riable réelle qui converge non uniformément sur tout sous-ensemble indénombrable de E. L'ensemble E étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe une fonction $\varphi(x)$ de variable réelle à valeurs distinctes dont l'ensemble des valeurs (pour x réels) est précisément l'ensemble E. La suite infinie $f_n(\varphi(x))$ $(n=1,2,...)$ est, comme on voit sans peine, non uniformément convergente sur tout ensemble linéaire indénombrable, d'où la proposition $\boldsymbol{Q}$. L'implication $\boldsymbol{P}\rightarrow\boldsymbol{Q}$ se trouve ainsi démontrée.

Sur les espaces des transformations continues en certains groupes abeliens.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Dédié à Monsieur Felix Hausdorff.

$\mathcal{X}$ étant un espace topologique (métrique p. ex.) et $\mathcal{Y}$ un groupe abelien topologique, je désigne par $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ le groupe des transformations continues de $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de $\mathcal{Y}$, l'addition des fonctions-éléments f_1 et f_2 de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ étant définie par la condition: $f_3=f_1+f_2$ lorsque, pour chaque $x\in\mathcal{X}$, $f_3(x)=f_1(x)+f_2(x)$. $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est évidemment un groupe abelien (et la fonction identiquement égale à 0 est son élément neutre).

Nous considérons dans cet ouvrage *deux groupes abeliens topologiques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$* (l'opération du groupe $\mathcal{E}$ étant désignée comme addition et celle du groupe $\mathcal{S}$ comme multiplication) *et une homomorphie continue e transformant $\mathcal{E}$ en $\mathcal{S}$*; de sorte que, pour $t\in\mathcal{E}$, on a $e(t)\in\mathcal{S}$ et qu'à chaque $z\in\mathcal{S}$ correspond un $t\in\mathcal{E}$ tel que $e(t)=z$. Soit $\mathcal{G}$ le *noyau* de cette homomorphie, c. à d. l'ensemble des t tels que $e(t)=1$.

Nous considérons, en outre, un espace $\mathcal{X}$ tel que:

(i) *A étant un sous-ensemble fermé arbitraire de $\mathcal{X}$, chaque fonction $\varphi\in\mathcal{E}^A$ admet une extension $\varphi^*\in\mathcal{E}^{\mathcal{X}}$,*

(ii) *C étant un sous-ensemble connexe arbitraire de $\mathcal{X}$, chaque fonction $d\in\mathcal{G}^C$ est une constante* [1]).

[1]) Ces conditions sont remplies par chaque espace (métrique) $\mathcal{X}$, si $\mathcal{E}$ est un rétracte absolu et $\mathcal{G}$ en est un sous-ensemble isolé.

L'homomorphie e, définie sur $\mathcal{E}$, détermine une homomorphie définie sur $\mathcal{E}^A$; à savoir, à l'élément $\varphi \in \mathcal{E}^A$ vient correspondre l'élément $e_\varphi \in \mathcal{S}^A$ tel que $e_\varphi(x) = e[\varphi(x)]$ quel que soit $x \in A$. Le noyau de cette homomorphie est $\mathcal{G}^A$; c. à d. que les conditions $e_\varphi = 1$ et $\varphi \in \mathcal{G}^A$ sont équivalentes.

Soient, en particulier, $\mathcal{E}$ le groupe des nombres réels, l'addition étant entendue au sens arithmétique, et $\mathcal{S}$ la circonférence $|z|=1$ du plan complexe avec la multiplication habituelle des nombres complexes („groupe des rotations"); soit $e(t) = e^{2\pi i t}$. Evidemment e est une homomorphie continue transformant $\mathcal{E}$ en $\mathcal{S}$ et son noyau $\mathcal{G}$ coïncide avec le groupe des nombres entiers. Dans cette interprétation, $\mathcal{X}$ est un espace métrique tout-à-fait arbitraire (en vertu du théorème de Tietze-Hausdorff).

Pour $\varphi \in \mathcal{E}^A$, e_φ désigne la fonction-élément de $\mathcal{S}^A$ telle que $e_\varphi(x) = e^{2\pi i \varphi(x)}$ avec $x \in A$.

Les éléments f [1]) de $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ qui sont de la forme $f = e_\varphi$, c. à d. qui sont des valeurs de l'homomorphie qui vient d'être définie, constituent un sous-groupe de $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ que nous désignerons par $\Gamma(\mathcal{X})$. D'une façon plus générale, $\Gamma(A)$ désignera le sous-groupe de $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ formé des fonctions f telles que la fonction partielle $f|A$ est de la forme e_φ avec $\varphi \in \mathcal{E}^A$.

Un rôle surtout important jouent les groupes-facteurs

$$\mathfrak{B}_1(\mathcal{X}) = \mathcal{S}^{\mathcal{X}}/\Gamma(\mathcal{X}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{B}_0(A) = \mathcal{G}^A/\mathcal{G},$$

$\mathcal{G}$ désignant ici le sous-groupe de $\mathcal{G}^A$ composé des fonctions constantes [2]).

Plusieurs théorèmes concernant les relations entre ces groupes, des théorèmes d'„addition" et des énoncés qui s'y rattachent seront établis dans cet ouvrage.

Dans l'interprétation considérée plus haut, les éléments de $\Gamma(\mathcal{X})$ coïncident avec les transformations homotopes à une constante [3]); donc — dans le cas de $\mathcal{X}$ compact — avec les transformations inessentielles au sens de M. Hopf, et les éléments du groupe $\mathfrak{B}_1(\mathcal{X})$ coïncident avec les composantes de l'espace $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$. Le groupe $\mathfrak{B}_1(\mathcal{X})$ est isomorphe au premier groupe de Betti (pour $\mathcal{X}$ compact) [4]); le groupe $\mathfrak{B}_0(\mathcal{X})$ correspond au groupe 0 de Betti.

---

1) Je vais employer les variables f, g et h pour désigner des éléments de $\mathcal{S}^A$, φ, ψ et χ pour les éléments de $\mathcal{E}^A$ et d pour les éléments de $\mathcal{G}^A$.

2) Il est commode de désigner par le même symbole une fonction constante et la valeur de cette fonction. La condition (ii) s'exprime ainsi par l'égalité $\mathcal{G}^C = \mathcal{G}$ (pour C connexe).

