2⁰ A défaut d'un pareil q, l'ensemble Q est ouvert dans P. De plus, il existe par hypothèse un point $q \epsilon Q$ ne possédant pas dans P d'entourages à fermetures compactes. On peut admettre, par suite de la régularité de P, que les fermetures dans P de tous les entourages des points de Q que l'on a à considérer sont contenues dans Q. Envisageons un système complet dénombrable d'entourages O_l (l naturel) du point q dans P avec $wO_{l+1} \subset O_l$. La fermeture wO_l n'étant pas compacte par hypothèse, il existe un suite dénombrable infinie divergente de points $p_{kl} \epsilon O_l$. Suivant MM. Alexandroff et Urysohn [5]), on peut faire correspondre, à tout point p_{kl}, un entourage O_{kl} (à fermeture contenue dans O_l) satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\text{(xiv)} \qquad wO_{rl} \cdot wO_{sl} = 0 \qquad (r \neq s),$$

$$\text{(xv)} \qquad w\sum_{k \geqslant n} O_{kl} = \sum_{k \geqslant n} wO_{kl} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

D'après Urysohn, il existe une fonction $g_{kl} \epsilon \Phi$ telle que $g_{kl}(p_{kl}) = 1-(k+1)^{-1}$ et $g_{kl}(x) = l^{-1}$ lorsque x *non* ϵO_{kl}. Soit $f_{kl} = \max_{m>k} g_{ml}$. On tire sans peine de (xiv) et (xv) que $f_{kl} \epsilon \Phi$. De plus, on voit aisément que $f_{kl} \to l^{-1}(II)$ $(k \to \infty)$ et $l^{-1} \to 0(I)$. Reste à prouver que $f_{k_j l_j}$ *non* $\to 0(IV)$ dans les notations analogues à celles du cas 1⁰. Mais c'est la même chose qu'auparavant.

L'hypothèse faite sur Q est essentielle, comme le montrent des exemples triviaux, où $u_{II} = u_I$, donc où $u_I u_{II} = u_I \subset u_{IV}$. Il suffit de prendre comme Q un ensemble métrique compact. Lorsque Q est localement compact et séparable dans un P métrique, on peut métriser la convergence III comme suit:

$$\varrho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname*{borne\ sup}_{x \epsilon G_n Q} |f(x) - g(x)|$$

où les fermetures wG_n sont compactes et les G_n recouvrent Q. C'est M. Čech qui s'en est aperçu. Alors, on a même $u_{IV} u_{IV} = u_{IV}$ dans ce cas-là.

Séminaire topologique à Brno.

---

[5]) P. Alexandroff et P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verhandl. Akad. Amsterdam **14** (1929), No. 1, p. 56.

Sur l'espace des fonctions continues.

Par

Miloš Neubauer (Brno).

1. Résultats. $\mathbf{X}$ étant respectivement un ensemble de fonctions [1]) ou un ensemble de fonctions continues dans un espace métrique, je désigne par $\tilde{\mathbf{X}}$ et $\overline{\mathbf{X}}$ respectivement l'ensemble de toutes les fonctions et celui des fonctions continues dans cet espace qui sont limites d'une suite de fonctions de $\mathbf{X}$. Je définis pour $\xi < \Omega$ les symboles ${}^{\xi}\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}^{\xi}$, en posant respectivement

$${}^{0}\mathbf{X} = \mathbf{X}, \qquad \mathbf{X}^{0} = \mathbf{X}$$

et pour $\xi > 0$:

$${}^{\xi}\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{S}} \quad \text{où} \quad \mathbf{S} = \sum_{\eta<\xi} {}^{\eta}\mathbf{X}, \qquad \mathbf{X}^{\xi} = \overline{\mathbf{S}} \quad \text{où resp.} \quad \mathbf{S} = \sum_{\eta<\xi} \mathbf{X}^{\eta}.$$

A l'aide de l'opération ${}^{\xi}\mathbf{X}$, le théorème classique d'existence sur les fonctions mesurables B se laisse exprimer comme suit:

1.1. *Il existe un ensemble $\mathbf{X}$ de fonctions d'une variable réelle tel que ${}^{\xi}\mathbf{X} \neq {}^{\eta}\mathbf{X}$ pour $\eta < \xi < \Omega$* (à savoir l'ensemble de toutes les fonctions continues d'une variable réelle).

Dans la suite, je démontre les trois théorèmes suivants qui montrent que la situation est tout à fait différente si l'on passe de l'opération ${}^{\xi}\mathbf{X}$ à l'opération $\mathbf{X}^{\xi}$.

