Sur C_k, on a

$$\chi_{k-1,k}-\chi_{k,k+1}=m(\varphi_{k-1,k}-\varphi_{k,k+1})+n(\psi_{k-1,k}-\psi_{k,k+1})+p_{k-1}-p_k=$$
$$=ma_k+nb_k+p_{k-1}-p_k=0.$$

Il existe par conséquent [1] une fonction $\chi\in\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ telle que

$$\chi|C_k+C_{k+1}=\chi_{k,k+1}.$$

Comme $e_{\chi_{k,k+1}}=e_{m\varphi_{k,k+1}}\cdot e_{n\psi_{k,k+1}}\cdot e_{p_k}=f^m\cdot g^n$ sur C_k+C_{k+1}, il vient $f^m\cdot g^n=e_\chi$ (sur $\mathfrak{X}$), donc $f^m\cdot g^n\sim 1$.

En particulier [2]

(31) *si* $C_0\cdot C_1\cdot C_2\neq 0$, *on a* $f\sim 1$ [3].

Posons, en effet, $x_0\in C_0\cdot C_1\cdot C_2$. On parvient (dans le raisonnement précédent) aux trois égalités: $\varphi_{k-1,k}(x_0)-\varphi_{k,k+1}(x_0)=a_k$, $k=0,1,2$; en les ajoutant, on a $a_0+a_1+a_2=0$. Donc, en posant $g=1$ et $m=1$, le système d'équations (†) (où $m=1$ et $b_k=0$) se laisse résoudre; il a, en effet, pour racines: $p_0=0$, $p_1=a_1$ et $p_2=-a_0$. En définissant la fonction χ comme auparavant (c. à d. que $\chi_{k,k+1}=\varphi_{k,k+1}+p_k$), il vient $f=e_\chi$, c. q. f. d.

Remarque [4]. Les théorèmes (30) et (31) impliquent que C_0, C_1 et C_2 étant trois sous-ensembles connexes de la surface sphérique $\mathcal{S}_2$ et x_0, x_1 et x_2 trois points de $\mathcal{S}_2$ tels qu'aucun C_k+C_l ne coupe $\mathcal{S}_2$ entre aucun couple de ces points, $C_0+C_1+C_2$ ne coupe pas $\mathcal{S}_2$ entre au moins un de ces couples. Il ne le coupe entre aucun de ces couples si $C_0\cdot C_1\cdot C_2\neq 0$.

---

[1]) Car, d'une façon générale, étant donnés trois ensembles C_k $(k=0,1,2)$ et trois fonctions $f_{k,k+1}\in\mathcal{Y}^{C_k+C_{k+1}}$ telles que $f_{k-1,k}|C_k=f_{k,k+1}|C_k$, il existe une fonction $f\in\mathcal{Y}^{C_0+C_1+C_2}$ telle que $f|C_k+C_{k+1}=f_{k,k+1}$.

[2]) S. Eilenberg, l. c., p. 79.

[3]) C. à d. le groupe $\mathfrak{B}_1(C_0,C_1,C_2)$ se réduit à l'élément neutre.

[4]) Cf. ibid. et E. Čech, Publ. Univ. Masaryk (1931), p. 20, ma note *Théorème sur trois continus*, Monatsh. f. Math. u. Ph. **36** (1929), p. 77.

Sur les transformations continues des courbes.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

1. Notations et terminologie. J'appelle *courbe* un continu de dimension 1.

Je désigne par E un espace arbitraire métrique et compact et par R_2 le plan euclidien. A désignant un sous-ensemble fermé de E, resp. un sous-ensemble fermé et borné de R_2, je désigne par R_2^A l'espace des fonctions continues transformant A en sous-ensembles de R_2, par 2^A l'espace des sous-ensembles fermés de A, par $\Gamma(A)$ l'espace des sous-ensembles fermés et connexes de A et par $\Gamma_1(A)$ l'espace des courbes situées dans A. Je désigne respectivement par ϱ et δ la distance et le diamètre dans E, R_2, R_2^E et par ϱ_1 la distance dans 2^E (donc aussi dans $\Gamma(E)$ et $\Gamma_1(E)$).

$A\times B$ désignera le produit cartésien des ensembles A et B. Pour $A\in 2^E$ et $0<\lambda<\mu$, je désigne par $U(A,\lambda)$ l'ensemble des points $u\in E$ tels que $\varrho(u,A)<\lambda$; par $V(A,\lambda,\mu)$ l'ensemble des points $u\in E$ tels que $\lambda<\varrho(u,A)<\mu$.

Je dis qu'un continu $C\in\Gamma(E)$ *traverse* $V(A,\lambda,\mu)$ si l'on a

$$C[U(A,\mu)-V(A,\lambda,\mu)]\neq 0\neq C[E-U(A,\mu)]$$

et que C *traverse* $V(A,\lambda,\mu)$ *intérieurement* si l'on a en outre:

$$C\subset\overline{V(A,\lambda,\mu)}.$$

Pour $z_1,z_2\in R_2$, je désigne par $I(z_1,z_2)$ le segment rectiligne aux extrémités z_1 et z_2.

Je pose pour $A\in 2^E$

$$d_1(A)=\max\delta(C)\quad\text{où}\quad C\in\Gamma(A);$$

évidemment $d_1(A)$ est la constante d'Urysohn de A, correspondant à la dimension 1 [1].

---

[1]) P. Urysohn, Fund. Math. **8**, p. 352-353.