3) Théorème de M. S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Ch. I, § 2, Fund. Math. **26** (1936).

4) Théorème de M. N. Bruschlinsky, Math. Ann. **109** (1934), p. 525.

L'importance de l'étude des groupes $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ et $\mathfrak{B}_1(\mathcal{X})$ tient en particulier au fait qu'ils interviennent d'une façon très naturelle dans la théorie des coupures du plan [1]) — comme d'ailleurs le n-1-ème groupe de Betti intervient (grâce au théorème de dualité de M. Alexander) dans l'étude des coupures compactes de l'espace euclidien à n dimensions. Il est cependant remarquable que — comme l'a montré M. Eilenberg — le groupe $\mathfrak{B}_1(\mathcal{X})$ est applicable dans la théorie des coupures du plan qu'elles soient compactes ou non compactes (où le premier groupe de Betti est moins maniable) et permet de construire cette théorie d'une façon non seulement très générale, mais aussi très simple.

Ce fait conduit à l'étude du groupe $\mathfrak{B}_1(\mathcal{X})$ pour $\mathcal{X}$ tout-à-fait arbitraire (sans l'hypothèse que $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble du plan) [2]). Cette étude ne devient pas plus compliquée (du moins dans le domaine des problèmes considérés ici) en se plaçant à un point de vue plus général encore: en admettant, comme nous le faisons, que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$ sont des groupes topologiques arbitraires, assujettis aux conditions formulées au début de cet ouvrage.

1. *Groupe* $\Gamma(A)$. *Groupe* $\mathfrak{B}_1(A_0, A_1)$. 1 désignant l'élément neutre du groupe $\mathcal{S}$, donc (conformément au renvoi 2, p. 232) du groupe $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$, ainsi que du groupe $\mathcal{S}^A$ pour $A \subset \mathcal{X}$, le symbole „$f \sim 1 \bmod \Gamma(\mathcal{X})$" signifie que $f \in \Gamma(\mathcal{X})$ [3]).

---

1) Voir le Mémoire précité de M. Eilenberg et plusieurs ouvrages de M. K. Borsuk qui y sont cités. Comme l'a fait observer M. Borsuk, de nombreuses propriétés topologiques de l'espace $\mathcal{X}$ sont équivalentes à des propriétés (plus simples) de $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$. Ainsi, par ex., l'unicohérence d'un espace péanien $\mathcal{X}$ équivaut à la connexité de l'espace $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$.

2) Voir, dans cet ordre d'idées, outre le mémoire précité de M. Eilenberg, les notes *Sur les espaces multicohérents* du même auteur dans Fund. Math. **27** et **29**, ainsi que K. Borsuk et S. Eilenberg, *Über stetige Abbildungen der Teilmengen euklidischer Räume auf die Kreislinie*, Fund. Math. **26**.

3) D'une façon générale: étant donnés un groupe abelien U (l'opération du groupe étant conçue comme multiplication) et un sous-groupe V, l'expression $u_1 \sim u_2 \bmod V$ (ou bien $u_1 \equiv u_2 \bmod V$) veut dire que $(u_1 : u_2) \in V$; ou encore: que u_1 et u_2 appartiennent au même élément du groupe-facteur U/V. En particulier, $u \sim 1 \bmod V$ signifie que $u \in V$.

Pour $g, h \in \mathcal{S}^A$, nous écrirons, tout court, $g \sim h$ au lieu de „$g \sim h$ mod groupe des fonctions de la forme e_φ où $\varphi \in \mathcal{E}^A$".

Je désigne par $f|A$ la fonction partielle qui s'obtient de f en restreignant la variabilité de l'argument à l'ensemble A.

D'une façon générale, étant donnés un groupe $\mathcal{Y}$, un espace $\mathcal{X}$ et un sous-ensemble A de $\mathcal{X}$, l'opération fonctionnelle ζ qui fait correspondre à chaque $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ l'élément $\zeta(f) = f|A$ de $\mathcal{Y}^A$ est une homomorphie.

Si $\Phi \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, je désigne par $\Phi|A$ l'ensemble $\zeta(\Phi)$, c. à d. l'ensemble des fonctions $f|A$ où $f \in \Phi$. $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}|A$ est donc bien l'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{Y}^A$ qui admettent une extension $g^* \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

L'opération ζ étant une homomorphie, si Φ est un groupe, $\Phi|A$ en est également un.

Soit $\mathcal{X}=A_0+A_1$ *une décomposition en deux ensembles fermés.* Posons [1]), pour abréger,

$$\mathfrak{B}_1(A_0,A_1)=\frac{\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)}{\Gamma(A_0+A_1)}\quad {}^{2)}.$$

On a les relations suivantes:

(1) $$\Gamma(A_0)|A_1=\Gamma(A_0\cdot A_1)|A_1=\underset{g}{E}\{(g\in\mathcal{S}^{A_1})(g|A_0\cdot A_1\sim 1)\}$$

(2) $$[\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)]|A_1=\Gamma(A_1)|A_1=\underset{g}{E}\{(g\in\mathcal{S}^{A_1})(g\sim 1)\}.$$

La double inclusion qui s'obtient de (1) en remplaçant $=$ par $\subset$ étant évidente, il s'agit de prouver que les conditions $g\in\mathcal{S}^{A_1}$ et $g|A_0\cdot A_1\sim 1$ entraînent $g\in\Gamma(A_0)|A_1$. Or, posons $g|A_0\cdot A_1=e_\psi$, où $\psi\in\mathcal{S}^{A_0\cdot A_1}$. Soit, conformément à (i), $\psi\subset\psi^*\in\mathcal{S}^{A_0}$ [3]). Les fonctions g et $h=e_{\psi^*}$ étant concordantes [4]), puisque $g|A_0\cdot A_1=e_\psi=h|A_0\cdot A_1$, soit f la fonction égale à g sur A_1 et à h sur A_0. Il vient $g\subset f\in\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ et $f|A_0\sim 1$, d'où $g\in\Gamma(A_0)|A_1$.

Pour établir (2), on remplace dans (1) A_0 par A_0+A_1.