1.2. *Si l'espace métrique P n'est pas séparable, alors, en admettant l'hypothèse du continu, il existe un ensemble $\mathbf{X}$ de fonctions continues dans P, tel que $\mathbf{X}^{\xi} \neq \mathbf{X}^{\eta}$ pour $\eta < \xi < \Omega$.*

1.3. *Si l'espace métrique P est compact, alors, pour chaque ensemble $\mathbf{X}$ de fonctions continues dans P, il existe un $\xi < \Omega$ tel que $\mathbf{X}^{\xi+1} = \mathbf{X}^{\xi}$.*

1.4. *Si l'espace métrique P contient topologiquement l'ensemble parfait non-dense de Cantor, alors, pour tout $\xi < \Omega$, il existe un ensemble $\mathbf{X}$ de fonctions continues dans P, tel que $\mathbf{X}^{\xi} \neq \mathbf{X}^{\eta}$ pour $\eta < \xi$.*

---

[1]) J'entends par *fonction* fonction réelle et finie.

2. Termes et notations. Les lettres m,n,p,q,r,s désignent des entiers positifs. Les lettres $\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta$ désignent des nombres ordinaux inférieurs à Ω. J'entends par *espace* l'espace métrique. La lettre z désigne la fonction identiquement nulle dans l'espace considéré. $\mathfrak{C}$ désigne l'ensemble parfait non-dense de Cantor. Pour $a<b$ réels, (a,b) désigne l'intervalle ouvert et $[a,b]$ l'intervalle fermé aux extrémités a,b. Les symboles $\{0\}$ et $\{1\}$ désignent respectivement l'ensemble composé du seul nombre 0 et celui composé du seul nombre 1.

P étant un espace, $\mathrm{F}(P)$ et $\mathrm{C}(P)$ désignent respectivement l'ensemble de toutes les fonctions et celui des fonctions continues dans P. Etant donnée une transformation biunivoque b de l'espace P en un espace Q, telle que $b(P)=Q$, je désigne pour $\mathrm{X}\subset\mathrm{F}(P)$ par $b(\mathrm{X})$ l'ensemble de toutes les fonctions composées $f(b^{-1}(x))$ où $f\epsilon\mathrm{X}$, définies pour $x\epsilon Q$. Si $0\neq Q\subset P$, je désigne pour $\mathrm{X}\subset\mathrm{F}(P)$ par X/Q l'ensemble de toutes les fonctions partielles f/Q où $f\epsilon X$. Si $0\neq Q\subset P$ et Q est fermé dans P, je désigne pour $\mathrm{X}\subset\mathrm{C}(Q)$ par $\mathrm{Pr}(\mathrm{X})$ l'ensemble de tous les prolongements continus sur P des fonctions de X [2]).

3. Lemmes.

3.1. *Etant donnée une transformation biunivoque b de l'espace P en un espace Q, telle que $b(P)=Q$, on a pour $\mathrm{X}\subset\mathrm{F}(P)$ et $\eta<\xi$*

$$b({}^{\xi}\mathrm{X}-{}^{\eta}\mathrm{X})={}^{\xi}b(\mathrm{X})-{}^{\eta}b(\mathrm{X}).$$

Démonstration. $\mathrm{Y}\subset\mathrm{Z}\subset\mathrm{F}(P)$ entraîne $b(\mathrm{Z}-\mathrm{Y})=b(\mathrm{Z})-b(\mathrm{Y})$ et l'induction transfinie donne $b({}^{\xi}\mathrm{X})={}^{\xi}b(\mathrm{X})$.

3.2. *Etant donnée une transformation homéormophe h de l'espace P en un espace Q, telle que $h(P)=Q$, on a pour $\mathrm{X}\subset\mathrm{C}(P)$ et $\eta<\xi$*

$$h(\mathrm{X}^{\xi}-\mathrm{X}^{\eta})=(h(\mathrm{X}))^{\xi}-(h(\mathrm{X}))^{\eta}.$$

Démonstration analogue.

3.3. *Si $0\neq Q\subset P$ et Q est fermé dans l'espace P, on a pour $\mathrm{X}\subset\mathrm{C}(Q)$ et $\eta<\xi$*

$$\mathrm{Pr}(\mathrm{X}^{\xi}-\mathrm{X}^{\eta})\subset(\mathrm{Pr}(\mathrm{X}))^{\xi}-(\mathrm{Pr}(\mathrm{X}))^{\eta}.$$

[2]) Cf. H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, I. Band, Berlin 1921, S. 140, Satz X.