2. Le but de cette note est de démontrer les deux théorèmes suivants:

Théorème I [2]). *C étant une courbe, l'ensemble des transformations $f \epsilon R_2^C$ telles que $f(C)$ est un continu péanien homéomorphe à la courbe universelle de M. Sierpiński est résiduel dans R_2^C.*

Théorème II. *Si l'espace E contient une courbe* [3]), *l'ensemble des couples $(C,f) \epsilon \Gamma_1(E) \times R_2^E$ tels que $f(C)$ est un continu péanien homéomorphe à la courbe universelle de M. Sierpiński est résiduel dans $\Gamma_1(E) \times R_2^E$.*

3. *Lemme 1.* *Soient: $A_1, A_2, \ldots, A_k \epsilon 2^E$, $\dim A_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, k$ et $\beta > 0$. Il existe alors k ensembles disjoints $P_j \epsilon 2^{A_j}$, de dimension 0 et tels que les conditions $C \epsilon \Gamma(A_j)$ et $\delta(C) \geqslant \beta$ entraînent $CP_j \neq 0$.*

Pour $k=1$, ce lemme est une conséquence immédiate du „Zerlegungssatz" de M. Menger [4]). Admettons qu'il est vrai pour tout système de k ensembles fermés et supposons donné un système de $k+1$ ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ où $P_1, \ldots, P_k$ satisfont aux conditions du lemme par rapport au système $A_1, \ldots, A_k$. Posons $P = \sum_{j=1}^{k} P_j$; alors $\dim P = 0$, donc $d_1(P) = 0$, donc $d_1\left(\overline{U(P,\lambda)}\right) < \beta$ pour un $\lambda > 0$ suffisamment petit [5]). Comme $\dim A_{k+1} = 1$, il existe un ensemble V ouvert dans E, tel que $P \subset V \subset U(P,\lambda)$ et $\dim \overline{V}(A_{k+1} - V) = 0$. Posons $B_{k+1} = A_{k+1} - V$ et $Q_1 = \overline{V} B_{k+1}$. Le lemme étant vrai pour $k=1$, il existe un ensemble $Q_2 \epsilon 2^{B_{k+1}}$ tel que $\dim Q_2 = 0$ et que les conditions $C \epsilon \Gamma(B_{k+1})$, $\delta(C) \geqslant \beta$ entraînent $CQ_2 \neq 0$. Posons $P_{k+1} = Q_1 + Q_2$; on aura:

(3.1) $$P_{k+1} \epsilon 2^{A_{k+1}}, \qquad \dim P_{k+1} = 0, \qquad PP_{k+1} = 0.$$

Soit maintenant

(3.2) $$C \epsilon \Gamma(A_{k+1}), \qquad \delta(C) \geqslant \beta.$$

[2]) Ce théorème généralise certains résultats obtenus par M. V. Jarnik (Monatsh. Math. Phys. **41**, p. 408-423) et par moi (Fund. Math. **25**, p. 253-260).

[3]) On ne sait pas si tout espace métrique compact contient une courbe; c'est certainement le cas pour les espaces de dimension finie. Si $\Gamma_1(E) \neq 0$, alors $\Gamma_1(E)$ est un G_δ dans $\Gamma(E)$, donc un espace qui n'est pas de première catégorie sur lui même.

[4]) Cf. K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 156.

[5]) P. Urysohn, l. c., p. 354-355.

On a $d_1(\overline{V}) < \delta(C)$, donc $C - V \neq 0$, donc l'une au moins des deux relations:

(3.3) $$C \epsilon \Gamma(B_{k+1}),$$

(3.4) $$CB_{k+1} \neq 0 \neq CV.$$

Dans le cas (3.3), on a $CQ_2 \neq 0$, donc $CP_{k+1} \neq 0$. Dans le cas (3.4), on a $CQ_1 \neq 0$, donc $CP_{k+1} \neq 0$. Par conséquent, les relations (3.2) entraînent $CP_{k+1} \neq 0$. On voit que les ensembles $P_1, \ldots, P_k, P_{k+1}$ satisfont à la thèse du lemme, qui se trouve ainsi démontré par induction.

4. *Lemme 2* [6]). *Soient $I_1, I_2, \ldots, I_m \subset R_2$ des segments de droite tels que, pour $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $I_j I_{j+1}$ se réduit à un seul point, intérieur à I_j et I_{j+1}. Il existe alors un nombre $\gamma > 0$ tel que, pour $j = 1, 2, \ldots, m$, les relations:*

$$C_j \epsilon \Gamma(E), \qquad f, g \epsilon R_2^E, \qquad f(C_j) = I_j, \qquad \varrho(f,g) < \gamma$$

entraînent

$$g(C_j) \cdot g(C_{j+1}) \neq 0.$$

5. *Lemme 3.* *Soit $A \epsilon 2^E$ et $0 < \lambda < \mu$. Tout continu qui traverse $V(A,\lambda,\mu)$ contient un sous-continu qui traverse $V(A,\lambda,\mu)$ intérieurement.*

La démonstration résulte facilement d'un lemme bien connu de Janiszewski [7]).

6. *Lemme 4.* *Soient $A \epsilon 2^E$, $0 < \lambda < \mu$, $C_0 \epsilon \Gamma(E)$, $\eta > 0$ et $P \epsilon 2^{C_0}$. Supposons que tout constituant de l'ensemble $C_0 \overline{U(A,\mu)}$ qui traverse $V(A,\lambda,\mu)$ a un point commun avec P. Alors il existe un nombre $\beta > 0$ tel que, pour $C \epsilon \Gamma(E)$ avec $\varrho_1(C, C_0) < \beta$, tout constituant de $C \overline{U(A,\mu)}$ qui traverse $V(A,\lambda,\mu)$ a un point commun avec $U(P,\eta)$.*

J'omets la démonstration, qui ne présente aucune difficulté.