La deuxième égalité (2) implique aussitôt:

(3) $$\mathfrak{B}_1(A)=\frac{\mathcal{S}^A}{\Gamma(A)|A}\quad \textit{quel que soit } A \textit{ fermé.}$$

[1]) Cf. le groupe $P(A_0,A_1)$ de M. Eilenberg, l. c., p. 94.

[2]) La multiplication, l'addition et la soustraction des ensembles sont entendues dans le sens de la Théorie des ensembles: p.ex. $\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)=$ partie commune des groupes $\Gamma(A_0)$ et $\Gamma(A_1)$.

[3]) L'inclusion $\psi\subset\psi^*$ signifie que ψ^* est une extension de ψ. Rappelons que, d'après (i), à chaque $\psi\in\mathcal{S}^A$ (avec A fermé) correspond une extension $\psi^*\in\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$; autrement dit, on a pour A fermé

$$\mathcal{S}^A=\mathcal{S}^{\mathcal{X}}|A.$$

[4]) Deux (ou plusieurs) fonctions $g\in\mathcal{Y}^{A_0}$ et $h\in\mathcal{Y}^{A_1}$ sont dites *concordantes* si elles coïncident sur $A_0\cdot A_1$, c. à d. si $g|A_0\cdot A_1=h|A_0\cdot A_1$. Elles déterminent alors une seule fonction f définie sur A_0+A_1 et telle que $f|A_0=g$ et $f|A_1=h$. Cette fonction est continue si les ensembles A_0 et A_1 sont fermés (ou ouverts).

Théorème 1. *Le groupe* $\dfrac{\Gamma(A_0\cdot A_1)}{\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)}$ *est le produit direct* [1]) *des groupes* $\dfrac{\Gamma(A_0)}{\Gamma(A_1)}$ *et* $\dfrac{\Gamma(A_1)}{\Gamma(A_0)}$; *il est donc isomorphe à leur produit cartésien:*

(4) $$\frac{\Gamma(A_0\cdot A_1)}{\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)}\underset{\mathrm{gr}}{=}\frac{\Gamma(A_0)}{\Gamma(A_1)}\times\frac{\Gamma(A_1)}{\Gamma(A_0)}\quad {}^{2)}.$$

Il s'agit de démontrer que chaque $f\in\Gamma(A_0\cdot A_1)$ est de la forme $f=f_0\cdot f_1$, où $f_0\in\Gamma(A_0)$ et $f_1\in\Gamma(A_1)$ [3]). Or, d'après la première égalité (1), il existe un $f_0\in\Gamma(A_0)$ tel que $f|A_1=f_0|A_1$. En posant $f_1=f:f_0$, il vient $f_1\in\Gamma(A_1)$, car $(f:f_0)|A_1=1$.

Théorème 2. *Si* $\mathfrak{B}_1(A_0\cdot A_1)$ *se réduit à l'élément neutre* [4]), *on a:*

(5) $$\Gamma(A_0)|A_1=\mathcal{S}^{A_1},$$

(6) $$\frac{\Gamma(A_0)}{\Gamma(A_1)}\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{B}_1(A_1),$$

(7) $$\frac{\mathfrak{B}_1(A_0+A_1)}{\mathfrak{B}_1(A_0,A_1)}\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{B}_1(A_0)\times\mathfrak{B}_1(A_1).$$

[1]) V et W étant deux sous-groupes d'un groupe abelien U, le groupe U est dit *produit direct* de V et W lorsque chaque $u\in U$ se laisse représenter d'une et d'une seule façon comme produit vw où $v\in V$ et $w\in W$; cela équivaut à dire que 1° u se laisse représenter d'au moins une façon comme vw, 2° l'ensemble $V\cdot W$ se réduit à l'élément neutre (cf. Alexandroff-Hopf, *Topologie* I, p. 561).

De là résulte que, si la condition 1° seule est satisfaite, $\frac{U}{V\cdot W}$ est le produit direct des groupes-facteurs $\frac{V}{V\cdot W}$ et $\frac{W}{V\cdot W}$ $\Big($que nous désignerons, pour abréger, par $\frac{V}{W}$ et $\frac{W}{V}\Big)$. Car $\frac{V}{W}\cdot\frac{W}{V}$ est l'élément neutre de $\frac{U}{V\cdot W}$.

Ceci se laisse exprimer aussi de la façon suivante: X étant un sous-ensemble arbitraire du groupe U, désignons par $\widehat{X}$ le plus petit groupe contenant X. On a alors

$$\frac{\widehat{(V+W)}}{V\cdot W}=\widehat{\frac{V}{W}+\frac{W}{V}}\qquad \text{et}\qquad \frac{V}{W}\cdot\frac{W}{V}=(1).$$

[2]) Le symbole $\underset{\mathrm{gr}}{=}$ dénote l'isomorphie (l'équivalence au sens de la théorie des groupes).

[3]) c.à.d. que $\Gamma(A_0\cdot A_1)=\widehat{\Gamma(A_0)+\Gamma(A_1)}$.

[4]) c.à.d. que chaque $f\in\mathcal{S}^{A_0\cdot A_1}$ satisfait à la condition $f\sim 1$. Si $A_0\cdot A_1$ est connexe et localement connexe et $\mathcal{S}$ est la circonférence, cette hypothèse équivaut à l'unicohérence de $A_0\cdot A_1$.

La formule (5) est une conséquence directe de (1). Puis

$$\frac{\Gamma(A_0)}{\Gamma(A_1)}=\frac{\Gamma(A_0)}{\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)}\underset{\mathrm{gr}}{=}\frac{\Gamma(A_0)|A_1}{[\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)]|A_1}\,{}^{1)}=\frac{\mathcal{S}^{A_1}}{\Gamma(A_1)|A_1}=\mathfrak{B}_1(A_1)$$

en vertu de (5), (2) et (3). Comme, par hypothèse,

$$\mathcal{S}^{A_0+A_1}=\Gamma(A_0\cdot A_1),$$

(4) et (6) donnent

$$\frac{\mathcal{S}^{A_0+A_1}}{\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)}\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{B}_1(A_0)\times\mathfrak{B}_1(A_1),$$

d'où la formule (7), puisque

$$\frac{\mathcal{S}^{A_0+A_1}}{\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)}\underset{\mathrm{gr}}{=}\frac{\mathcal{S}^{A_0+A_1}:\Gamma(A_0+A_1)}{[\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)]:\Gamma(A_0+A_1)}\,{}^{2)}.$$

On verra dans le N⁰ suivant que le groupe $\mathfrak{B}_1(A_0,A_1)$, qui intervient dans la formule (7), est lié étroitement au groupe $\mathfrak{B}_0(A_0\cdot A_1)$.

