Sur les fonctions continues.

Par

Bedřich Pospíšil (Brno).

Dans ce qui suit, j'envisage un espace topologique P supposé métrique[1]) en même temps qu'un certain sous-ensemble Q dense dans cet espace. L'espace P satisfera aux axiomes A, B, C et D de M. Hausdorff[2]).

Soit Φ l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues définies sur P et dont les valeurs sont p. ex. non négatives et ne dépassent pas 1. On peut introduire dans Φ de différentes notions de convergence. J'en considère ici les cinq qui suivent. Soient toujours $f_n \epsilon \Phi$, $f \epsilon \Phi$, $n=1,2,\ldots$

La formule $f_n \to f(I)$ veut dire par définition que les fonctions f_n convergent vers f uniformément sur P.

La formule $f_n \to f(II)$ désigne que, pour chaque point $q \epsilon Q$, il existe un entourage U de q dans P, tel que pour chaque $\varepsilon > 0$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \epsilon U$ et presque tous les n naturels.

Lorsqu'on admet, dans la définition que je viens de donner, qu'il n'existe peut-être aucun U indépendant de ε, mais qu'il en existe toujours un pour tout ε donné d'avance, on obtient une convergence $f_n \to f(IV)$, qui peut être énoncée — on le prouve sans peine — dans le cas d'un P métrique, comme il suit: les f_n convergent vers f uniformément sur tout sous-ensemble compact de Q, ce que je désigne par $f_n \to f(III)$.

Enfin, j'exprime par $f_n \to f(V)$ que la suite numérique $f_n(q)$ converge vers $f(q)$ pour chaque point q de Q. Évidemment, il n'y a en vertu de la densité de Q qu'une seule limite au plus.

---

[1]) sauf quelques cas où les démonstrations concernant les P métriques sont valables par elles-mêmes pour des espaces plus généraux.

[2]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 213.

Soit $M \subset \Phi$. Alors, je désigne par $u_T M$ (où $T = I, II, III, IV$ et V) l'ensemble des fonctions $f \epsilon \Phi$ telles que l'on a $f_n \to f(T)$ pour une suite convenable de fonctions $f_n \epsilon M$. La relation $u_I \subset u_{II}$ par exemple veut dire qu'on a toujours $u_I M \subset u_{II} M$ (et ainsi de suite). La signification des symboles tels que $u_I + u_{II}$, $u_I u_{II}$ etc. s'explique par elle-même.

Il est bien évident que:

$$u_I \subset u_{II} \subset u_{IV} \subset u_V, \quad u_I \subset u_{III} \subset u_V.$$

De plus, on a $u_{III} \subset u_{IV}$, en supposant que P satisfasse au premier axiome de dénombrabilité de M. Hausdorff. En effet, lorsque f_n *non* $\to f(IV)$, il existe un $\varepsilon > 0$ et un point $q \epsilon Q$ tels qu'on peut faire correspondre à tout n un $k \geqslant n$ et un entourage O_n de q avec $|f_{k_n}(p_n) - f(p_n)| > \varepsilon$ pour un $p_n \epsilon O_n$ convenable, de façon que les O_n parcourent un système complet d'entourages du point q dans l'espace P, c. à d. que tout entourage de q contienne un O_n; soit de plus $O_{n+1} \subset O_n$. Il existe, par suite de la continuité de f_n, un entourage Ω_n du point p_n tel que $x \epsilon \Omega_n$ entraîne $|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon/3$. Il résulte de la densité de Q l'existence d'un $q_n \epsilon O_n \Omega_n Q$. Alors, il est bien évident que $\sum_n (q_n) + (q)$ est un sous-ensemble compact de Q et dans lequel la convergence des f_n n'est pas uniforme, c. q. f. d.

Pour prouver l'égalité

$$u_{III} = u_{IV}$$

pour un P métrique, on n'a donc à établir que l'inclusion $u_{IV} \subset u_{III}$ à l'aide du théorème de MM. Borel et Lebesgue.