7. Pour n entier positif, désignons par $\mathfrak{A}_n$ *l'ensemble des couples $(C,f) \epsilon \Gamma(E) \times R_2^E$ pour lesquels $f(C)$ est la somme d'un nombre fini de continus de diamètre $< 1/n$.*

[6]) Pour la démonstration voir V. Jarnik, l. c., p. 418.

[7]) S. Janiszewski, *Thèse* (1911), Journ. Ec. Polyt. (II) **16**, p. 22.

***Lemme* 5.** *Soient* $(C_0,f_0)\in\Gamma_1(E)\times R_2^E$ *et* $\eta>0$. *Il existe un* $f_1\in R_2^E$ *et deux nombres positifs* β_1, γ_1 *tels que* $\varrho(f_0,f_1)<\eta$ *et que les relations:*

$$(C,g)\in\Gamma(E)\times R_2^E,\qquad \varrho_1(C_0,C)<\beta_1,\qquad \varrho(f_1,g)<\gamma_1$$

entraînent

$$(C,g)\in\mathfrak{A}_n.$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que

$$\eta<1/3n. \tag{7.1}$$

Comme $C_0\in\Gamma_1(E)$, on a $\delta(C_0)>0$. La fonction f_0 étant continue, nous pouvons déterminer un $\alpha_0>0$ tel que:

$$6\alpha_0<\delta(C_0), \tag{7.2}$$

$$\delta\big[f_0\big(\overline{U(x,3\alpha_0)}\big)\big]<\tfrac{1}{2}\eta \quad \text{pour tout } x\in E. \tag{7.3}$$

D'après le théorème de Heine-Borel, il existe une suite finie $x_1,x_2,\dots,x_k\in C_0$ telle que

$$C_0\subset\sum_{j=1}^{k}U(x_j,\alpha_0). \tag{7.4}$$

Désignons par A_j l'ensemble-somme de tous les constituants de $C_0\overline{U(x_j,2\alpha_0)}$ qui traversent $V(x_j,\alpha_0,2\alpha_0)$. Il résulte de (7.2) et du lemme précité de Janiszewski que $C_0U(x_j,\alpha_0)\subset A_j$, donc, d'après (7.4), $C_0=\sum_{j=1}^{k}A_j$. D'après **3**, il existe un système d'ensembles disjoints $P_j\in 2^{A_j}$ où $j=1,2,\dots,k$, tel que $\dim P_j=0$ et que les relations $D\in\Gamma(A_j)$, $\delta(D)\geqslant\alpha_0$ entraînent $DP_j\neq 0$. Tout constituant de A_j traverse $V(x_j,\alpha_0,2\alpha_0)$, son diamètre dépasse donc α_0, de sorte qu'il a un point commun avec P_j.

Soit α_1 un nombre positif tel que les ensembles fermés $\overline{U(P_j,5\alpha_1)}$, où $j=1,2,\dots,k$, soient disjoints et que l'on ait

$$d_1\big(\overline{U(P_j,5\alpha_1)}\big)<\alpha_0>5\alpha_1. \tag{7.5}$$

Posons pour $j=1,2,\dots,k$:

$$f_0(x_j)=z_j,$$

$$a_j=z_j-\frac{1}{2}\eta,\quad b_j=z_j+\frac{1}{2}\eta,\qquad c_j=z_j-\frac{i}{2}\eta,\quad d_l=z_j+\frac{i}{2}\eta$$

et déterminons $f_1\in R_2^E$ par les conditions suivantes:

$$f_1(u)=\begin{cases} a_j & \text{pour}\quad \varrho(u,P_j)<\alpha_1,\\ \dfrac{b_j-a_j}{\alpha_1}[\varrho(u,P_j)-\alpha_1]+a_j & \text{pour}\quad \alpha_1\leqslant\varrho(u,P_j)<2\alpha_1,\\ \dfrac{c_j-b_j}{\alpha_1}[\varrho(u,P_j)-2\alpha_1]+b_j & \text{pour}\quad 2\alpha_1\leqslant\varrho(u,P_j)<3\alpha_1,\\ \dfrac{d_j-c_j}{\alpha_1}[\varrho(u,P_j)-3\alpha_1]+c_j & \text{pour}\quad 3\alpha_1\leqslant\varrho(u,P_j)<4\alpha_1,\\ \dfrac{f_0(u)-d_j}{\alpha_1}[\varrho(u,P_j)-4\alpha_1]+d_j & \text{pour}\quad 4\alpha_1\leqslant\varrho(u,P_j)<5\alpha_1,\\ f_0(u) & \text{pour}\quad u\in E-\sum_{j=1}^{k}U(P_j,5\alpha_1). \end{cases} \tag{7.6}$$

On vérifie sans peine que cette détermination est univoque et que la fonction f_1 est continue.