---

[1]) Car, d'une façon générale, on a

$$\frac{\Phi}{\Psi}\underset{\mathrm{gr}}{=}\frac{\Phi|A}{\Psi|A},$$

Φ et Ψ désignant deux sous-groupes du groupe $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ tels que $\Phi\supset\Psi$ et que Ψ contient toutes les fonctions $f\epsilon\Phi$ pour lesquelles $f(x)=1$ quel que soit $x\epsilon A$, c.à d. contient le noyau de l'homomorphie ζ (cf. renvoi 3, p. 233). Cette isomorphie équivaut, en effet, à la suivante

$$\frac{\Phi}{\Psi}\underset{\mathrm{gr}}{=}\frac{\zeta(\Phi)}{\zeta(\Psi)}$$

et celle-ci résulte du théorème suivant: étant donnés un sous-groupe V du groupe abelien U et une homomorphie h définie sur U et dont le noyau est un sous-groupe de V, on a

$$(^0)\qquad \frac{U}{V}\underset{\mathrm{gr}}{=}\frac{h(U)}{h(V)}.$$

On substitue, en effet, à h l'opération ζ restreinte aux éléments de Φ.

[2]) Car, d'une façon générale, $W\subset V$ étant deux sous-groupes d'un groupe abelien U, les groupes-facteurs $\frac{U}{V}$, $\frac{U}{W}$ et $\frac{V}{W}$ sont liés par la formule suivante

$$\frac{U}{V}\underset{\mathrm{gr}}{=}\frac{U:W}{V:W}.$$

Celle-ci est une conséquence de la formule $(^0)$ du renvoi précédent, en désignant par h l'homomorphie qui transforme U en $U:W$ et qui a W pour noyau.

2. *Rapports du groupe $\mathfrak{B}_1(A_0,A_1)$ au groupe $\mathfrak{B}_0(A_0\cdot A_1)$. Groupe $\theta(A_0,A_1)$.* Soit, comme auparavant, $\mathfrak{X}=A_0+A_1$ une décomposition en deux ensembles fermés.

Faisons correspondre à chaque $d\epsilon\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}$ un $h_d\epsilon\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1)$ de la façon suivante [1]).

Soient $\varphi_{d,j}$ $(j=0,1)$ deux fonctions-éléments de $\mathcal{S}^{A_j}$ assujetties à la seule condition que $d=\varphi_{d,1}-\varphi_{d,0}$ (c. à d. que l'on ait $d(x)=$ $=\varphi_{d,1}(x)-\varphi_{d,0}(x)$ quel que soit $x\epsilon A_0\cdot A_1$). Des $\varphi_{d,j}$ de ce genre existent: on peut poser p. ex. $\varphi_{d,0}=0$ et admettre pour $\varphi_{d,1}$ une extension continue arbitraire de d sur A_1 (l'existence d'une telle extension résulte de (i), p. 231).

Posons $h_{d,j}=e_{\varphi_{d,j}}$. Les fonctions $h_{d,0}$ et $h_{d,1}$ sont concordantes, c. à d. que, sur $A_0\cdot A_1$, on a $h_{d,0}=h_{d,1}$. On a, en effet,

$$h_{d,1}:h_{d,0}=e_{\varphi_{d,1}-\varphi_{d,0}}=e_d=1.$$

Elles définissent donc une seule fonction $h_d\epsilon\mathcal{S}^{A_0+A_1}$ telle que $h_d|A_j=h_{d,j}$. Par définition de $h_{d,j}$, on a

$$(8)\qquad h_d\epsilon\Gamma(A_0)\cdot\Gamma(A_1).$$

La définition de h_d dépend évidemment de $\varphi_{d,j}$. Cependant

(9) *si* $\varphi'_{d,j}\epsilon\mathcal{S}^{A_j}$, $\varphi'_{d,1}-\varphi'_{d,0}=d$ *et* $h'_d|A_j=h'_{d,j}=e_{\varphi'_{d,j}}$, *on a* $h'_d\sim h_d$.

Posons, en effet, $\psi_{d,j}=\varphi'_{d,j}-\varphi_{d,j}$. Il vient

$$h'_{d,j}:h_{d,j}=e_{\varphi'_{d,j}-\varphi_{d,j}}=e_{\psi_{d,j}}\qquad\text{et}\qquad\psi_{d,1}-\psi_{d,0}=0.$$

La dernière égalité prouve que les fonctions $\psi_{d,0}$ et $\psi_{d,1}$ sont concordantes. Posons donc $\psi_d\epsilon\mathcal{S}^{A_0+A_1}$ et $\psi_d|A_j=\psi_{d,j}$. Par conséquent $h'_d:h_d=e_{\psi_d}$, d'où $h'_d\sim h_d$.

Désignons par $\theta(A_0,A_1)$ *le sous-groupe de* $\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}$ *composé des* d *pour lesquels il existe deux* $d_j\epsilon\mathcal{G}^{A_j}$, $j=0,1$, *tels que* $d=d_1-d_0$ [2]).

Nous allons démontrer que:

$$(10)\qquad \theta(A_0,A_1)=h^{-1}[\Gamma(A_0+A_1)]$$

---

[1]) Notons que, si $A_0\cdot A_1=0$, $\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1}$ ne contient qu'un seul élément: l'ensemble vide. En général $\mathcal{Y}^0=(0)$.