Je vais étudier ici les convergences en question pour un P métrique. Je me propose de prouver que, dans de certains cas, on a $u_T u_T \neq u_T$. En particulier, on a les deux propositions suivantes:

I. *Soit P un espace métrique complet et dense en soi; alors, pour un Q convenablement choisi, on a $u_T u_T \neq u_T$ où $T = II, III, IV, V$.*

II. *Soit P un espace métrique; alors on a $u_T u_T \neq u_T$ où $T = II, III, IV$, en supposant que Q n'est pas localement compact.*

Les deux propositions résultent immédiatement des théorèmes plus généraux qui suivent. Je signale encore que M. Neubauer est en train de préparer une étude sur des questions analogues pour la convergence V[3]).

---

[3]) à paraître dans ce volume, p. 269-278.

Commençons par le théorème suivant:

(1) *Soit P un espace métrique complet et dense en soi; alors, pour un Q convenablement choisi, on a*

$$u_I u_{II} \text{ non} \subset u_V.$$

En effet, suivant M. Čech[4]), P est un G_δ dans un espace bicompact. La proposition à démontrer est donc un cas particulier du théorème plus général qui va suivre, où j'appelle, d'accord avec M. Čech, *parfaitement normal* tout espace normal dont tous les sous-ensembles fermés sont des G_δ. On sait que tout espace de ce genre est même complètement normal.

(2) *Soit P un espace parfaitement normal, dense en soi et qui est un G_δ dans un espace compact régulier; alors, pour un Q convenablement choisi, on a*

$$u_I u_{II} \text{ non} \subset u_V.$$

En effet, soit C l'espace compact régulier en question. Il existe des sous-ensembles ouverts O_n de C tels que:

(i) $$P=\prod_n O_n.$$

Désignons par vM la fermeture de $M\subset C$ dans l'espace C. Par suite de la régularité de C, il existe un G_1 ouvert dans C avec $vG_1\subset O_1$, de même qu'un G_2 ouvert dans C avec $vG_2\subset O_1 - vG_1$ et ainsi de suite. On construit ainsi une suite des G_n $(n=1,2,\ldots)$ ouverts à fermetures $vG_n\subset O_1$ disjointes deux à deux. On peut, de plus, arranger la construction de façon à avoir $G_nP\neq P$ pour tous les n. Si l'on remplace O_1 par un $G_{n_1}O_2$, on construit de la même manière les ensembles $G_{n_1n_2}$ $(n_2=1,2,\ldots)$ et ainsi de suite. On fait ainsi correspondre, à chaque suite finie $n_1,n_2,\ldots,n_k$ d'entiers positifs, un sous-ensemble ouvert $G_{n_1n_2\ldots n_k}$ de C de façon qu'on ait:

(ii) $$vG_{n_1\ldots n_k r}\cdot vG_{n_1\ldots n_k s}=0 \qquad (r\neq s),$$

(iii) $$vG_{n_1\ldots n_k r}\subset G_{n_1\ldots n_k},$$

(iv) $$vG_{n_1n_2\ldots n_k}\subset O_1O_2\ldots O_k.$$

Soit $n_1,n_2,\ldots$ une suite infinie quelconque d'entiers positifs; nous posons alors

(v) $$[n_1,n_2,\ldots]=vG_{n_1}\cdot vG_{n_1n_2}\cdot vG_{n_1n_2n_3}\ldots$$

[4]) E. Čech, *On bicompact spaces*, Annals of Math. **38**, (1937), p. 838.

En vertu de la compacité de C, c'est un ensemble non vide et qui est contenu dans P d'après (i) et (iv). Soit N l'ensemble-somme de tous les $[n_1,n_2,\ldots]$. Posons de plus

(vi) $$Q=N+(P-vN).$$

Il est évident que Q est un sous-ensemble dense de l'espace P.

A chaque $0<\alpha<1$ irrationnel, on peut faire correspondre un $[\alpha_1,\alpha_2,\ldots]$ de façon que α_l soit le l-ième terme du développement de α et fraction continue. C'est une correspondance biunivoque selon (ii) et (v). Remarquons que la correspondance entre $[\alpha_1,\alpha_2,\ldots]$ et α établit une transformation de l'ensemble N considéré comme espace en l'espace des α irrationnels, qui est continue. Car les ensembles qui correspondent aux $NG_{\alpha_1}, NG_{\alpha_1\alpha_2},\ldots$ parcourent un système complet d'entourages de α dans le contre-domaine de la correspondance en question. Il suffit donc de rappeler que les $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_1\alpha_2},\ldots$ sont ouverts.