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\mathrm{Pr}(\mathrm{X}^{\xi})\subset(\mathrm{Pr}(\mathrm{X}))^{\xi}, \tag{1}$$

car l'induction transfinie donne $\mathrm{Y}^{\eta}/Q\subset(Y/Q)^{\eta}$ pour $\mathrm{Y}\subset\mathrm{C}(P)$, d'où $(\mathrm{Pr}(\mathrm{X}))^{\eta}/Q\subset(\mathrm{Pr}(\mathrm{X})/Q)^{\eta}\subset\mathrm{X}^{\eta}$. Admettons donc (1) vraie pour $\xi<\alpha$ où $\alpha>0$ et soit $\varphi\epsilon\mathrm{Pr}(\mathrm{X}^{\alpha})$. Il existe par suite pour chaque n un $\xi_n<\alpha$ et une $f_n\epsilon\mathrm{X}^{\xi_n}$ tels que

$$\lim_n f_n(x)=\varphi(x) \quad \text{pour} \quad x\epsilon Q. \tag{2}$$

D'autre part, il existe un ensemble G_n ouvert dans P pour lequel

$$Q=\prod_n G_n \quad \text{et} \quad G_{n+1}\subset G_n. \tag{3}$$

Les fonctions φ et f_n étant continues respectivement dans l'ensemble fermé $P-G_n$ et dans l'ensemble Q, il existe d'après $(P-G_n)Q=0$ une $\varphi_n\epsilon\mathrm{C}(P)$ telle que

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pour} \quad x\epsilon P-G_n,\\ f_n(x) & \text{pour} \quad x\epsilon Q.\end{cases}$$

Selon $f_n\epsilon\mathrm{X}^{\xi_n}$ et selon (1) pour $\xi<\alpha$, on trouve par conséquent $\varphi_n\epsilon\mathrm{Pr}(\mathrm{X}^{\xi_n})\subset(\mathrm{Pr}(\mathrm{X}))^{\xi_n}$, et comme $\lim\limits_n\varphi_n(x)=\varphi(x)$ pour $x\epsilon P$ selon (2) et (3), il vient $\varphi\epsilon\overline{\sum\limits_{\xi<\alpha}(\mathrm{Pr}(\mathrm{X}))^{\xi}}=(\mathrm{Pr}(\mathrm{X}))^{\alpha}$, c. q. f. d.

3.4. *Il existe une fonction $g_{m,n}\epsilon\mathrm{C}(\mathfrak{C})$ telle que*

$$1/m\leqslant g_{m,n}\leqslant 1, \tag{4}$$

$$\lim_n g_{m,n}=1/m, \tag{5}$$

et qu'en désignant par X l'ensemble de toutes les fonctions $g_{m,n}$, on a $z\epsilon\mathrm{X}^2-\mathrm{X}^1$.

Démonstration. $\mathfrak{C}$ étant séparable, il existe un ensemble dénombrable X dense dans $\mathfrak{C}$. Par conséquent, il existe pour tout m un ensemble fini X_m tel que

$$0\neq X_m\subset X_{m+1}, \qquad X=\sum_m X_m. \tag{6}$$

En posant $G_{m,n}=\sum\limits_{x\epsilon X_m}\left(x-\dfrac{1}{m+n},\ x+\dfrac{1}{m+n}\right)$, on a

$$X_m=\prod_n G_{m,n} \quad \text{et} \quad G_{m,n+1}\subset G_{m,n}. \tag{7}$$

$\mathcal{C}$ étant dense en soi, il existe pour chaque n un ensemble fini $Y_{m,n}$ tel que

(8) $$0 \neq Y_{m,n} \subset G_{m,n} - X_m,$$

(9) $$Y_{m,n}\left(x-\frac{1}{m+n},\ x+\frac{1}{m+n}\right) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in X_m.$$

Les ensembles $X_m + (\mathcal{C} - G_{m,n})$ et $Y_{m,n}$ étant disjoints d'après (8) et fermés, il existe une fonction $g_{m,n} \in \mathrm{C}(\mathcal{C})$ satisfaisant à (4), à la condition

(10) $$g_{m,n}(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \in Y_{m,n}$$

et à la condition $g_{m,n}(x) = 1/m$ pour $x \in X_m + (\mathcal{C} - G_{m,n})$. On en conclut d'après (7) que $g_{m,n}$ satisfait à (5), donc que $z \in \mathrm{X}^2$.