Si $f_0(u)\neq f_1(u)$, on a $u\in U(P_j,5\alpha_1)$ pour un indice j. Comme $P_j\subset A_j\subset\overline{U(x_j,2\alpha_0)}$, donc, en vertu de (7.5), $U(P_j,5\alpha_1)\subset U(x_j,3\alpha_0)$, on a $u\in U(x_j,3\alpha_0)$, donc, en vertu de (7.3), $\varrho(f_0(u),z_j)<\frac{1}{2}\eta$. D'autre part, la distance entre z_j et chacun des points $a_j,b_j,c_j,d_j,f_0(u)$ ne dépassant pas $\frac{1}{2}\eta$, et $f_1(u)$ étant situé sur un segment de droite réunissant deux de ces points, on a $\varrho(f_1(u),z_j)\leqslant\frac{1}{2}\eta$, d'où

$$\varrho(f_0,f_1)<\eta. \tag{7.7}$$

D'après **4**, nous pouvons déterminer un nombre $\gamma_0>0$ tel que pour $j=1,2,\dots,k$ les relations: $C',C''\in\Gamma(E)$, $f,g\in R_2^E$, $\varrho(f,g)<\gamma_0$, $f(C')=I(a_j,b_j)$ et $f(C'')=I(c_j,d_j)$ entraînent $g(C')\cdot g(C'')\neq 0$. Soit

$$\gamma_1=\min(\gamma_0,\tfrac{1}{4}\eta). \tag{7.8}$$

D'après (7.4), nous pouvons déterminer un nombre $\alpha_2>0$ tel que

$$U(C_0,\alpha_2)\subset\sum_{j=1}^{k}U(x_j,\alpha_0). \tag{7.9}$$

D'après **6**, nous pouvons déterminer un nombre $\alpha_3>0$ tel que, pour $C\in\Gamma(E)$ avec $\varrho_1(C,C_0)<\alpha_3$, tout constituant de $C\overline{U(x_j,2\alpha_0)}$ qui traverse $V(x_j,\alpha_0,2\alpha_0)$ admette un point commun avec $U(P_j,\alpha_1)$ où $j=1,2,\dots,k$.

Posons

(7.10) $$\beta_1 = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

et soit:

(7.11) $$(C,g)\,\epsilon\,\Gamma(E)\times R_2^E, \qquad \varrho_1(C,C_0)<\beta_1, \quad \varrho(f_1,g)<\gamma_1.$$

D'après (7.9) et (7.10), on a $C\subset\sum_{j=1}^{k}U(x_j,\alpha_0)$, donc

(7.12) $$C=\sum_{j=1}^{k} C\overline{U(x_j,\alpha_0)}.$$

Désignons par $A_j(C)$ l'ensemble-somme de tous les constituants de $C\overline{U(x_j,2\alpha_0)}$ qui traversent $V(x_j,\alpha_0,2\alpha_0)$. D'après (7.5) et (7.10), on a $\beta_1<\alpha_0$; d'autre part $x_j\,\epsilon\,C_0$, donc $CU(x_j,\alpha_0)\neq 0$. D'après (7.2) et (7.10), on a de plus $\delta(C)\geqslant\delta(C_0)-2\varrho_1(C,C_0)>4\alpha_0=\delta\left(\overline{U(x_j,2\alpha_0)}\right)$, d'où $C-U(x_j,2\alpha_0)\neq 0$. Il en résulte d'après le lemme cité de Janiszewski que $C\overline{U(x_j,\alpha_0)}\subset A_j(C)$, donc selon (7.12):

(7.13) $$C=\sum_{j=1}^{k}A_j(C), \qquad A_j(C)\neq 0,$$

(7.14) $$g(C)=\sum_{j=1}^{k}g\left(A_j(C)\right).$$

On a d'après (7.1), (7.3), (7.7), (7.8) et (7.11):

(7.15) $$\delta\left(g\left(A_j(C)\right)\right)\leqslant\delta\left[g\left(\overline{U(x_j,2\alpha_0)}\right)\right]\leqslant$$
$$\leqslant\delta\left[g\left(\overline{U(x_j,3\alpha_0)}\right)\right]\leqslant\delta\left[f_0\left(\overline{U(x_j,3\alpha_0)}\right)\right]+2\varrho(f_0,f_1)+2\varrho(f_1,g)<$$
$$<\tfrac{1}{2}\eta+2\eta+\tfrac{1}{2}\eta=3\eta<1/n.$$

Soit maintenant M un constituant de $A_j(C)$. M traverse $V(x_j,\alpha_0,2\alpha_0)$, donc $\delta(M)\geqslant\alpha_0$. Il en résulte d'après (7.5) que $M-U(P_j,5\alpha_1)\neq 0$. D'autre part, on a $MU(P_j,\alpha_1)\neq 0$ en vertu de (7.10), (7.11) et la définition de α_3. M traverse donc $V(P_j,\alpha_1,2\alpha_1)$ et $V(P_j,3\alpha_1,4\alpha_1)$; d'après **5**, M contient par conséquent: un continu C' qui traverse intérieurement $V(P_j,\alpha_1,2\alpha_1)$ et un continu C'' qui traverse intérieurement $V(P_j,3\alpha_1,4\alpha_1)$. On a donc selon (7.6):

$$f_1(C')=I(a_j,b_j), \qquad f_1(C'')=I(c_j,d_j).$$

Considérons deux constituants M_1 et M_2 de $A_j(C)$. M_1 contient un continu C_1' et M_2 un continu C_2' tels que $f_1(C')=I(a_j,b_j)$ et $f_1(C_2'')=I(c_j,d_j)$. En vertu de (7.8), (7.11) et de la définition de γ_0, il en résulte que $g(C_1')\cdot g(C_2'')\neq 0$, d'où $g(M_1)\cdot g(M_2)\neq 0$. Donc $g(A_j(C))$ est un continu et, d'après (7.15), la décomposition (7.14) est une décomposition de $g(C)$ en un nombre fini de continus de diamètre $<1/n$. Par suite, les relations (7.11) entraînent $(C,g)\,\epsilon\,\mathfrak{A}_n$ et le lemme 5 est démontré.