Soit F_{kl} (pour k et l naturels) la somme de tous les ensembles $[\alpha_1,\alpha_2,\ldots]$ avec $\alpha_l\geqslant k$. On a

(vii) $$F_{k+1\,l}\subset F_{kl}.$$

De plus, les F_{kl} sont fermés dans l'espace N. Cela résulte de la continuité de la transformation, car l'ensemble des α avec $\alpha_l\geqslant k$ est fermé dans l'espace des nombres irrationnels.

En vertu de la normalité parfaite de l'espace P, il existe des H_{klm} (m naturel) ouverts dans C et tels que:

(viii) $$P\cdot vF_{kl}=\prod_m PH_{klm},$$

(ix) $$P\cdot vH_{kl\,m+1}\subset H_{klm},$$

(x) $$P\cdot vH_{k+1\,lm}\subset H_{klm}.$$

En effet, il existe des H_{klm} qui satisfont aux relations (viii) et (ix). De plus, pour tout l fixe, on peut construire ces ensembles par l'induction complète suivant l'indice k de façon à satisfaire à (x); la possibilité en est donnée par la relation (vii). Posons en outre

(xi) $$H_{kl}=H_{klk}.$$

De même, on peut écrire, pour de certains H_k (k naturel) ouverts dans C:

(xii) $$P\cdot vN=\prod_k PH_k,$$

(xiii) $$P\cdot vH_{k+1}\subset H_k.$$

Je vais faire correspondre maintenant, à chaque couple ordonné d'entiers positifs k et l, une fonction g_{kl} à valeurs non négatives et non supérieures à 1, définie sur l'espace P. Je la définis tout d'abord sur l'ensemble $P \cdot vN$ de façon qu'elle prenne la valeur 1 dans tous les points de $P \cdot vN \cdot vF_{kl}$ et la valeur 0 en dehors de H_{kl}. L'existence des telles fonctions *continues* est donnée par un théorème bien connu d'Urysohn. En outre, il résulte de ce théorème que notre fonction admet une extension continue — désignons-la par g_{kl} — sur l'espace P tout entier qui est nulle dans tous les points de $P - H_k$. Soit de plus f_l (l naturel) la fonction constante définie sur P et dont l^{-1} est la valeur unique. La fonction f_{kl} sera définie pour chaque $x \epsilon P$ comme la plus grande des deux valeurs $g_{kl}(x)$ et $f_l(x)$. Evidemment, la démonstration de (2) sera achevée, lorsque j'aurai prouvé les trois propositions suivantes:

(a) $\quad f_{kl} \to f_l(II) \qquad (k \to \infty)$,

(b) $\quad f_l \to 0(I) \qquad (l \to \infty)$,

(c) *Étant donnée une suite quelconque de fonctions $f_{k_j l_j}$ $(j=1,2,\ldots)$, il existe dans Q un point q tel que la suite numérique $f_{k_j l_j}(q)$ ne tend pas vers 0 lorsque j tend vers ∞.*

Pour établir (a), soit d'abord $q \epsilon P - vN$. Il résulte des relations (xii) et (xiii) l'existence d'un r naturel assez grand tel que q *non* ϵH_k lorsque $k \geqslant r$. Alors, les g_{kl} sont nulles dans l'ensemble ouvert $P - vH_r$, qui contient q. Il suffit évidemment, en vertu de (vi), d'établir la proposition analogue dans le cas où $q \epsilon N$. Nous avons vu plus haut que les F_{kl} sont fermés dans l'espace N. De plus, selon la définition des F_{kl}, on a toujours, l étant un nombre fixe, q *non* ϵF_{kl} pour $k > r$ où r est un nombre naturel convenable. On en conclut que les ensembles (q), où $q \epsilon N$, et F_{rl} sont séparés, d'où q *non* ϵvF_{rl}. D'après (viii) et (ix), on a donc q *non* ϵvH_{rlm} pour un m convenable. Car $P \cdot vF_{rl} = \prod_m P \cdot vH_{rlm}$.

Soit $s > r + m$. Alors, l'inégalité $k \geqslant s$ entraîne que g_{kl} est nulle dans l'ensemble $P - vH_{sl}$, ouvert dans P et qui contient q. Vu (xi), (ix) et (x), la proposition (a) est ainsi établie.