Reste à déduire une contradiction de l'hypothèse $z \in \mathrm{X}^1$. Or, elle entraîne l'existence d'un m_p et d'un n_p tels que

(11) $$\lim_p g_{m_p,n_p}(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathcal{C}.$$

En désignant par M l'ensemble de tous les m_p,

(12) $$M \text{ est infini},$$

car autrement on aurait, d'après (4), pour son maximum m^*, $g_{m_p,n_p} \geqslant 1/m^*$, contrairement à (11). $\mathcal{C}$ étant compact, donc complet, l'ensemble de tous les x auxquels la convergence (11) est uniforme, est dense dans $\mathcal{C}$ [3]). Par conséquent, il existe un $t \in \mathcal{C}$ ayant la propriété suivante: il existe un entourage V de t et un q tels que

(13) $$g_{m_p,n_p}(x) < 1 \quad \text{pour} \quad x \in V \quad \text{et} \quad p > q.$$

X étant dense dans $\mathcal{C}$, on a $x^* \in V$ pour un $x^* \in X$. D'après (6), il existe un r tel que

(14) $$x^* \in X_m \quad \text{pour} \quad m > r,$$

(15) $$(x^* - 1/m,\ x^* + 1/m) \subset V \quad \text{pour} \quad m > r.$$

D'après (12), il existe un s tel que

(16) $$s > q,$$

(17) $$m_s > r.$$

D'après (9), (14) et (17), on a $Y_{m_s,n_s}\left(x^* - \dfrac{1}{m_s+n_s},\ x^* + \dfrac{1}{m_s+n_s}\right) \neq 0$, donc $Y_{m_s,n_s} V \neq 0$ selon (15) et (17). Mais c'est impossible en vertu de (10), (13) et (16).

[3]) H. Hahn, l. c. p. 275, Satz IV.

4. Démonstrations des théorèmes 1.2—1.4.

4.1. *Démonstration de* 1.2. X étant l'ensemble de fonctions satisfaisant à 1.1, on a

(18) $${}^{\xi}\mathrm{X} - {}^{\eta}\mathrm{X} \neq 0 \quad \text{pour} \quad \eta < \xi;$$

en outre, il s'agit d'établir l'existence d'un $\mathrm{Y} \subset \mathrm{C}(P)$ tel que

(19) $$\mathrm{Y}^{\xi} - \mathrm{Y}^{\eta} \neq 0 \quad \text{pour} \quad \eta < \xi.$$

P étant non séparable, il existe un n et un $Q \subset P$ tels que Q est indénombrable et que la distance de deux points différents quelconques appartenant à Q est $\geqslant 1/n$ [4]). Chaque sous-ensemble de Q étant évidemment fermé dans P, on peut admettre que Q est un ensemble isolé, fermé dans P et que sa puissance est $\aleph_1$.

Il en résulte tout d'abord, en admettant l'hypothèse du continu, l'existence d'une transformation biunivoque b de l'ensemble M de tous les nombres réels en Q, telle que $b(M) = Q$; on en déduit d'après 3.1 et (18) que

(20) $${}^{\xi}b(\mathrm{X}) - {}^{\eta}b(\mathrm{X}) \neq 0 \quad \text{pour} \quad \eta < \xi.$$

De plus, Q étant isolé, on a $\mathrm{F}(Q) = \mathrm{C}(Q)$, donc ${}^{\xi}\mathrm{Z} = \mathrm{Z}^{\xi}$ pour $\mathrm{Z} \subset \mathrm{F}(Q)$. En posant $\mathrm{Z} = b(\mathrm{X})$, on en conclut selon (20) que $\mathrm{Z}^{\xi} - \mathrm{Z}^{\eta} \neq 0$ pour $\eta < \xi$. Enfin, Q étant fermé dans P, on en tire $(\mathrm{Pr}(\mathrm{Z}))^{\xi} - (\mathrm{Pr}(\mathrm{Z}))^{\eta} \neq 0$ pour $\eta < \xi$ d'après 3.3, de sorte qu'en posant $\mathrm{Y} = \mathrm{Pr}(\mathrm{Z})$, on obient (19).

4.2. *Démonstration de* 1.3. Soit $\mathrm{X} \subset \mathrm{C}(P)$. P étant compact, on peut métriser $\mathrm{C}(P)$ en prenant pour la distance de fonctions f_1 et f_2 de $\mathrm{C}(P)$ le nombre $\max\limits_{x \in P} |f_1(x) - f_2(x)|$. Ainsi métrisé, $\mathrm{C}(P)$ est séparable [5]), $\mathrm{Y} = \sum\limits_{\xi < \Omega} \mathrm{X}^{\xi}$ l'est donc aussi. Il en résulte l'existence d'un ensemble dénombrable $\Phi \subset \mathrm{Y}$ ayant la propriété suivante: pour toute fonction $f \in \mathrm{Y}$ et pour tout n, il existe une fonction $\varphi \in \Phi$ telle que $|f(x) - \varphi(x)| < 1/n$ pour $x \in P$. L'ensemble dénombrable Φ étant contenu dans $\sum\limits_{\xi < \Omega} \mathrm{X}^{\xi}$, on trouve

(21) $$\Phi \subset \mathrm{X}^{\eta}$$

avec un η convenable. Or, soit $\xi = \eta + 1$; je dis que $\mathrm{X}^{\xi+1} \subset \mathrm{X}^{\xi}$. Il existe en effet, pour toute fonction $f \in \mathrm{X}^{\xi+1}$ et pour chaque n, une fonction $f_n \in \mathrm{X}^{\xi}$ et une fonction $\varphi_n \in \Phi$ telles que $\lim\limits_n f_n = f$ et $|f_n - \varphi_n| < 1/n$. On en conclut que $\lim\limits_n \varphi_n = f$, d'où $f \in \mathrm{X}^{\eta+1} = \mathrm{X}^{\xi}$ selon (21).

