_1,\ldots,i_k} - V_l(a) = 0$.

Wir betrachten nun den Fall $l>k$. Dann ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Satz 11, dass die in $S_{i_1,\dots,i_k}$ enthaltenen Stücke l-ter Stufe eine halbnormale Zerlegung von $S_{i_1,\dots,i_k}$ bilden. Nun liegt a als Punkt von B_k jedenfalls nicht im Innern von $S_{i_1,\dots,i_k}$ und gehört daher nach Definition II, Forderung 4, nicht zum Limes superior der in $S_{i_1,\dots,i_k}$ enthaltenen Stücke l-ter Stufe.

Da der Limes superior abgeschlossen ist, gibt es daher eine Umgebung U von a, deren abgeschlossene Hülle $\overline{U}$ zum Limes superior der in $S_{i_1,\dots,i_k}$ enthaltenen Stücke l-ter Stufe fremd ist und infolgedessen nur mit endlich vielen dieser Stücke Punkte gemein hat. Man kann daher, indem man U hinreichend klein wählt, mit Rücksicht auf die Abgeschlossenheit der Stücke l-ter Stufe auch noch erreichen, dass U nur mit solchen in $S_{i_1,\dots,i_k}$ gelegenen Stücken l-ter Stufe einen nicht leeren Durchschnitt hat, welche den Punkt a enthalten und somit Teile von $V_l(a)$ sind. Nun ist $S_{i_1,\dots,i_k}$ zufolge Definition II, Forderung 1, die abgeschlossene Hülle der Summe aller in $S_{i_1,\dots,i_k}$ liegenden Stücke l-ter Stufe; folglich, da U zum Limes superior dieser Stücke fremd ist, ist $U\cdot S_{i_1,\dots,i_k}$ in der Summe der in $S_{i_1,\dots,i_k}$ liegenden Stücke l-ter Stufe enthalten und es ergibt sich also, dass $U\cdot S_{i_1,\dots,i_k}$ Teilmenge von $V_l(a)$ ist. Hieraus folgt unmittelbar unsere Behauptung.

Wir wollen nun für jeden singulären Punkt a eine noch von einem Index m abhängige Menge $W_m(a)$ definieren. Wir unterscheiden hiebei die Fälle, dass die Ordnung k des singulären Punktes gleich 1 oder grösser als 1 ist.

Ist a singulär von der Ordnung $k=1$, so sei

$$W_m(a)=\overline{\sum_{i\geqslant m} S_i}.$$

Ist a singulär von der Ordnung $k\geqslant 2$, so liegt a nicht in B_{k-1} und daher (Satz 8) im Innern eines Stückes $(k-1)$-ter Stufe, etwa des Stückes $S_{i_1,\dots,i_k}$. Dann sei

$$W_m(a)=\overline{\sum_{i_k\geqslant m} S_{i_1,\dots,i_{k-1},i_k}}.$$

Diese Summe ist so zu verstehen, dass die ersten $k-1$ Indizes fest bleiben und der letzte Index i_k alle Werte $\geqslant m$ durchläuft (vgl. § 2).

Hilfssatz d. *Ist a ein singulärer Punkt von der Ordnung k, so wird $G_k(W_m(a))$ für hinreichend grosses m beliebig klein.*

Der Beweis ergibt sich aus Definition VII unter Verwendung von Satz 34, 36 und 33.

Hilfssatz e. *Ein singulärer Punkt a ist* (für jedes Indexpaar l,m) *innerer Punkt von* $V_l(a)+W_m(a)$.

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall, dass a singulär von der Ordnung $k=1$ ist. Nach Definition II, Forderung 1, ist $K=\overline{\sum_i S_i}$ und daher

$$K-W_m(a)\subset\sum_{i=1}^{m-1} S_i.$$

Folglich gilt für das Komplement von $V_l(a)+W_m(a)$:

$$K-(V_l(a)+W_m(a))\subset\sum_{i=1}^{m-1} S_i-V_l(a)=\sum_{i=1}^{m-1}(S_i-V_l(a)).$$

Als singulärer Punkt von der Ordnung 1 liegt a in B_1 und gehört daher nach Hilfssatz c nicht zur abgeschlossenen Hülle eines in der rechts stehenden Summe vorkommenden Summanden. Da diese Summe nur aus endlich vielen Summanden besteht, gehört a also nicht zur abgeschlossenen Hülle des Komplementes von $V_l(a)+W_m(a)$ und ist somit innerer Punkt dieser Menge.