[2]) En symboles (cf. renvoi 1, p. 235), en posant $\Delta_j=\mathcal{G}^{A_j}|A_0\cdot A_1$, on a

$$\theta(A_0,A_1)=\widehat{\Delta_0+\Delta_1}.$$

(*c. à d. que la condition* $d \in \theta(A_0, A_1)$ *équivaut à* $h_d \sim 1$),

(11) $$h_{d+d'} \sim h_d \cdot h_{d'},$$

(12) *à chaque* $f \in \Gamma(A_0) \cdot \Gamma(A_1)$ *correspond un* d *tel que* $f \sim h_d$.

ad (10). Soit $d \in \theta(A_0, A_1)$. Posons $d_j \in \mathcal{G}^{A_j}$ et $d = d_1 - d_0$, et substituons d_j à $\varphi'_{d,j}$ dans (9). Il vient $h'_{d,j} = e_{d_j} = 1$ (par définition de $\mathcal{G}$); donc $h_d \sim h_{d'} = 1$.

Inversement, soit $h_d \sim 1$. Posons $h_d = e_\psi$ et $\psi \in \mathcal{E}^{A_0+A_1}$. Soit $d_j = \varphi_{d,j} - \psi$. Il vient $d_1 - d_0 = \varphi_{d,1} - \varphi_{d,0} = d$ et $d_j \in \mathcal{G}^{A_j}$, car

$$e_{\varphi_{d,j}-\psi} = e_{\varphi_{d,j}} : e_\psi = 1.$$

Donc $d \in \theta(A_0, A_1)$.

ad (11). Posons $\varphi'_{(d+d'),j} = \varphi_{d,j} + \varphi_{d',j}$. Il vient

$$\varphi'_{(d+d'),1} - \varphi'_{(d+d'),0} = d + d' \qquad \text{et} \qquad e_{\varphi'_{(d+d'),j}} = e_{\varphi_{d,j}} \cdot e_{\varphi_{d',j}} = h_{d,j} \cdot h_{d',j}.$$

Posons $h'_{d+d',j} = h_{d,j} \cdot h_{d',j}$.

D'après (9) il existe un $h'_{d+d'} \sim h_{d+d'}$ tel que $h'_{d+d'} | A_j = h_{d,j} \cdot h_{d',j}$, d'où $h'_{d+d'} = h_d \cdot h_{d'}$. Par conséquent $h_{d+d'} \sim h_d \cdot h_{d'}$.

ad (12). Soit $f \in \Gamma(A_j)$. Posons $f | A_j = e_{\psi_j}$, $\psi_j \in \mathcal{E}^{A_j}$ et $d = \psi_1 - \psi_0$. Il vient $d \in \mathcal{G}^{A_0 \cdot A_1}$, puisque, sur $A_0 \cdot A_1$, on a $e_{\psi_1} = e_{\psi_0}$, donc $e_d = 1$. En remplaçant dans (9) $\varphi'_{d,j}$ par ψ_j, donc h'_d par f, on en tire $f \sim h_d$.

Ceci établi, soit H l'isomorphie entre les groupes-facteurs $\dfrac{\mathcal{G}^{A_0 \cdot A_1}}{\theta(A_0, A_1)}$ et $\mathfrak{B}_1(A_0, A_1)$ qui fait correspondre à chaque élément X du premier l'élément $H(X)$ du deuxième tel que $h_d \in H(X)$, où d est un élément arbitraire de X [1]).

[1]) H est une isomorphie en vertu du théorème général suivant: Soient U et U^* deux groupes abeliens, V et V^* deux sous-groupes de U et de U^* respectivement et h une fonction qui fait correspondre à chaque $d \in U$ un $h(d) \in U^*$ de façon que:

1° si $d \in V$, on a $h(d) \in V^*$,

2° $[h(d+d') : h(d) \cdot h(d')] \in V^*$,

3° à chaque $f \in U^*$ correspond un d tel que $[f : h(d)] \in V^*$.

La fonction H, définie comme tout à l'heure, est alors une homomorphie transformant $\dfrac{U}{V}$ en $\dfrac{U^*}{V^*}$. Cette transformation est une isomorphie si la condition suivante est réalisée:

4° $h(d) \in V^*$ entraîne $d \in V$.

On parvient ainsi au

Théorème 3. $\mathfrak{B}_1(A_0, A_1) \underset{\text{gr}}{=} \dfrac{\mathcal{G}^{A_0 \cdot A_1}}{\theta(A_0, A_1)}$.

D'où en particulier:

(13) $\mathfrak{B}_1(A_0, A_1)$ *est une image homomorphe de* $\mathfrak{B}_0(A_0 \cdot A_1)$,

(14) *si* A_0 *est connexe*, $\mathfrak{B}_1(A_0, A_1) \underset{\text{gr}}{=} \dfrac{\mathcal{G}^{A_0 \cdot A_1}}{\mathcal{G}^{A_1} | A_0 \cdot A_1}$,

(15) *si* A_0 *et* A_1 *est connexe*, $\mathfrak{B}_1(A_0, A_1) \underset{\text{gr}}{=} \mathfrak{B}_0(A_0 \cdot A_1)$.

On a, en effet, pour chaque A_j,

(16) $$\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^{A_j} | A_0 \cdot A_1 \subset \theta(A_0, A_1)$$

et pour A_j connexe (cf. renvoi 2, p. 232):

(17) $$\mathcal{G}^{A_j} | A_0 \cdot A_1 = \mathcal{G} \qquad \text{et} \qquad \theta(A_0, A_1) = \mathcal{G}^{A_{1-j}} | A_0 \cdot A_1 \; ^{1}).$$

L'inclusion $\mathcal{G} \subset \theta(A_0, A_1)$ implique (13) et les égalités (17) entraînent (14) et (15): si les deux A_j, $j = 0, 1$, sont connexes, on a, en effet, $\theta(A_0, A_1) = \mathcal{G}$.

Remarque. Considérons le cas particulier où les ensembles A_0 et A_1 sont connexes et fermés et les groupes $\mathfrak{B}_1(A_0)$, $\mathfrak{B}_1(A_1)$ et $\mathfrak{B}_0(A_0 \cdot A_1)$ ont le *rang* [2]) *fini*. Le rang de $\mathfrak{B}_j(X)$ étant désigné par $b_j(X)$, admettons que $b_1(A_0 \cdot A_1) = 0$. Les énoncés (7) et (15) donnent alors

$$b_1(A_0 + A_1) = b_1(A_0) + b_1(A_1) + b_0(A_0 \cdot A_1) \quad ^{3}).$$

C'est bien cette formule qui jouit des applications importantes dans la théorie des coupures du plan. $\mathcal{S}$ désignant la circonférence et $\mathcal{E}$ l'ensemble des nombres réels, le nombre $b_0(\mathfrak{X}) + 1$ est le nombre des composantes de $\mathfrak{X}$ (non vide) et, d'après un théorème fondamental de dualité, $b_1(F) + 1$ est pour F compact le nombre des composantes du complémentaire de F.