[4]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig 1927, p. 126.

[5]) K. Borsuk, Fund. Math. **17** (1931), p. 165, théorème 2.

4.3. *Démonstration de* 1.4. Désignons par Prop(ξ) la proposition suivante: Il existe un ensemble $\mathbf{X}$ uniformément borné de fonctions non négatives de $C(\mathcal{C})$, tel que $z\in\mathbf{X}^{\xi}-\mathbf{X}^{\eta}$ pour $\eta<\xi$ [6]).

Soit un α donné. Comme il existe par l'hypothèse un sous-espace de P homéomorphe à $\mathcal{C}$ et, par suite, fermé dans P, on s'assure aisément à l'aide de 3.2 et 3.3 qu'il suffit de démontrer Prop(α) en supposant Prop(ξ) pour $\xi<\alpha$.

Or, Prop(0) étant banale et Prop(1) étant évidente [7]), on peut se borner aux

$$\alpha\geqslant 2. \tag{22}$$

Envisageons d'abord le cas où α est un nombre-limite. En posant

$$\sum_{q\leqslant 0}\frac{2}{3^q}=0,\qquad I_n=\Big[\sum_{q\leqslant n-1}\frac{2}{3^q},\ \sum_{q\leqslant n-1}\frac{2}{3^q}+\frac{1}{3^n}\Big],\qquad X_n=\mathcal{C}I_n,$$

on a, comme on sait, $\mathcal{C}=\{1\}+X_1+X_2+\ldots$, où les termes sont disjoints deux à deux et chaque X_n est homéomorphe à $\mathcal{C}$, donc fermé dans $\mathcal{C}$. En rapprochant Prop(ξ) de 3.2, on en conclut qu'il existe, pour chaque n, un $\xi_n<\alpha$ et un $\mathbf{X}_n\subset C(X_n)$ tels que:

1⁰ $\xi_n>0$;

2⁰ si $\eta<\alpha$, on a $\eta<\xi_n$ pour un n;

3⁰ si $f\in\mathbf{X}_n$, on a $0\leqslant f(x)\leqslant 1/n$ pour tout $x\in X_n$;

4⁰ $z\in\mathbf{X}_n^{\xi_n}-\mathbf{X}_n^{\eta}$ pour tout $\eta<\xi_n$.

Or, soit $\mathbf{X}$ l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi\in F(\mathcal{C})$ pour lesquelles on a $\varphi/X_n\in\mathbf{X}_n$ pour chaque n et $\varphi(1)=0$. D'après 3⁰, on vérifie aisément que $\mathbf{X}$ est un ensemble uniformément borné de fonctions non négatives de $C(\mathcal{C})$. Par conséquent, on n'a qu'à prouver que $z\in\mathbf{X}^{\alpha}-\mathbf{X}^{\eta}$ pour tout $\eta<\alpha$. Mais si l'on avait $z\in\mathbf{X}^{\eta}$ pour un $\eta<\alpha$, on aurait aussi $z\in\mathbf{X}^{\eta}/X_n\subset(\mathbf{X}/X_n)^{\eta}\subset\mathbf{X}_n^{\eta}$, ce qui est impossible en vertu de 2⁰ et 4⁰.

[6]) On s'aperçoit aisément que α étant un nombre positif, on peut admettre que $f(x)\leqslant\alpha$ pour $f\in\mathbf{X}$ et $x\in\mathcal{C}$.

[7]) Si l'on pose $f_n(x)=1/n$ pour $x\in\mathcal{C}$ et $n\geqslant 1$, on obtient Prop (1) en prenant pour $\mathbf{X}$ l'ensemble de toutes les f_n.