Soit à présent $f_{k_j l_j}$ $(j=1,2,\ldots)$ une suite quelconque des fonctions f_{kl}. Il suffit d'établir (c) dans l'hypothèse que la correspondance entre les j et l_j est biunivoque. Soit α un des nombres irrationnels $(0<\alpha<1)$ tels que $\alpha_{l_j} = k_j$. Soit $q \epsilon [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$. On a $f_{k_j l_j}(q) = 1$ par définition et la proposition (c) est démontrée.

La proposition (b) étant évidente, le théorème (2) se trouve ainsi établi.

On ne peut pas généraliser ce théorème à tous les P métriques (il serait en défaut p. ex. pour les P métriques dénombrables). Car Q ne saurait être dénombrable en vertu de la proposition suivante:

(*) *Lorsque l'ensemble Q est dénombrable, on a $u_V u_V = u_V$.*

En effet, la convergence de type V peut être définie, dans le cas considéré, par la métrique:

$$\varrho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f(q_n) - g(q_n)|,$$

où $f \epsilon \Phi$, $g \epsilon \Phi$ et les q_n parcourent l'ensemble Q tout entier.

De même, des exemples triviaux montrent que l'hypothèse que P est dense en soi ne saurait être supprimée. Remarquons encore que, dans le cas où P est l'espace des nombres irrationnels, on peut poser dans le théorème (2) $Q = P$.

Les propositions analogues à (*) sont en défaut pour les autres espèces de convergence. Cela résulte du théorème qui suit.

(3) *Soit P un espace normal et qui vérifie le premier axiome de dénombrabilité; alors, on a $u_I u_{II}$ non $\subset u_{III}$ et $u_I u_{II}$ non $\subset u_{IV}$, en supposant que Q n'est pas localement compact.*

Désignons par wM la fermeture de l'ensemble M dans l'espace P. D'après ce qui a été dit sur les convergences III et IV, on n'a qu'à prouver, dans nos hypothèses, que $u_I u_{II}$ *non* $\subset u_{IV}$. Distingons deux cas:

1° Admettons d'abord l'existence d'un point $q \epsilon Q \cdot w(P-Q)$. On peut faire correspondre à tout l naturel un point $p_l \epsilon P - Q$ de façon que la suite des p_l converge vers q dans l'espace P. À chaque p_l, faisons correspondre un système complet dénombrable d'entourages O_{kl}, décroissant lorsque k augmente. Il existe, d'après Urysohn, une fonction $f_{kl} \epsilon \Phi$ avec $f_{kl}(p_l) = 1$ et qui est égale à l^{-1} en dehors de O_{kl}. Il est évident que $f_{kl} \to l^{-1}(II)$ $(k \to \infty)$ et que $l^{-1} \to 0(I)$. D'autre part, lorsqu'on choisit la suite $f_{k_j l_j}$ à volonté, les bornes supérieures de presque toutes les $f_{k_j l_j}$ dans un entourage quelconque de q sont égales à 1 (dans l'hypothèse évidemment légitime que $l_1 < l_2 < \ldots$), d'où l'on tire la proposition cherchée $f_{k_j l_j}$ *non* $\to 0(IV)$.

2° A défaut d'un pareil q, l'ensemble Q est ouvert dans P. De plus, il existe par hypothèse un point $q \epsilon Q$ ne possédant pas dans P d'entourages à fermetures compactes. On peut admettre, par suite de la régularité de P, que les fermetures dans P de tous les entourages des points de Q que l'on a à considérer sont contenues dans Q. Envisageons un système complet dénombrable d'entourages O_l (l naturel) du point q dans P avec $wO_{l+1} \subset O_l$. La fermeture wO_l n'étant pas compacte par hypothèse, il existe un suite dénombrable infinie divergente de points $p_{kl} \epsilon O_l$. Suivant MM. Alexandroff et Urysohn [5]), on peut faire correspondre, à tout point p_{kl}, un entourage O_{kl} (à fermeture contenue dans O_l) satisfaisant aux conditions suivantes:

(xiv) $$wO_{rl} \cdot wO_{sl} = 0 \qquad (r \neq s),$$

(xv) $$w\sum_{k \geqslant n} O_{kl} = \sum_{k \geqslant n} wO_{kl} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

D'après Urysohn, il existe une fonction $g_{kl} \epsilon \Phi$ telle que $g_{kl}(p_{kl}) = 1-(k+1)^{-1}$ et $g_{kl}(x) = l^{-1}$ lorsque x *non* ϵO_{kl}. Soit $f_{kl} = \max_{m>k} g_{ml}$. On tire sans peine de (xiv) et (xv) que $f_{kl} \epsilon \Phi$. De plus, on voit aisément que $f_{kl} \to l^{-1}(II)$ $(k \to \infty)$ et $l^{-1} \to 0(I)$. Reste à prouver que $f_{k_j l_j}$ *non* $\to 0(IV)$ dans les notations analogues à celles du cas 1°. Mais c'est la même chose qu'auparavant.

