D'autre part, $f_3(C_0)W=0$, donc r_n *non* $\epsilon f_3(C_0)$. L'existence des nombres β_6, γ_6 possédant les propriétés réquises s'en obtient par un raisonnement fort simple que j'omets.

13. Posons $\mathfrak{H}_n^{(1)}=\mathfrak{H}_n[\Gamma_1(E)\times R_2^E]$ et $\mathfrak{H}^{(1)}=\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{H}_n^{(1)}$. D'après **12**, $\mathfrak{H}^{(1)}$ est résiduel dans $\Gamma_1(E)\times R_2^E$. D'autre part, si $(C,f)\epsilon\mathfrak{H}^{(1)}$, l'ensemble $f(C)$ ne contient aucun point du plan R_2 à coordonnées rationnelles, d'où $\dim f(C)\leqslant 1$.

14. Soit $\mathfrak{G}^*=\mathfrak{G}\mathfrak{H}^{(1)}$; c'est un ensemble résiduel dans $\Gamma_1(E)\times R_2$. D'autre part, si $(C,f)\epsilon G^*$, l'ensemble $f(C)$ est une courbe péanienne plane, qui n'est décomposée localement par aucun de ses points. C'est donc un continu homéomorphe à la courbe universelle de M. Sierpiński.

Le théorème II est ainsi démontré; un raisonnement analogue à celui de **9** permet d'obtenir le théorème I.

15. Le théorème II peut s'exprimer de la manière suivante: *E étant un espace métrique, compact et contenant une courbe, toutes les fonctions $f\epsilon R_2^E$, à l'exception d'un ensemble de première catégorie dans R_2^E, transforment toutes les courbes de E, à l'exception d'un ensemble de première catégorie dans $\Gamma_1(E)$, en des continus péaniens homéomorphes à la courbe universelle de M. Sierpiński.*

Warszawa, 16. IX. 1938.

Sur l'existence d'une base dénombrable d'ensembles linéaires dénombrables.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

M. S. Mazur a démontré récemment (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *s'il existe un ensemble linéaire de puissance du continu jouissant de la propriété λ* [1]), *il existe aussi une base dénombrable pour les ensembles linéaires dénombrables*, c. à d. une famille dénombrable Φ d'ensembles linéaires telle que tout ensemble linéaire dénombrable est de la forme $\lim_{n=\infty} E_n$ où $E_n\epsilon\Phi$ pour $n=1,2,\ldots$ [2])

Cette proposition de M. Mazur résulte d'ailleurs immédiatement de mon lemme II des Fund. Math. **30** (1938), p. 5. En effet, d'après ce lemme, si E est un ensemble (infini) linéaire quelconque, il existe une famille dénombrable Φ de sous-ensembles de E telle que tout sous-ensemble H de E qui est à la fois un F_σ et un G_δ relativement à E est de la forme $H=\lim_{n=\infty} E_n$ où $E_n\epsilon\Phi$ pour $n=1,2,\ldots$

Or, si un ensemble linéaire E de puissance du continu jouit de la propriété λ, alors (par définition de cette propriété) tout sous-ensemble dénombrable de E est non seulement un F_σ, mais aussi un G_δ relativement à E. Il résulte donc de mon lemme l'existence d'une base dénombrable pour les sous-ensembles dénombrables de E, et il est évident que s'il existe une base dénombrable pour les sous-ensembles dénombrables d'un *certain* ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$, il en existe aussi pour les sous-ensembles dénombrables de *chaque* ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$, en particulier pour les ensembles dénombrables linéaires.

Le but de cette Note est de démontrer (également sans faire appel à l'hypothèse du continu) la réciproque de la proposition de M. Mazur.

[1]) c. à d. tel que chacun de ses sous-ensembles dénombrables est un G_δ relativement à lui.

[2]) S. Mazur, C. R. Soc. Sc. Lett. Varsovie **31** (séance du 18 octobre 1938).

Admettons à ce but qu'il existe pour les ensembles linéaires dénombrables une base dénombrable $\Phi=(E_1, E_2,\dots)$ formée d'ensembles linéaires. Désignons pour $n=1,2,\dots$ par $f_n(x)$ la fonction définie pour x réels par les conditions:

$$(1) \qquad f_n(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x \in E_n\\ 0 \text{ si } x \text{ non} \in E_n,\end{cases}$$

et posons pour x réels

$$(2) \qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot 3^{-n} f_n(x).$$

Soit X l'ensemble de tous les nombres réels. Je dis que l'ensemble $H=f(X)$ est de puissance $2^{\aleph_0}$ et jouit de la propriété λ.

Je vais prouver d'abord que si x et x' sont deux nombres réels différents, on a $f(x)\neq f(x')$.

Soient donc $x<x'$ et $D=\{x-k\}_{k=0,1,2,\dots}$. $\Phi=(E_1,E_2,\dots)$ étant une base pour les ensembles linéaires dénombrables, il existe une suite infinie d'indices $\{n_k\}$ telle que $D=\lim\limits_{k=\infty} E_{n_k}$. Or, on a $x \in D$ et x' *non* $\in D$; il existe donc un indice n_p tel que $x \in E_{n_p}$ et x' *non* $\in E_{n_p}$, d'où selon (1) $f_{n_p}(x)=1$ et $f_{n_p}(x')=0$, ce qui donne sans peine d'après (2) $f(x)\neq f(x')$.