8. Posons:

$$\mathfrak{A}_n^{(1)}=\mathfrak{A}_n[\Gamma_1(E)\times R_2^E], \qquad \mathfrak{A}^{(1)}=\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n^{(1)}.$$

D'après le lemme 5, $\mathfrak{A}_n^{(1)}$ contient un sous-ensemble dense et ouvert dans $\Gamma_1(E)\times R_2^E$, de sorte que $\mathfrak{A}^{(1)}$ est résiduel dans $\Gamma_1(E)\times R_2^E$. D'autre part, si $(C,g)\,\epsilon\,\mathfrak{A}^{(1)}$, alors $g(C)$ possède la propriété (S); c'est donc un continu péanien.

On obtient ainsi une partie du théorème II.

9. Soit maintenant C une courbe. Désignons par Ψ_n l'ensemble des transformations $f\,\epsilon\,R_2^C$ telles que $f(C)$ est la somme d'un nombre fini de continus de diamètre $<1/n$. En posant $E=C$ dans le lemme 5, on obtient l'énoncé suivant: *si $f_0\,\epsilon\,R_2^C$ et $\eta>0$, il existe un $f_1\,\epsilon\,R_2^C$ et un nombre $\gamma'>0$ tels que $\varrho(f_1,f_0)<\eta$ et que l'inégalité $\varrho(f_1,g)<\gamma'$ entraîne $g\,\epsilon\,\Psi_n$*. Donc, Ψ_n contient un ensemble ouvert et dense dans R_2^C. L'ensemble $\Psi=\prod_{n=1}^{\infty}\Psi_n$ est l'ensemble des fonctions $f\,\epsilon\,R_2^C$ qui transforment C en continus péaniens et il est résiduel dans R_2^C.

On a ainsi une partie du théorème I.

10. Désignons par $\mathfrak{B}_n$ *l'ensemble des couples $(C,f)\,\epsilon\,\Gamma(E)\times R_2^E$ satisfaisant à la condition suivante: à tout $K\,\epsilon\,\Gamma(f(C))$ on peut faire correspondre un couple $K_1,K_2\,\epsilon\,\Gamma(f(C))$ de manière que $K_1K_2=0$ et $\varrho_1(K,K_p)<1/n$ pour $p=1,2$.*

Lemme 6. *Soient $(C_0,f_0)\,\epsilon\,\Gamma(E)\times R_2^E$, $\delta(C_0)>0$ et $\eta>0$. Il existe un $f_2\,\epsilon\,R_2^E$ et deux nombres $\beta_2,\gamma_2>0$ tels que $\varrho(f_0,f_2)<\eta$ et que les conditions:*

$$(C,g)\,\epsilon\,\Gamma(E)\times R_2^E, \qquad \varrho_1(C_0,C)<\beta_2, \qquad \varrho(f_2,g)<\gamma_2$$

entraînent

$$(C,g)\,\epsilon\,\mathfrak{B}_n.$$

L'espace $\Gamma(f_0(C_0))$ étant métrique et compact, nous pouvons déterminer une suite finie $L_1, L_2, \ldots, L_k \in \Gamma(f_0(C_0))$ telle que l'on ait pour tout $L \in \Gamma(f_0(C_0))$

$$(10.1) \qquad \min \varrho_1(L, L_j) < 1/4n \qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

On vérifie aisément la relation $\overline{\lim\limits_{(C,f)\to(C_0,f_0)}} \Gamma(f(C)) \subset \Gamma(f_0(C_0))$. On peut donc déterminer deux nombres positifs β_3 et γ_3 tels que les relations $M \in \Gamma(f(C))$, $\varrho_1(C, C_0) < \beta_3$ et $\varrho(f_0, f) < \gamma_3$ entraînent

$$(10.2) \qquad \min \varrho_1(M, L_j) < 1/4n \qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que

$$(10.3) \qquad \eta < \min(1/4n, \gamma_3/2).$$

A chaque $j=1,2,\ldots,k$, faisons correspondre [8] deux suites $\{I_{j,s}^{(1)}\}$, $\{I_{j,s}^{(2)}\}$ $(s=1,2,\ldots,s_j)$ de segments rectilignes situés dans R_2 et possédant les propriétés suivantes:

(I) $I_{j,s}^{(r)} I_{j,s+1}^{(r)}$ se réduit à un seul point intérieur aux segments $I_{j,s}^{(r)}$ et $I_{j,s+1}^{(r)}$ $(r=1,2;\ s=1,2,\ldots,s_j-1)$;

(II) en posant $N_j^{(r)} = \sum\limits_{s=1}^{s_j} I_{j,s}^{(r)}$, on a $N_j^{(1)} N_j^{(2)} = 0$;

(III) on a les inégalités:

$$(10.4) \qquad \delta(I_{j,s}^{(r)}) < \tfrac{1}{3}\eta,$$

$$(10.5) \qquad \varrho_1(L_j, N_j^{(r)}) < \tfrac{1}{3}\eta \qquad (j=1,2,\ldots,k,\ s=1,2,\ldots,s_j;\ r=1,2).$$

Comme $\delta(C_0) > 0$, C_0 est dense en soi. En vertu de (10.5) on peut donc déterminer $2\sum\limits_{j=1}^{k} s_j$ points *différents* $w_{j,s}^{(r)} \in C_0$ tels que

$$(10.6) \qquad \varrho(I_{j,s}^{(r)}, f_0(w_{j,s}^{(r)})) < \tfrac{1}{3}\eta.$$

Les points $w_{j,s}^{(r)}$ étant différents, nous pouvons déterminer un nombre $\beta_4 > 0$ tel que les $2\sum\limits_{j=1}^{k} s_j$ ensembles $\overline{U(w_{j,s}^{(r)}, 3\beta_4)}$ soient disjoints et que l'on ait

$$(10.7) \qquad \delta\left[f_0\left(\overline{U(w_{j,s}^{(r)}, 3\beta_4)}\right)\right] < \tfrac{1}{3}\eta.$$

[8]) Cf. Fund. Math. **25**, p. 254-257.