Nun sei a singulär von der Ordnung $k\geqslant 2$. Dann liegt a im Innern eines Stückes $(k-1)$-ter Stufe $S_{i_1,\dots,i_{k-1}}$. Es genügt daher zu zeigen, dass a nicht Punkt der abgeschlossenen Hülle von $S_{i_1,\dots,i_k}-(V_l(a)+W_m(a))$ sein kann. Nun ist (Definition II, Forderung 1)

$$S_{i_1,\dots,i_{k-1}}=\overline{\sum_{i_k} S_{i_1,\dots,i_k}}$$

und daher

$$S_{i_1,\dots,i_{k-1}}-(V_l(a)+W_m(a))\subset\sum_{i_k=1}^{m-1}(S_{i_1,\dots,i_{k-1},i_k}-V_l(a)).$$

Da a, als singulärer Punkt k-ter Ordnung, in B_k liegt, folgt wie im Fall $k=1$ aus Hilfssatz c unsere Behauptung.

Ist a irgend ein singulärer Punkt, so bezeichnen wir mit $U_{l,m}(a)$ die den Punkt a enthaltende Komponente des offenen Kernes von $V_l(a)+W_m(a)$. Aus Hilfssatz e folgt, dass hiemit $U_{l,m}(a)$ für jeden singulären Punkt a definiert ist. Da die als Raum zu Grunde gelegte Kurve K zusammenhängend im kleinen ist, ist $U_{l,m}(a)$ offen und stellt also eine Umgebung von a dar.

Hilfssatz f. *Ist a ein singulärer Punkt und b ein Punkt von $U_{l,m}(a)$, so gibt es einen in $V_l(a)$ gelegenen Punkt c, für welchen $\varrho(b,c) \leqslant G_k(W_m(a))$ ist.*

Beweis. Liegt b selbst schon in $V_l(a)$, so ist die Behauptung in trivialer Weise richtig, indem wir $c=b$ setzen. Liegt jedoch b nicht in $V_l(a)$, so sei Q die den Punkt b enthaltende Komponente von $U_{l,m}(a)-V_l(a)$. Nun ist $V_l(a)$ eine abgeschlossene Menge (Hilfssatz b), welche mit $U_{l,m}(a)$ einen nicht leeren Durchschnitt hat, denn dieser Durchschnitt enthält jedenfalls den Punkt a. Da $U_{l,m}$ offen und zusammenhängend ist, folgt daher aus Satz 1, dass $V_l(a)$ einen Häufungspunkt der Menge Q enthält. Ist nun c ein Punkt von $\bar{Q}\cdot V_l(a)$, so ist zufolge Definition X $\varrho(b,c) \leqslant \varrho_k(b,c) \leqslant G_k(\bar{Q}) = G_k(Q)$ (Satz 34). Es ist aber $Q \subset U_{l,m}(a)-V_l(a) \subset W_m(a)$ und daher (Satz 35) $G_k(Q) \leqslant G_k(W_m(a))$, also ist $\varrho(b,c) \leqslant G_k(W_m(a))$ und somit c ein Punkt der gewünschten Art.

Nun ist für irgend einen Punkt c von $V_l(a)$ zufolge Hilfssatz a $\varrho(a,c) \leqslant 1/2^l$. Es ist daher zufolge der Dreiecksungleichung (mit Rücksicht auf Hilfssatz d und f) $U_{l,m}(a)$ für hinreichend grosses l und m eine Umgebung, wie wir sie in Satz 49 gefordert haben. Der Beweis von Satz 49 ist hiemit auch für singuläre Punkte durchgeführt.

§ 14. Es obliegt uns nun nur noch der Nachweis der Konvexität von $\varrho(a,b)$. Diesem Zweck dienen die folgenden Sätze.