[1]) Dans les notations du renvoi 1, p. 237, on a $\mathcal{G} \subset \Delta_j \subset \widehat{\Delta_0 + \Delta_1}$. Si Δ_j est connexe, on a $\Delta_j = \mathcal{G} \subset \Delta_{1-j}$, d'où $\widehat{\Delta_0 + \Delta_1} = \widehat{\Delta}_{1-j} = \Delta_{1-j}$.

[2]) Le rang d'un groupe est le nombre maximum de ses éléments linéairement indépendants. Pour les propriétés du rang, voir Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, Anhang I.

[3]) Cf. S. Eilenberg, l.c. Ch. III, §3.

3. *Relation f irr non ~ 1*. Soit $f \epsilon S^{\mathfrak{X}}$. Nous dirons que $\mathfrak{X}$ est irréductible par rapport à la relation f *non*~ 1, en symboles f *irr non*~ 1, lorsque 1° on a f *non*~ 1, 2° quel que soit l'ensemble fermé $F \neq \mathfrak{X}$, on a $f|F \sim 1$.

(18) *Si f irr non~ 1 et C est connexe et fermé, $\mathfrak{X}-C$ est connexe.*

Car, en cas contraire, il existe deux ensembles fermés A_0 et A_1 tels que

$$\mathfrak{X}=A_0+A_1,\quad A_0\cdot A_1=C,\quad A_j\neq\mathfrak{X},\quad \text{d'où}\quad f|A_j\sim 1.$$

Cette dernière formule, rapprochée de l'hypothèse que $C(=A_0\cdot A_1)$ est connexe, implique que $(f|A_0+A_1)\sim 1$ [1]).

(19) *Si f irr non~ 1 et $\mathfrak{X}$ est décomposable, il existe deux ensembles connexes A_0 et A_1 tels que*

(20) $$A_j=\overline{\mathfrak{X}-A_{1-j}}\neq 0,\quad \textit{d'où}\quad \mathfrak{X}=A_0+A_1,\quad A_j\neq\mathfrak{X}.$$

Par hypothèse, il existe deux ensembles connexes et fermés C_0 et C_1 tels que $\mathfrak{X}=C_0+C_1$, $C_j\neq\mathfrak{X}$. Posons $A_0=\overline{\mathfrak{X}-C_0}$ et $A_1=\overline{\mathfrak{X}-A_0}$. Selon (18), ces ensembles sont connexes; en outre

$$\overline{\mathfrak{X}-A_1}=\overline{\mathfrak{X}-\overline{\mathfrak{X}-A_0}}=\overline{\mathfrak{X}-\overline{\mathfrak{X}-\overline{\mathfrak{X}-C_0}}}=\overline{\mathfrak{X}-C_0}\ {}^{2)}=A_0.$$

Enfin l'inégalité $C_j\neq\mathfrak{X}$ entraîne $A_j\neq 0$, d'où $A_{1-j}\neq\mathfrak{X}$.

4. *Groupes $\Omega(\mathfrak{X})$ et $\Psi(Z,\mathfrak{X})$*. Posons

$$\Omega(\mathfrak{X})=\Pi\Gamma(F)\quad \text{et}\quad \Psi(Z,\mathfrak{X})=\Pi\,\mathcal{G}^{Z+F}|Z,$$

la multiplication étant étendue à tous les $F=\overline{F}\neq\mathfrak{X}$.

La condition f *irr non*~ 1 équivaut donc à $f\epsilon\Omega(\mathfrak{X})-\Gamma(\mathfrak{X})$. Le groupe $\Psi(Z,\mathfrak{X})$ est, comme on verra dans le N° 6, étroitement lié à la notion d'ensemble irréductible.

Théorème 4. *Soit $\mathfrak{X}=A_0+A_1$ une décomposition en deux ensembles connexes et fermés. Posons $\Psi_j=\Psi(A_0\cdot A_1,A_j)$; h et H désignant les transformations définies dans le N° 2, on a*

$$\Psi_0\cdot\Psi_1\subset h^{-1}[\Omega(\mathfrak{X})],\quad \textit{d'où}\quad \frac{\Psi_0\cdot\Psi_1}{\mathcal{G}}\subset H^{-1}\left[\frac{\Omega(\mathfrak{X})}{\Gamma(\mathfrak{X})}\right],$$

les inclusions étant remplaçables par des égalités si la formule (20) *est réalisée.*

[1]) Ibid. p. 64 (5) ou bien th. 3 de la note présente.

[2]) Cette dernière identité a lieu, quel que soit $C_0=\overline{C}_0$. Voir ma *Topologie I*, p. 37.

En effet, si $K=\overline{K}\subset A_1$, on a selon (17) et (10):

$$\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1+K}|A_0\cdot A_1=\theta(A_0,A_0\cdot A_1+K)=h^{-1}[\Gamma(A_0+K)],$$

puisque $A_0\cdot(A_0\cdot A_1+K)=A_0\cdot A_1$ et $A_0+A_0\cdot A_1+K=A_0+K$.

En étendant la multiplication à tous les $K\neq A_1$, il vient

$$\Psi_1=\Pi(\mathcal{G}^{A_0\cdot A_1+K}|A_0\cdot A_1)=h^{-1}[\Pi\Gamma(A_0+K)],$$

d'où

$$\Psi_0\cdot\Psi_1=h^{-1}[\Pi\Gamma(A_0+K_1)\cdot\Gamma(A_1+K_0)]$$

et il reste à démontrer que $\Pi\Gamma(A_0+K_1)\cdot\Gamma(A_1+K_0)\subset\Pi\Gamma(F)$, où l'inclusion peut être remplacée par l'égalité si (20) est remplie (K_j et F sont des ensembles fermés variables tels que $K_j\subset A_j\neq K_j$ et $F\subset\mathfrak{X}\neq F$).