Désignons par $y_{j,s}^{(r)}$ et $z_{j,s}^{(r)}$ les extrémités de $I_{j,s}^{(r)}$ et déterminons $f_2 \in R_2^E$ par les conditions suivantes (où $j=1,2,\ldots,k$; $s=1,2,\ldots,s_j$ et $r=1,2$):

$$(10.8) \qquad f_2(u) = \begin{cases} y_{j,s}^{(r)} & \text{pour } \varrho(u, w_{j,s}^{(r)}) < \beta_4, \\ \dfrac{z_{j,s}^{(r)} - y_{j,s}^{(r)}}{\beta_4}[\varrho(u, w_{j,s}^{(r)}) - \beta_4] + y_{j,s}^{(r)} & \text{pour } \beta_4 \leqslant \varrho(u, w_{j,s}^{(r)}) < 2\beta_4, \\ \dfrac{f_0(u) - z_{j,s}^{(r)}}{\beta_4}[\varrho(u, w_{j,s}^{(r)}) - 2\beta_4] + z_{j,s}^{(r)} & \text{pour } 2\beta_4 \leqslant \varrho(u, w_{j,s}^{(r)}) < 3\beta_4, \\ f_0(u) & \text{pour } u \in E - \sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{s_j}\sum\limits_{r=1}^{2} U(w_{j,s}^{(r)}, 3\beta_4). \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que la détermination de f_2 est univoque et que cette fonction est continue.

Si $f_2(u) \neq f_0(u)$, on a $u \in U(w_{j,s}^{(r)}, 3\beta_4)$ pour un système d'indices j, s, r, donc, d'après (10.7), $\varrho(f_0(w_{j,s}^{(r)}), f_0(u)) < \frac{1}{3}\eta$. D'autre part, la distance entre $f_0(w_{j,s}^{(r)})$ et chacun des points $y_{j,s}^{(r)}, z_{j,s}^{(r)}, f_0(u)$ étant $< \frac{2}{3}\eta$ d'après (10.4) et (10.6), et $f_2(u)$ étant situé sur un segment de droite réunissant deux de ces points, on a $\varrho\big(f_0(w_{j,s}^{(r)}), f_2(u)\big) < \frac{2}{3}\eta$. Il en résulte que $\varrho(f_0(u), f_2(u)) < \eta$, d'où

$$(10.9) \qquad \varrho(f_0, f_2) < \eta.$$

D'après **4**, nous pouvons déterminer un nombre $\gamma_4 > 0$ tel que les conditions $C_{j,s}^{(r)} \in \Gamma(E)$, $f, g \in R_2^E$, $\varrho(f, g) < \gamma_4$ et $f(C_{j,s}^{(r)}) = I_{j,s}^{(r)}$ entraînent $g(C_{j,s}^{(r)}) \cdot g(C_{j,s+1}^{(r)}) \neq 0$ pour $j=1,2,\ldots,k$, $s=1,2,\ldots,s_j-1$ et $r=1,2$. En vertu des relations $N_j^{(1)} \cdot N_j^{(2)} = 0$, le nombre $\gamma_5 = \min \varrho(N_j^{(1)}, N_j^{(2)})$, où $j=1,2,\ldots,k$, est positif. Posons:

$$(10.10) \qquad \beta_2 = \min(\beta_3, \beta_4),$$

$$(10.11) \qquad \gamma_2 = \min(\tfrac{1}{2}\gamma_3, \gamma_4, \tfrac{1}{3}\gamma_5, 1/4n)$$

et soit:

$$(10.12) \qquad (C, g) \in \Gamma(E) \times R_2^E, \quad \varrho_1(C, C_0) < \beta_2, \quad \varrho(f_2, g) < \gamma_2.$$

Considérons un ensemble $M \in \Gamma(g(C))$. D'après (10.3), (10.9), (10.10), (10.11) et (10.12), on a $\varrho_1(C, C_0) < \beta_3$ et $\varrho(f_0, g) < \gamma_3$; selon les définitions de β_3 et γ_3; il existe donc un indice j_1 tel que

$$(10.13) \qquad \varrho_1(M, L_{j_1}) < 1/4n.$$

D'après (10.10) et (10.12), on a $C\,U(w^{(r)}_{j,s},\beta_4)\neq 0$ pour $j=1,2,\dots,k$, $s=1,2,\dots,s_j$ et $r=1,2$. Comme il y a au moins deux points $w^{(r)}_{j,s}$ (à savoir $w^{(1)}_{j_1,1}$ et $w^{(2)}_{j_1,1}$), il en résulte que $C-U(w^{(r)}_{j,s},3\beta_4)\neq 0$. Par conséquent, C traverse $V(w^{(r)}_{j,s},\beta_4,2\beta_4)$, donc, d'après **5**, contient un continu $C^{(r)}_{j,s}$ qui traverse $V(w^{(r)}_{j,s},\beta_4,2\beta_4)$ intérieurement. D'après (10.8) on a $f_2(C^{(r)}_{j,s})=I^{(r)}_{j,s}$. Posons:

$$K_r=\sum_{s=1}^{s_{j_1}} g(C^{(r)}_{j_1,s}). \tag{10.14}$$

On a d'après (10.11), (10.12) et la définition de γ_4

$$g(C^{(r)}_{j_1,s})\, g(C^{(r)}_{j_1,s+1})\neq 0 \qquad (s=1,2,\dots,s_{j_1}-1,\ r=1,2). \tag{10.15}$$