Satz 50. *Es sei B ein die Punkte a und b verbindender Bogen, dessen Durschschnitt mit irgend einem Stück k-ter Stufe entweder höchstens nulldimensional oder ein Bogen ist. Dann gilt für jeden Punkt x dieses Bogens*

$$\varrho_k(a,x)+\varrho_k(x,b) \leqslant G_k(B)+1/2^k.$$

Beweis. Fällt x mit einem der Endpunkte von B zusammen, so folgt die Behauptung unmittelbar aus Definition X und Satz 46. Wir nehmen also im folgenden an, dass x nicht Endpunkt von B ist. Dann wird B durch x in zwei Teilbögen $B(a,x)$ und $B(b,x)$ zerlegt und es gilt:

Hilfssatz a. *Es gibt höchstens ein Stück k-ter Stufe, dessen offener Kern mit $B(a,x)$ und $B(b,x)$ einen nicht leeren Durchschnitt hat.*

Beweis: Es sei $S_{i_1,\dots,i_k}$ ein Stück k-ter Stufe, dessen offener Kern $O_{i_1,\dots,i_k}$ mit $B(a,x)$ und $B(b,x)$ Punkte gemein hat. Dann hat $O_{i_1,\dots,i_k}$ mit $B(a,x)$ und $B(b,x)$ Teilbögen gemein und es ist daher auf Grund der für B vorausgesetzten Eigenschaft der Durchschnitt $B\cdot S_{i_1,\dots,i_k}$ ein Bogen, der den Punkt x enthält, und x ist nicht Endpunkt dieses Bogens. Dies kann nun aber höchstens für ein einziges Stück k-ter Stufe der Fall sein, denn zwei verschiedene Stücke k-ter Stufe haben einen höchstens nulldimensionalen Durchschnitt (Definition II, Forderung 2 und 3).

Hilfssatz b. $G_k(B(a,x))+G_k(B(b,x)) \leqslant G_k(B)+1/2^k$.

Der Beweis ergibt sich auf Grund von Definition VIII aus Hilfssatz a und aus Satz 32.

Aus Hilfssatz b folgt vermöge Definition X die Richtigkeit von Satz 50.

Satz 51. *Sind a und b zwei Punkte und ε eine positive Zahl, so gibt es einen Punkt x, für welchen $\varrho(a,x)=\varrho(b,x) \leqslant \frac{1}{2}\varrho(a,b)+\varepsilon$ ist.*

Beweis. Es ist definitionsgemäß $\varrho(a,b)=\lim\limits_{k\to\infty}\varrho_k(a,b)$. Wir können also einen Index n derart bestimmen, dass die beiden folgenden Ungleichungen gelten:

$$(1) \qquad 1/2^k \leqslant \varepsilon,$$

$$(2) \qquad \varrho_n(a,b) \leqslant \varrho(a,b)+\varepsilon/2.$$

Auf Grund von Definition X gibt es eine zusammenhängende a und b enthaltende Menge M, für welche $G_n(M) \leqslant \varrho_n(a,b)+\varepsilon/2$ ist, und zufolge Satz 43 gibt es ein M enthaltendes n-stufig holomorphes Kontinuum C, für welches $G_n(M)=G_n(C)$ ist. Nach Satz 25 gibt es ferner in C einen a und b verbindenden Bogen B, dessen Durchschnitt mit irgend einem Stück n-ter Stufe entweder höchstens nulldimensional oder ein Bogen ist. Zufolge Satz 35 ist dann

$$(3) \qquad G_n(B) \leqslant G_n(C)=G_n(M) \leqslant \varrho_n(a,b)+\varepsilon/2.$$

Wegen der Stetigkeit der Metrik $\varrho(a,b)$ gibt es auf dem Bogen B einen Punkt x, für welchen $\varrho(a,x)=\varrho(b,x)$ ist. Dann gilt:

$$(4) \qquad 2\varrho(a,x)=\varrho(a,x)+\varrho(b,x) \leqslant \varrho_n(a,x)+\varrho_n(b,x).$$

Ferner ist nach Satz 50

(5) $$\varrho_n(a, x) + \varrho_n(b, x) \leqslant G_n(B) + 1/2^n.$$

Durch Zusammenfassung der Ungleichungen (4), (5), (3), (1) und (2) erhält man

$$2\varrho(a, x) \leqslant \varrho(a, b) + 2\varepsilon$$

und es ist somit tatsächlich $\varrho(a, x) = \varrho(b, x) \leqslant \frac{1}{2}\varrho(a, b) + \varepsilon$, w. z. b. w.

Aus Satz 51 folgt durch Grenzübergang die *Existenz eines Zwischenpunktes.*