Reste à montrer que $z\in\mathbf{X}^{\alpha}$. Considérons à ce but une fonction $\varphi\in\mathbf{X}$ — qui existe bien, chaque $\mathbf{X}_n$ étant non vide selon 1⁰ et 4⁰ — et désignons par $\mathbf{Y}(\eta,m)$ l'ensemble de toutes les fonctions $\psi\in F(\mathcal{C})$ pour lesquelles on a $\psi/X_n\in\mathbf{X}_n^{\eta}$ si $n\leqslant m$ et $\psi(x)=\varphi(x)$ si $x\in\mathcal{C}-(X_1+X_2+\ldots+X_m)$. On vérifie aisément que l'on a pour tout m

$$\mathbf{Y}(\eta,m)\subset C(\mathcal{C}), \tag{23}$$

et même, comme je vais montrer,

$$\mathbf{Y}(\eta,m)\subset\mathbf{X}^{\eta}. \tag{24}$$

Soit $\beta>0$. La relation (24) étant vraie pour $\eta=0$ d'après la définition de $\mathbf{X}$, il suffit de l'admettre pour $\eta<\beta$ et de l'en déduire pour $\eta=\beta$. Soit donc $\psi\in\mathbf{Y}(\beta,m)$. Comme $\psi/X_n\in\mathbf{X}_n^{\beta}$ pour $n\leqslant m$, il existe, pour chaque $n\leqslant m$ et chaque p, un $\eta_{n,p}<\beta$ et une fonction $f_{n,p}\in\mathbf{X}_n^{\eta_{n,p}}$ tels que

$$\lim_p f_{n,p}(x)=\psi(x)\quad\text{pour}\quad n\leqslant m\quad\text{et}\quad x\in X_n. \tag{25}$$

En posant $\zeta_p=\max(\eta_{1,p},\eta_{2,p},\ldots,\eta_{m,p})$, on a

$$\zeta_p<\beta\quad\text{et}\quad f_{n,p}\in\mathbf{X}_n^{\zeta_p}\quad\text{pour}\quad n\leqslant m. \tag{26}$$

Considérons pour tout p une $\psi_p\in F(\mathcal{C})$ définie par la formule

$$\psi_p(x)=\begin{cases} f_{n,p}(x) & \text{pour}\quad n\leqslant m\quad\text{et}\quad x\in X_n,\\ \varphi(x) & \text{pour}\quad x\in\mathcal{C}-(X_1+X_2+\ldots+X_m).\end{cases}$$

Il s'ensuit que $\psi_p\in\mathbf{Y}(\zeta_p,m)\subset\mathbf{X}^{\zeta_p}$ d'après (26) et $\lim\limits_p\psi_p=\psi$ d'après (25), donc, ψ étant continue selon (23), on a $\psi\in\mathbf{X}^{\beta}$, ce qui achève la démonstration de (24).

Ceci établi, soit (pour tout m) $\varphi_m\in F(\mathcal{C})$ la fonction définie par la formule

$$\varphi_m(x)=\begin{cases} 0 & \text{pour}\quad x\in X_1+X_2+\ldots+X_m,\\ \varphi(x) & \text{pour}\quad x\in\mathcal{C}-(X_1+X_2+\ldots+X_m).\end{cases}$$

En appliquant la propriété 4⁰ et en posant $\beta_m=\max(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)$, on a $\beta_m<\alpha$ et $z\in\mathbf{X}_n^{\beta_m}$ pour $n\leqslant m$, donc $\varphi_m\in\mathbf{Y}(\beta_m,m)\subset\mathbf{X}^{\beta_m}$ d'après (24). On en conclut que $z\in\mathbf{X}^{\alpha}$, car $\lim\limits_m\varphi_m(x)=0$ pour chaque $x\in\mathcal{C}$.

Passons maintenant au cas où α est un nombre isolé:

$$\alpha=\beta+1\quad\text{et}\quad\beta>0 \tag{27}$$

d'après (22). Comme $\mathcal{C}\times\mathcal{C}=\mathcal{C}^2$ est homéomorphe à $\mathcal{C}$ [8]), il suffit en vertu de 3.2 de démontrer au lieu de Prop(α) la proposition suivante: il existe un ensemble Y uniformément borné de fonctions non négatives de $C(\mathcal{C}^2)$, tel que

$$z\in \mathrm{Y}^{\alpha}-\mathrm{Y}^{\beta}. \tag{28}$$

En posant:

$$I_n=\left[\frac{2}{3^{n+1}},\frac{1}{3^n}\right],\qquad J_n=\left[\sum_{q\leqslant n}\frac{2}{3^q},\ \sum_{q\leqslant n}\frac{2}{3^q}+\frac{1}{3^{n+1}}\right],$$

$$X_n=\{0\}+\mathcal{C}\sum_{q>n}I_q,\qquad Y_n=\{1\}+\mathcal{C}\sum_{q>n}J_q,\qquad Z_{m,n}=\mathcal{C}-(X_m+Y_n),$$

on parvient sans difficulté aux conclusions suivantes:

$$\mathcal{C}=X_m+Y_n+Z_{m,n}, \tag{29}$$

tous les sommandes étant disjoints deux à deux et fermés dans $\mathcal{C}$,

$$\prod_n X_n=\{0\},\qquad X_{n+1}\subset X_n, \tag{30}$$

$$\prod_n Y_n=\{1\},\qquad Y_{n+1}\subset Y_n, \tag{31}$$

(32) il existe un $y_m\in Z_{m,1}$ tel que $\lim\limits_m y_m=0$ et $Z_{m',n'}\subset Z_{m'',n''}$ si $m'\leqslant m''$ et $n'\leqslant n''$.