La fonction f transforme donc d'une façon biunivoque l'ensemble X en l'ensemble $H=f(X)$. On a par conséquent $\overline{\overline{H}}=\overline{\overline{X}}=2^{\aleph_0}$.

Soit maintenant Q un sous-ensemble dénombrable de H. Comme $Q\subset H=f(X)$, il existe un ensemble dénombrable $K\subset X$ tel que $Q=f(K)$. Φ étant une base, il existe une suite infinie de nombres naturels $m_1, m_2,\dots$ telle que $K=\lim\limits_{k=\infty} E_{m_k}$, d'où, la fonction f étant à valeurs distinctes:

$$Q=f(K)=f(\lim_{k=\infty} E_{m_k})=\lim_{k=\infty} f(E_{m_k}),$$

donc, à plus forte raison:

$$(3) \quad Q=[f(E_{m_1})+f(E_{m_2})+f(E_{m_3})+\dots][f(E_{m_2})+f(E_{m_3})+\dots][f(E_{m_3})+\dots]\dots$$

Or, pour tout k naturel donné, l'ensemble $f(E_k)$ est ouvert dans $H=f(X)$, puisque $f(E_k)$ est d'après (2) l'ensemble de tous les nombres de H dont le développement en fraction ternaire a 2 pour k-ième chiffre, et on voit facilement qu'un tel ensemble est ouvert dans H. Il résulte donc de (3) que Q est un G_δ relativement à H.

Ainsi, tout sous-ensemble dénombrable de H est un G_δ relativement à H, c.à d. H jouit de la propriété λ, c.q.f.d.

Vu le résultat de M. **Mazur** le théorème suivant se trouve établi sans faire appel à l'hypothèse du continu:

Théorème. *Pour qu'il existe une base dénombrable pour les ensembles dénombrables linéaires, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble linéaire de puissance du continu jouissant de la propriété λ.*

Cependant reste ouvert le problème $\boldsymbol{P}$ de l'existence d'une base dénombrable pour toute famille de puissance du continu d'ensembles **linéaires** et, en particulier, pour la famille de tous les ensembles linéaires F_σ [1]).

Or, je vais construire une famille Ψ de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles (**non linéaires**) dépourvue d'une base dénombrable.

Etant donné un nombre réel t, désignons par E_t l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ de variable réelle ne prenant que les valeurs 0 et 1 et telles que $f(t)=1$. Soit Ψ la famille de tous les ensembles E_t où $t\in X$.

C'est évidemment une famille d'ensembles qui est de puissance $2^{\aleph_0}$. Pour montrer qu'elle est dépourvue d'une base dénombrable, supposons que $\Phi=(H_1,H_2,\dots)$ soit une base pour Ψ. Soit $f(x)$ une fonction quelconque (d'une variable réelle) qui ne prend que les valeurs 0 et 1. Soient $H_{n_1(f)}, H_{n_2(f)},\dots$ tous les termes consécutifs de la suite H_n $(n=1,2,\dots)$ tels que $f\in H_n$.

Je dis que si $f\neq g$, où $f\in\Psi$ et $g\in\Psi$, les suites $n_1(f), n_2(f),\dots$ et $n_1(g), n_2(g),\dots$ sont distinctes. En effet, si l'on a $f\neq g$, il existe un nombre réel t pour lequel $f(t)\neq g(t)$, p. ex. $f(t)=1$ et $g(t)=0$, et on a:

$$(4) \qquad f\in E_t, \qquad g \text{ non} \in E_t.$$

Or, Φ étant une base pour la famille Ψ, il existe une suite infinie d'indices $\{m_k\}$ telle que $E_t=\lim\limits_{k=\infty} H_{m_k}$. D'après (4), il existe donc un indice p tel que $f\in H_p$ et g *non* $\in H_p$; le nombre p est alors un terme de la suite $n_1(f), n_2(f),\dots$ sans être un terme de la suite $n_1(g), n_2(g),\dots$ Ces suites sont donc différentes.

L'ensemble S de toutes les suites infinies (ou finies) de nombres naturels étant de puissance $2^{\aleph_0}$, tandis que l'ensemble F de toutes les fonctions d'une variable réelle qui ne prennent comme valeurs que 0 et 1 est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}>2^{\aleph_0}$, il n'existe aucune correspondance faisant correspondre à toute fonction f de F une suite $s(f)$ de S de façon à avoir $s(f)\neq s(g)$ pour $f\neq g$. L'hypothèse que la famille Ψ possède une base dénombrable implique donc une contradiction.

[1]) C'est un problème de M. E. **Szpilrajn**. Un problème analogue a été résolu positivement pour la famille de tous les ensembles linéaires qui sont à la fois des F_σ et des G_δ (voir mon lemme précité).