Or, soit $F\neq\mathfrak{X}$. On a donc, soit $FA_0\neq A_0$, soit $FA_1\neq A_1$. Admettons que $K_1=FA_1\neq A_1$. Comme $F\subset A_0+K_1$, on a $\Gamma(A_0+K_1)\subset\Gamma(F)$, d'où l'inclusion à démontrer.

Inversement, soit $K_1\neq A_1$. La formule (20) supposée vérifiée, on a $A_0+K_1\neq\mathfrak{X}$, car autrement, on aurait $\mathfrak{X}-A_0\subset K_1$, donc $A_1=\overline{\mathfrak{X}-A_0}\subset K_1$ et $K_1=A_1$. En supposant que $f\epsilon\Pi\Gamma(F)$, il vient (pour $F=A_0+K_1$): $f\epsilon\Gamma(A_0+K_1)$, d'où le reste de la démonstration.

Corollaire 1. *Soit $\mathfrak{X}=A_0+A_1$ une décomposition en deux ensembles connexes et fermés. $d_1,d_2,\dots$ étant une suite (finie ou infinie) d'éléments de $\Psi_0\cdot\Psi_1$ linéairement indépendants* mod $\mathcal{G}$ [1]), *les fonctions $h_{d_1},h_{d_2},\dots$ sont linéairement indépendantes* mod $\Gamma(\mathfrak{X})$ *et on a*

$$h_{d_k}\ \textit{irr non}\sim 1 \qquad k=1,2,\dots$$

L'indépendance linéaire des fonctions h_{d_k} résulte du fait que H est une isomorphie entre $\mathfrak{B}_0(A_0\cdot A_1)$ et $\mathfrak{B}_1(A_0,A_1)$ (cf. (15)). Donc h_{d_k} *non*~ 1 et, comme (th. 4) $h_{d_k}\epsilon\Omega(\mathfrak{X})$, il vient h_{d_k} *irr non*~ 1.

Corollaire 2. *$\mathfrak{X}$ étant décomposable et $f_1,f_2,\dots$ étant une suite (non vide) d'éléments de $S^{\mathfrak{X}}$ linéairement indépendants* mod $\Gamma(\mathfrak{X})$ *et tels que f_k irr non~ 1, il existe une décomposition $\mathfrak{X}=A_0+A_1$ en deux ensembles connexes satisfaisant à* (20) *et une suite $d_1,d_2,\dots$ d'éléments de $\Psi_0\cdot\Psi_1$ linéairement indépendants* mod $\mathcal{G}$ *(à savoir telles que $h_{d_k}\sim f_k$, $k=1,2,\dots$).*

[1]) V étant un sous-groupe d'un groupe abelien U (avec l'addition comme l'opération du groupe), une suite $u_1,u_2,\dots$ d'éléments de U est dite *linéairement indépendante* mod V, lorsqu'une relation de la forme $m_1u_1+\dots+m_nu_n\sim 0$ mod V ne peut avoir lieu qu'à condition que $m_1=\dots=m_n=0$.

5. *Le groupe $\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$ pour $\mathcal{G}$=le groupe des nombres entiers.*

Désormais nous admettons que $\mathcal{G}$ coïncide (ou est isomorphe) avec le groupe des nombres entiers.

(21) *Soit $F_0,\dots,F_n$ un système d'ensembles fermés, disjoints et non vides. Les fonctions caractéristiques $d_1,\dots,d_n$ des ensembles $F_1,\dots,F_n$ constituent un système linéairement indépendant* mod $\mathcal{G}$.

Posons, en effet, $a_{kl}=d_k(F_l)$. On a donc $a_{ll}=1$ et $a_{kl}=0$ pour $k\neq l$. Le déterminant du système de $n+1$ équations homogènes ($l=0,\dots,n$)

(22) $$m_0+a_{1l}m_1+\dots+a_{nl}m_n=0$$

étant égal à 1, il vient $m_0=m_1=\dots=m_n=0$.

Remarque. Considérons le cas très simple où l'espace $\mathcal{X}$ se décompose en un nombre fini, soit $n+1$, composantes $F_0,\dots,F_n$ (ce cas ne diffère pas essentiellement de celui où $\mathcal{X}$ est un ensemble fini). Le groupe $\mathfrak{B}_0(\mathcal{X})$ est alors isomorphe au groupe $\mathcal{G}^n$ des points entiers de l'espace euclidien à n dimensions et les fonctions caractéristiques $d_1,\dots,d_n$ des ensembles $F_1,\dots,F_n$ sont ses générateurs (mod $\mathcal{G}$).

En effet, d étant un élément arbitraire de $\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$, soit $m_l=d(F_l)$. Il vient $d=m_0+(m_1-m_0)\,d_1+\dots+(m_n-m_0)\,d_n$.

(23) *Soit $d_1,\dots,d_n$ un système d'éléments de $\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$. Si l'on a $\mathcal{X}=F_1+\dots+F_n$ où, pour chaque couple k,l, la fonction partielle $d_k|F_l$ est constante, les fonctions $d_1,\dots,d_n$ sont linéairement dépendantes* mod $\mathcal{G}$.

Posons, en effet, $d_k(F_l)=a_{kl}$. Les entiers $m_0,\dots,m_n$, dont les n derniers ne s'annulent pas simultanément, sont donnés par le système de n équations (22) où $l=1,\dots,n$.

Nous déduirons de là l'énoncé suivant:

(24) *Si les fonctions $d_1,\dots,d_n\,\epsilon\,\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$ sont linéairement indépendantes* mod $\mathcal{G}$, *il existe une décomposition $\mathcal{X}=F_0+\dots+F_n$ en $n+1$ ensembles fermés-ouverts, non vides et tels qu'à chaque couple d'indices $l\neq r$ correspond un k tel que $d_k(F_l)\cdot d_k(F_r)=0$.*

Nous établirons à ce but le lemme suivant (de la Théorie des Ensembles):

Soit $\mathfrak{z}_0,\dots,\mathfrak{z}_m$ un système de $m+1$ points différents situés dans le produit cartésien $A=A^{(1)}\times\dots\times A^{(n)}$. Il existe une décomposition $A=B_0+\dots+B_m$ telle que 1°: $\mathfrak{z}_i\,\epsilon\,B_i$ pour $i=0,\dots,m$, 2°: à chaque couple $l\neq r$ correspond un k tel que $B_l^{(k)}\cdot B_r^{(k)}=0$, — où, d'une façon générale, $\mathcal{X}^{(k)}$ désigne la projection de $\mathcal{X}$ sur l'axe $A^{(k)}$.