L'hypothèse faite sur Q est essentielle, comme le montrent des exemples triviaux, où $u_{II} = u_I$, donc où $u_I u_{II} = u_I \subset u_{IV}$. Il suffit de prendre comme Q un ensemble métrique compact. Lorsque Q est localement compact et séparable dans un P métrique, on peut métriser la convergence III comme suit:

$$\varrho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname*{borne\ sup}_{x \epsilon G_n Q} |f(x) - g(x)|$$

où les fermetures wG_n sont compactes et les G_n recouvrent Q. C'est M. Čech qui s'en est aperçu. Alors, on a même $u_{IV} u_{IV} = u_{IV}$ dans ce cas-là.

Séminaire topologique à Brno.

[5]) P. Alexandroff et P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verhandl. Akad. Amsterdam **14** (1929), No. 1, p. 56.

Sur l'espace des fonctions continues.

Par

Miloš Neubauer (Brno).

1. Résultats. $\mathbf{X}$ étant respectivement un ensemble de fonctions [1]) ou un ensemble de fonctions continues dans un espace métrique, je désigne par $\tilde{\mathbf{X}}$ et $\overline{\mathbf{X}}$ respectivement l'ensemble de toutes les fonctions et celui des fonctions continues dans cet espace qui sont limites d'une suite de fonctions de $\mathbf{X}$. Je définis pour $\xi < \Omega$ les symboles ${}^{\xi}\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}^{\xi}$, en posant respectivement

$${}^{0}\mathbf{X} = \mathbf{X}, \qquad \mathbf{X}^{0} = \mathbf{X}$$

et pour $\xi > 0$:

$${}^{\xi}\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{S}} \text{ où } \mathbf{S} = \sum_{\eta<\xi} {}^{\eta}\mathbf{X}, \qquad \mathbf{X}^{\xi} = \overline{\mathbf{S}} \text{ où resp. } \mathbf{S} = \sum_{\eta<\xi} \mathbf{X}^{\eta}.$$

A l'aide de l'opération ${}^{\xi}\mathbf{X}$, le théorème classique d'existence sur les fonctions mesurables B se laisse exprimer comme suit:

1.1. *Il existe un ensemble $\mathbf{X}$ de fonctions d'une variable réelle tel que ${}^{\xi}\mathbf{X} \neq {}^{\eta}\mathbf{X}$ pour $\eta < \xi < \Omega$* (à savoir l'ensemble de toutes les fonctions continues d'une variable réelle).

Dans la suite, je démontre les trois théorèmes suivants qui montrent que la situation est tout à fait différente si l'on passe de l'opération ${}^{\xi}\mathbf{X}$ à l'opération $\mathbf{X}^{\xi}$.

1.2. *Si l'espace métrique P n'est pas séparable, alors, en admettant l'hypothèse du continu, il existe un ensemble $\mathbf{X}$ de fonctions continues dans P, tel que $\mathbf{X}^{\xi} \neq \mathbf{X}^{\eta}$ pour $\eta < \xi < \Omega$.*

1.3. *Si l'espace métrique P est compact, alors, pour chaque ensemble $\mathbf{X}$ de fonctions continues dans P, il existe un $\xi < \Omega$ tel que $\mathbf{X}^{\xi+1} = \mathbf{X}^{\xi}$.*

1.4. *Si l'espace métrique P contient topologiquement l'ensemble parfait non-dense de Cantor, alors, pour tout $\xi < \Omega$, il existe un ensemble $\mathbf{X}$ de fonctions continues dans P, tel que $\mathbf{X}^{\xi} \neq \mathbf{X}^{\eta}$ pour $\eta < \xi$.*

[1]) J'entends par *fonction* fonction réelle et finie.