Soit $0<\gamma<\beta$. La relation (45) étant d'après (40) vraie pour $\eta=0$, il suffit de l'admettre pour $\eta<\gamma$ et de l'en déduire pour $\eta=\gamma$.

Soit donc $\psi\epsilon Y^{\gamma}$. En s'appuyant sur (43) et (40), on parvient, pour chaque p, à l'existence des nombres m_p, n_p, d'un $\eta_p<\gamma$ et d'une fonction

$$f_p \epsilon X^{\eta_p} \tag{46}$$

tels que

$$\psi=\lim_p \varphi(f_p, m_p, n_p). \tag{47}$$

Il s'ensuit selon (34) que

$$\psi(x,0)=\lim_p f_p(x) \quad \text{pour} \quad x\epsilon\mathcal{C}. \tag{48}$$

En désignant par M l'ensemble de tous les m_p+n_p, on s'aperçoit en vertu de (43), (46) et (47) que tout se réduit à tirer une contradiction de l'hypothèse que M est infini. Or, elle entraîne, en effet, d'une part en vertu de (32) que, pour tout r, il y a une infinité de nombres p pour lesquels on a $y_r\epsilon Z_{m_p+n_p, m_p}$, donc aussi, selon (33), $\varphi(f_p, m_p, n_p; x, y_r)=0$ pour $x\epsilon\mathcal{C}$; et d'autre part en vertu de (47) que, quel que soit r, on a $\psi(x,y_r)=0$, donc aussi $\psi(x,0)=0$ pour $x\epsilon\mathcal{C}$. Mais c'est impossible en vertu de (41), (46) et (48), puisque $\eta_p<\gamma<\beta$.

La prémisse (45) ainsi établie permet de tirer une contradiction de l'hypothèse $z\epsilon Y^{\beta}$. En effet, (43) et (45) impliquent l'existence, pour tout p, des nombres m_p, n_p, d'un $\eta_p<\beta$ et d'une fonction $f_p\epsilon X^{\eta_p}$ tels que $\lim\limits_p \varphi(f_p, m_p, n_p; x, 1)=0$ pour $x\epsilon\mathcal{C}$. Il en résulte selon (35) et (42) que $\lim\limits_p g_{m_p,n_p}(x)=0$ pour tout $x\epsilon\mathcal{C}$, ce qui est impossible d'après 3.4.

Séminaire topologique
de l'Université Masaryk à Brno.

Un théorème concernant la convergence des fonctions sur les ensembles dénombrables.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

Théorème. *Si E est un ensemble dénombrable (d'éléments quelconques) et $\{f_n^m(x)\}$ une suite double de fonctions réelles définies sur E, et s'il existe la limite*

$$\lim_{m=\infty}(\lim_{n=\infty} f_n^m(x))=f(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x\epsilon E, \tag{1}$$

il existe deux suites infinies croissantes d'indices $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$, telles qu'on a

$$\lim_{k=\infty} f_{n_k}^{m_k}(x)=f(x) \qquad \textit{pour} \quad x\epsilon E. \tag{2}$$

Démonstration. D'après (1), il existe pour $m=1,2,...$ et pour $x\epsilon E$ la limite

$$\lim_{n=\infty} f_n^m(x)=f^m(x). \tag{3}$$

Soit

$$E=(x_1, x_2, ...). \tag{4}$$

D'après (1) et (3), on a

$$\lim_{m=\infty} f^m(x)=f(x) \qquad \text{pour} \quad x\epsilon E$$

et il existe pour tout k naturel un indice μ_k tel que

$$|f^m(x_i)-f(x_i)|<1/k \qquad \text{pour} \quad i=1,2,...,k \quad \text{et} \quad m>\mu_k. \tag{5}$$

Posons

$$m_k=1+\mu_1+\mu_2+...+\mu_k.$$

On a évidemment $m_1<m_2<\ldots$ et d'après (5)

(6) $$|f^{m_k}(x_i)-f(x_i)|<1/k \qquad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,k.$$

Or, on a d'après (3)

$$\lim_{n=\infty} f_n^{m_k}(x)=f^{m_k}(x) \qquad \text{pour} \quad x \in E$$

et il existe pour tout k naturel un indice ν_k tel que

(7) $$|f_n^{m_k}(x_i)-f^{m_k}(x_i)|<1/k \qquad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,k \quad \text{et} \quad n>\nu_k.$$

Posons

$$n_k=1+\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_k.$$

Alors $n_1<n_2<\ldots$ et d'après (7)

(8) $$|f_{n_k}^{m_k}(x_i)-f^{m_k}(x_i)|<1/k \qquad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,k.$$

Les formules (6) et (8) donnent

$$|f_{n_k}^{m_k}(x_i)-f(x_i)|<2/k \qquad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,k,$$

ce qui entraîne (2) en vertu de (4), c. q. f. d.

L'existence d'une fonction de classe 2 de Baire montre que ce théorème ne subsiste pas pour les ensembles E de puissance du continu et, si l'on admet l'hypothèse du continu, même pour aucun ensemble E indénombrable. Or, il me semble que sans faire appel à l'hypothèse du continu il serait fort difficile de le démontrer.

Voici encore une application de notre théorème.

Soit Φ une famille quelconque de fonctions réelles définies sur un ensemble dénombrable E. Définissons par l'induction les familles Φ^α $(\alpha=0,1,2,\ldots)$ comme suit: $\Phi^0=\Phi$ et Φ^α pour $\alpha>0$ est la famille de toutes les fonctions réelles definies sur E qui y sont des limites de suites infinies de fonctions de la famille $\Phi^{\alpha-1}$. D'après notre théorème, on a alors $\Phi^2=\Phi^1$ pour toute famille Φ, ce qui résoût un problème posé par M^lle S. Braun et M. A. Lindenbaum, en montrant que le théorème de M. Neubauer[1]), établi pour les ensembles E non séparables, est en défaut pour les E dénombrables.

[1]) ce volume, p. 269, th. 1.2.

Beweis des Satzes, dass jede im kleinen zusammenhängende Kurve konvex metrisiert werden kann.

Von

Gustav Beer (Wien).

I. Problemstellung.

§ 1. Ein metrischer Raum heisst nach Menger[1]) *konvex*, wenn es zu je zweien seiner Punkte a und b einen Zwischenpunkt gibt, d.h. einen Punkt c, der von a und b verschieden ist und der Abstandsformel $r(a,b)=r(a,c)=r(c,b)$ genügt. Es wird a. a. O. bewiesen, dass jedes konvexe Kontinuum zusammenhängend im kleinen ist, und es wird die Frage aufgeworfen, ob umgekehrt jedes im kleinen zusammenhängende Kontinuum konvexifizierbar ist, d.h. ob in ihm eine zur ursprünglichen Metrik topologisch äquivalente konvexe Metrik existiert.

Hier soll nun gezeigt werden, dass dies für im kleinen zusammenhängende Kurven (d.h. eindimensionale Kontinua) tatsächlich der Fall ist. Es werden zunächst in den Abschnitten II, III und IV einige topologische Sätze über im kleinen zusammenhängende Kurven bewiesen, auf Grund deren dann in Abschnitt V die Konstruktion der konvexen Metrik durchgeführt wird.

§ 2. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$\bar{A}$ abgeschlossene Hülle von A.
$d(A)$ Durchmesser von A.
$B(A)$ Begrenzung von A.
0 die leere Menge.

[1]) K. Menger, *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann. **100** (1928), p. 81.