K_1 et K_2 sont donc des continus contenus dans $g(C)$. D'après (10.11), (10.12), (10.14) et la définition de γ_5, on a

$$\varrho(K_1,K_2)\geqslant\varrho(N^{(1)}_{j_1},N^{(2)}_{j_1})-2\varrho(f_2,g)>\tfrac{1}{3}\gamma_5>0, \tag{10.16}$$

d'où $K_1K_2=0$.

Enfin, on a d'après (10.3), (10.5), (10.11) (10.12) et (10.13) pour $r=1,0$:

$$\begin{aligned}\varrho_1(K_r,M)&\leqslant\varrho_1(K_r,N^{(r)}_{j_1})+\varrho_1(N^{(r)}_{j_1},L_{j_1})+\varrho_1(L_{j_1},M)\leqslant\\&\leqslant\varrho(f_2,g)+1/4n+1/4n<1/n.\end{aligned} \tag{10.17}$$

Donc $(C,g)\,\epsilon\,\mathfrak{B}_n$ et le lemme 6 est démontré.

11. Posons $\mathfrak{B}^{(1)}_n=\mathfrak{B}_n[\Gamma_1(E)\times R_2^E]$ et $\mathfrak{B}^{(1)}=\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{B}^{(1)}_n$. D'après le lemme 6, $\mathfrak{B}^{(1)}$ est résiduel dans $\Gamma_1(E)\times R_2^E$. Donc, d'après **8**, *l'ensemble* $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{B}^{(1)}$ *est résiduel dans* $\Gamma_1(E)\times R_2^E$.

Je dis que *si* $(C,g)\,\epsilon\,\mathfrak{G}$, *alors* $g(C)$ *est un continu péanien qui n'est décomposé localement par aucun de ses points.*

En effet, supposons que le point z_0 décompose localement $g(C)$ pour un $(C,g)\,\epsilon\,\mathfrak{G}$. Il existe alors un ensemble $G\subset g(C)$ connexe, ouvert dans $g(C)$ et tel que:

$$G=z_0+G_1+G_2,\qquad G_1\neq 0\neq G_2,\qquad G_1\bar{G}_2+\bar{G}_1G_2=0. \tag{11.1}$$

G_1 et G_2 sont ouverts dans $g(C)$ et $z_0\,\epsilon\,\bar{G}_1\cdot\bar{G}_2$. Le continu $g(C)$ étant péanien, donc localement connexe, on peut déterminer un ensemble H contenant z_0, ouvert dans $g(C)$ et tel que, pour tout couple de points $z',z''\,\epsilon\,H$, il existe un continu $K\subset G$ contenant z' et z''.

On a $HG_1\neq 0\neq HG_2$. Soient: $z_1\,\epsilon\,HG_1$, $z_2\,\epsilon\,HG_2$ et $K_0\subset G$ un continu contenant z_1 et z_2. Soit η le plus petit des trois nombres positifs $\varrho(z_1,g(C)-G_1)$, $\varrho(z_2,g(C)-G_2)$ et $\varrho(K_0,g(C)-G)$. Considérons un entier $m>1/\eta$. Comme $(C,g)\,\epsilon\,\mathfrak{B}_m$, il existe deux ensembles $K_1,K_2\,\epsilon\,\Gamma(g(C))$ tels que $K_1K_2=0$ et $\varrho_1(K_r,K_0)<1/m$ pour $r=1,2$. Comme $z_1,z_2\,\epsilon\,K_0$, on a $\varrho(z_1,K_r)<\eta>\varrho(z_2,K_r)$, d'où $K_rG_q\neq 0$ pour $r,q=1,2$. D'autre part, $K_1,K_2\subset G$ et comme $K_1K_2=0$, l'un de ces ensembles — soit K_1 — ne contient pas z_0. Il en résulte que:

$$\begin{gathered}K_1=K_1G=K_1G_1+K_1G_2,\quad K_1G_1\neq 0,\quad K_1G_2\neq 0,\\ (\overline{K_1G_1})(K_1G_2)+(K_1G_1)(\overline{K_1G_2})=0,\end{gathered} \tag{11.2}$$

ce qui est impossible, K_1 étant connexe.

12. Soit $\{r_n\}$ la suite de tous les points de R_2 à coordonnées rationnelles. Désignons par $\mathfrak{H}_n$ *l'ensemble des couples* $(C,f)\,\epsilon\,\Gamma(E)\times R_2^E$ *tels que* r_n *non* $\epsilon\,f(C)$.