En outre, en utilisant (29) et les fonctions $g_{m,n}\in C(\mathcal{C})$ de l'énoncé 3.4, je définis pour $f\in C(\mathcal{C})$ la fonction $\varphi(f,m,n)\in F(\mathcal{C}^2)$ comme suit:

$$\varphi(f,m,n;x,y)=\begin{cases} f(x) & \text{pour}\quad y\in X_{m+n}\\ f(x)+g_{m,n}(x) & \text{pour}\quad y\in Y_m\\ 0 & \text{pour}\quad y\in Z_{m+n,m}\end{cases}\quad \text{où}\quad x\in\mathcal{C}. \tag{33}$$

Avec cette définition, on a les règles suivantes, dans lesquelles f désigne les fonctions de $C(\mathcal{C})$:

$$\varphi(f,m,n;x,0)=f(x)\qquad \text{pour}\quad x\in\mathcal{C}, \tag{34}$$

$$\varphi(f,m,n;x,1)=f(x)+g_{m,n}(x)\qquad \text{pour}\quad x\in\mathcal{C}, \tag{35}$$

$$\varphi(f,m,n)\in C(\mathcal{C}^2), \tag{36}$$

$$\lim_p f_p\in C(\mathcal{C})\quad \text{entraîne}\quad \lim_p\varphi(f_p,m,n)=\varphi(\lim_p f_p,m,n), \tag{37}$$

$$\lim_p\varphi(f_p,m,n)\in C(\mathcal{C}^2)\quad \text{entraîne}\quad \lim_p f_p\in C(\mathcal{C}). \tag{38}$$

---

[8]) C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne **3**, Warszawa-Lwów 1933, p. 148.

En effet, (34), (35) et (37) sont immédiates, (36) est une conséquence de (29) et (38) s'obtient comme suit: soit

$$\psi=\lim_p\varphi(f_p,m,n)\in C(\mathcal{C}^2);$$

en posant $f(x)=\psi(x,0)$ pour $x\in\mathcal{C}$, on a alors $f\in C(\mathcal{C})$ et $f(x)=\lim\limits_p f_p(x)$ pour $x\in\mathcal{C}$ d'après (34).

Maintenant, en désignant pour $Z\subset C(\mathcal{C})$ par $\Phi(Z,m,n)$ l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi(f,m,n)$ où $f\in Z$, on a en vertu de (36)

$$\Phi(Z,m,n)\subset C(\mathcal{C}^2)\qquad \text{pour}\quad Z\subset C(\mathcal{C})$$

et on en déduit par l'induction transfinie à l'aide de (37) et (38)

$$\Phi(Z^{\xi},m,n)=\big(\Phi(Z,m,n)\big)^{\xi}\qquad \text{pour}\quad Z\subset C(\mathcal{C}). \tag{39}$$

Or, soit X l'ensemble de fonctions satisfaisant à Prop(β); posons $Y_{m,n}=\Phi(X,m,n)$ et

$$Y=\sum_{m,n}Y_{m,n}. \tag{40}$$

On en tire d'abord par l'induction transfinie, en tenant compte de Prop(β):

$$z\in X^{\beta}-X^{\eta}\qquad \text{pour}\quad \eta<\beta, \tag{41}$$

$$f(x)\geqslant 0\qquad \text{pour}\quad x\in\mathcal{C}\ \text{et}\ f\in X^{\xi}. \tag{42}$$

On en tire ensuite, en tenant compte de (39) que

$$\psi\in Y^{\xi}_{m,n}\quad \text{équivaut à}\quad \psi=\varphi(f,m,n)\quad \text{pour un}\quad f\in X^{\xi}. \tag{43}$$

On en tire enfin, en tenant compte de (4) et (33), que Y est un ensemble uniformément borné de fonctions non négatives de $C(\mathcal{C}^2)$. Reste à établir la formule (28).

Comme $\beta>0$ selon (27), il existe pour chaque n, d'après (41), un $\xi_n<\beta$ et une $f_n\in X^{\xi_n}$ tels que $\lim\limits_n f_n(x)=0$ pour $x\in\mathcal{C}$; on en déduit à l'aide de (5) et (33) que

$$\lim_n\varphi(f_n,m,n;x,y)=\begin{cases}0 & \text{pour}\quad y\in\mathcal{C}-Y_m\\ 1/m & \text{pour}\quad y\in Y_m\end{cases}\quad \text{où}\quad x\in\mathcal{C}. \tag{44}$$

En vertu de (29) on a donc $\lim\limits_n\varphi(f_n,m,n)\in C(\mathcal{C}^2)$ et on en conclut d'après (40) et (43) que $\lim\limits_n\varphi(f_n,m,n)\in Y^{\beta}$. Par conséquent $z\in Y^{\alpha}$ suivant (27) et (44).

Pour avoir (28), il suffit donc de déduire une contradiction de l'hypothèse $z\in Y^{\beta}$. A ce but, je vais montrer d'abord que

$$Y^{\eta}\subset\sum_{m,n}Y^{\eta}_{m,n}\qquad \text{pour}\quad \eta<\beta. \tag{45}$$

Soit $0<\gamma<\beta$. La relation (45) étant d'après (40) vraie pour $\eta=0$, il suffit de l'admettre pour $\eta<\gamma$ et de l'en déduire pour $\eta=\gamma$.

Soit donc $\psi\epsilon\mathrm{Y}^{\gamma}$. En s'appuyant sur (43) et (40), on parvient, pour chaque p, à l'existence des nombres m_p, n_p, d'un $\eta_p<\gamma$ et d'une fonction

(46) $$f_p\epsilon\mathrm{X}^{\eta_p}$$

tels que

(47) $$\psi=\lim_p\varphi(f_p,m_p,n_p).$$

Il s'ensuit selon (34) que

(48) $$\psi(x,0)=\lim_p f_p(x) \quad \text{pour} \quad x\epsilon\mathcal{C}.$$

En désignant par M l'ensemble de tous les m_p+n_p, on s'aperçoit en vertu de (43), (46) et (47) que tout se réduit à tirer une contradiction de l'hypothèse que M est infini. Or, elle entraîne, en effet, d'une part en vertu de (32) que, pour tout r, il y a une infinité de nombres p pour lesquels on a $y_r\epsilon Z_{m_p+n_p,m_p}$, donc aussi, selon (33), $\varphi(f_p,m_p,n_p;x,y_r)=0$ pour $x\epsilon\mathcal{C}$; et d'autre part en vertu de (47) que, quel que soit r, on a $\psi(x,y_r)=0$, donc aussi $\psi(x,0)=0$ pour $x\epsilon\mathcal{C}$. Mais c'est impossible en vertu de (41), (46) et (48), puisque $\eta_p<\gamma<\beta$.

La prémisse (45) ainsi établie permet de tirer une contradiction de l'hypothèse $z\epsilon\mathrm{Y}^{\beta}$. En effet, (43) et (45) impliquent l'existence, pour tout p, des nombres m_p,n_p, d'un $\eta_p<\beta$ et d'une fonction $f_p\epsilon\mathrm{X}^{\eta_p}$ tels que $\lim_p\varphi(f_p,m_p,n_p;x,1)=0$ pour $x\epsilon\mathcal{C}$. Il en résulte selon (35) et (42) que $\lim_p g_{m_p,n_p}(x)=0$ pour tout $x\epsilon\mathcal{C}$, ce qui est impossible d'après 3.4.

Séminaire topologique
de l'Université Masaryk à Brno.

Un théorème concernant la convergence des fonctions sur les ensembles dénombrables.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

Théorème. *Si E est un ensemble dénombrable (d'éléments quelconques) et $\{f_n^m(x)\}$ une suite double de fonctions réelles définies sur E, et s'il existe la limite*

(1) $$\lim_{m=\infty}(\lim_{n=\infty}f_n^m(x))=f(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x\epsilon E,$$

il existe deux suites infinies croissantes d'indices $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$, telles qu'on a

(2) $$\lim_{k=\infty}f_{n_k}^{m_k}(x)=f(x) \qquad \textit{pour} \quad x\epsilon E.$$

Démonstration. D'après (1), il existe pour $m=1,2,\ldots$ et pour $x\epsilon E$ la limite

(3) $$\lim_{n=\infty}f_n^m(x)=f^m(x).$$

Soit

(4) $$E=(x_1,x_2,\ldots).$$

D'après (1) et (3), on a

$$\lim_{m=\infty}f^m(x)=f(x) \qquad \text{pour} \quad x\epsilon E$$

et il existe pour tout k naturel un indice μ_k tel que

(5) $$|f^m(x_i)-f(x_i)|<1/k \qquad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,k \quad \text{et} \quad m>\mu_k.$$

Posons

$$m_k=1+\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k.$$