Lemme 7. *Soient* $(C_0,f_0)\,\epsilon\,\Gamma_1(E)\times R_2^E$ *et* $\eta>0$; *il existe alors un* $f_3\,\epsilon\,R_2^E$ *et deux nombres positifs* β_6,γ_6 *tels que* $\varrho(f_3,f_0)<\eta$ *et que les conditions*:

$$\varrho_1(C_0,C)<\beta_6,\qquad \varrho(f_3,g)<\gamma_6$$

entraînent

$$(C,g)\,\epsilon\,\mathfrak{H}_n.$$

W étant un cercle ouvert dans R_2 de centre r_n et de rayon $\mu<\frac{1}{2}\eta$, soit T la circonférence-frontière de W. Posons $D=C_0f_0^{-1}(\overline{W})$. C_0 étant une courbe, on a $\dim D=1$. La transformation f_0 de D est donc inessentielle. Il existe par conséquent une fonction $h\,\epsilon\,\overline{W}^D$ telle que $h(D)\subset T$ et que $h(u)=f_0(u)$ pour $u\,\epsilon\,Df_0^{-1}(T)$. Déterminons maintenant la fonction $f_3\,\epsilon\,R_2^E$ de la manière suivante:

$$f_3(u)=h(u)\qquad\text{pour}\quad u\,\epsilon\,D, \tag{12.1}$$

$$f_3(u)=f_0(u)\qquad\text{pour}\quad u\,\epsilon\,E-f_0^{-1}(W), \tag{12.2}$$

$$f_3(u)\,\epsilon\,\overline{W}\qquad\text{pour}\quad u\,\epsilon\,f_0^{-1}(W)-D, \tag{12.3}$$

$$f_3(u)\quad\text{est continue dans } E. \tag{12.4}$$

Une telle fonction existe, car $\overline{W}$ est un rétracte absolu [9]). On voit que l'on a $f_3(u)\neq f_0(u)$ seulement pour $u\,\epsilon\,f_0^{-1}(W)$, mais on a dans ce cas $f_0(u)\,\epsilon\,\overline{W}$ et $f_3(u)\,\epsilon\,\overline{W}$, donc $\varrho(f_0(u),f_3(u))<2\mu<\eta$, d'où $\varrho(f_0,f_3)<\eta$.

[9]) Voir K. Borsuk, Fund. Math. **17**, p. 160.

D'autre part, $f_3(C_0)W=0$, donc $r_n \, non \in f_3(C_0)$. L'existence des nombres β_6, γ_6 possédant les propriétés réquises s'en obtient par un raisonnement fort simple que j'omets.

13. Posons $\mathfrak{H}_n^{(1)}=\mathfrak{H}_n[\Gamma_1(E)\times R_2^E]$ et $\mathfrak{H}^{(1)}=\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{H}_n^{(1)}$. D'après **12**, $\mathfrak{H}^{(1)}$ est résiduel dans $\Gamma_1(E)\times R_2^E$. D'autre part, si $(C,f)\in\mathfrak{H}^{(1)}$, l'ensemble $f(C)$ ne contient aucun point du plan R_2 à coordonnées rationnelles, d'où $\dim f(C)\leqslant 1$.

14. Soit $\mathfrak{G}^*=\mathfrak{G}\mathfrak{H}^{(1)}$; c'est un ensemble résiduel dans $\Gamma_1(E)\times R_2$. D'autre part, si $(C,f)\in G^*$, l'ensemble $f(C)$ est une courbe péanienne plane, qui n'est décomposée localement par aucun de ses points. C'est donc un continu homéomorphe à la courbe universelle de M. Sierpiński.

Le théorème II est ainsi démontré; un raisonnement analogue à celui de **9** permet d'obtenir le théorème I.

15. Le théorème II peut s'exprimer de la manière suivante: E étant un espace métrique, compact et contenant une courbe, toutes les fonctions $f\in R_2^E$, à l'exception d'un ensemble de première catégorie dans R_2^E, transforment toutes les courbes de E, à l'exception d'un ensemble de première catégorie dans $\Gamma_1(E)$, en des continus péaniens homéomorphes à la courbe universelle de M. Sierpiński.

Warszawa, 16. IX. 1938.

Sur l'existence d'une base dénombrable d'ensembles linéaires dénombrables.

Par

W. Sierpiński (Warszawa).

M. S. Mazur a démontré récemment (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *s'il existe un ensemble linéaire de puissance du continu jouissant de la propriété* λ [1]), *il existe aussi une base dénombrable pour les ensembles linéaires dénombrables*, c. à d. une famille dénombrable Φ d'ensembles linéaires telle que tout ensemble linéaire dénombrable est de la forme $\lim_{n=\infty} E_n$ où $E_n \in \Phi$ pour $n=1,2,\ldots$ [2])

Cette proposition de M. Mazur résulte d'ailleurs immédiatement de mon lemme II des Fund. Math. **30** (1938), p. 5. En effet, d'après ce lemme, si E est un ensemble (infini) linéaire quelconque, il existe une famille dénombrable Φ de sous-ensembles de E telle que tout sous-ensemble H de E qui est à la fois un F_σ et un G_δ relativement à E est de la forme $H=\lim_{n=\infty} E_n$ où $E_n \in \Phi$ pour $n=1,2,\ldots$

Or, si un ensemble linéaire E de puissance du continu jouit de la propriété λ, alors (par définition de cette propriété) tout sous-ensemble dénombrable de E est non seulement un F_σ, mais aussi un G_δ relativement à E. Il résulte donc de mon lemme l'existence d'une base dénombrable pour les sous-ensembles dénombrables de E, et il est évident que s'il existe une base dénombrable pour les sous-ensembles dénombrables d'un *certain* ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$, il en existe aussi pour les sous-ensembles dénombrables de *chaque* ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$, en particulier pour les ensembles dénombrables linéaires.

Le but de cette Note est de démontrer (également sans faire appel à l'hypothèse du continu) la réciproque de la proposition de M. Mazur.

[1]) c. à d. tel que chacun de ses sous-ensembles dénombrables est un G_δ relativement à lui.

[2]) S. Mazur, C. R. Soc. Sc. Lett. Varsovie **31** (séance du 18 octobre 1938).