Procédons par induction. Pour $m=0$, posons $B_0=A$. Pour $n=1$ et $m>0$, posons $B_i=\mathfrak{z}_i$ si $i<m$, et $B_m=A-(B_0+\dots+B_{m-1})$.

Admettons que le lemme soit vrai pour les indices $j<m$ (et chaque n). Soit $n>1$. Les points $\mathfrak{z}_0,\dots,\mathfrak{z}_m$ étant différents, il est légitime d'admettre qu'il existe un indice $j<m$ tel que $\mathfrak{z}_i^{(1)}=\mathfrak{z}_0^{(1)}$ pour $i\leqslant j$ et $\mathfrak{z}_i^{(1)}\neq\mathfrak{z}_0^{(1)}$ pour $i>j$.

Comme $j<m$, il existe par hypothèse une décomposition $\mathfrak{z}_0^{(1)}\times A_2\times\dots\times A_n=B_0+\dots+B_j$ satisfaisant à 1° et 2° (en remplaçant m par j). La même hypothèse implique une décomposition $A=C_{j+1}+\dots+C_m$ telle que $\mathfrak{z}_i\,\epsilon\,C_i$ pour $i>j$ et que 2° est réalisé (en y remplaçant B par C).

Posons $B_i=C_i-\mathfrak{z}_0^{(1)}\times A_2\times\dots\times A_n$ pour $i>j$. Les ensembles B_i sont les ensembles demandés. En effet, si $l,r\leqslant j$ ou bien si $l,r>j$, la cond. 2° est satisfaite par définition des B_i ($i\leqslant j$) et des C_i ($i>j$). Si $l\leqslant j<r$, on a $B_l^{(1)}=\mathfrak{z}_0^{(1)}$ et $B_r^{(1)}=C_r^{(1)}-\mathfrak{z}_0^{(1)}$.

Le lemme établi, désignons par $\delta(x)$ le point de $\mathcal{G}^n$ tel que $\delta^{(k)}(x)=d_k(x)$, $k=1,\dots,n$ (c. à d. le point de l'espace euclidien n-dimensionnel à coordonnées $d_1(x),\dots,d_n(x)$). On a la décomposition $\mathcal{X}=\sum\delta^{-1}(\mathfrak{z})$ en ensembles fermés-ouverts, où $\mathfrak{z}$ parcourt $\mathcal{G}^n$. Chacune des fonctions partielles $d_k|\delta^{-1}(\mathfrak{z})$ étant constante ($=\mathfrak{z}^{(k)}$), il existe selon (23) $n+1$ éléments différents $\mathfrak{z}_0,\dots,\mathfrak{z}_n$ dans $\mathcal{G}^n$ tels que

$$\delta^{-1}(\mathfrak{z}_i)\neq 0 \qquad\qquad i=0,\dots,n.$$

Posons dans le lemme: $A^{(1)}=\dots=A^{(n)}=\mathcal{G}$ et $m=n$, et considérons les ensembles $F_i=\delta^{-1}(B_i)$, $i=0,\dots,n$. Comme $\mathcal{G}^n=B_0+\dots+B_n$, on a $\mathcal{X}=F_0+\dots+F_n$. Comme $\mathfrak{z}_i\,\epsilon\,B_i$, il vient $\delta^{-1}(\mathfrak{z}_i)\subset\delta^{-1}(B_i)$, d'où $F_i\neq 0$. Enfin, en vertu de l'identité $d_k(F_l)=d_k[\delta^{-1}(B_l)]=B_l^{(k)}$, la condition $B_l^{(k)}\cdot B_r^{(k)}=0$ entraîne $d_k(F_l)\cdot d_k(F_r)=0$.

6. *Espaces irréductibles entre deux ensembles.*

L'espace $\mathcal{X}$ est dit *connexe entre deux ensembles fermés F et H* lorsqu'il n'existe aucun ensemble fermé-ouvert G tel que $F\dot{\subset}G$ et $GH=0$.

(25) *Si $\mathcal{X}$ n'est pas connexe entre les ensembles fermés et disjoints F et H, la fonction $d_{F,H}$ égale à 1 sur F et à 0 sur H admet une extension $d^*\,\epsilon\,\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$, c. à d. que $d_{F,H}\,\epsilon\,\mathcal{G}^{\mathcal{X}}|F+H$.*

On pose, en effet, $d^*(G)=1$ et $d^*(\mathcal{X}-G)=0$.

(26) *F et H étant fermés et $d\,\epsilon\,\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$, si $d(F)\cdot d(H)=0$, $\mathcal{X}$ n'est pas connexe entre F et H.*

Car, en posant $G = d^{-1}[d(F)]$, G est fermé-ouvert, $F \subset G$ et $GH = 0$.

L'espace $\mathcal{X}$ est dit *irréductible entre F et H* lorsque $\mathcal{X}$ est connexe entre F et H tandis que $V + F + H$ n'est jamais connexe entre F et H, quel que soit $V = \overline{V} \neq \mathcal{X}$.

Les propositions (25) et (26) entraînent:

(27) *Si $\mathcal{X}$ est irréductible entre les ensembles fermés et disjoints F et H, on a $d_{F,H} \epsilon \Psi(F+H, \mathcal{X})$.*

(28) *Si $\mathcal{X}$ est connexe entre les ensembles fermés F et H et si $d \epsilon \Psi(F+H, \mathcal{X})$ et $d(F) \cdot d(H) = 0$, $\mathcal{X}$ est irréductible entre F et H.*

Evidemment, si l'espace $\mathcal{X}$ (contenant plus d'un point) est irréductible entre F et H, on a $F \neq 0 \neq H$ et $FH = 0$. Si $0 \neq F_1 \subset F$ et $0 \neq H_1 \subset H$, $\mathcal{X}$ est irréductible entre F_1 et H_1, donc entre chaque couple de points $a \epsilon F$, $b \epsilon H$. Par conséquent, si $\mathcal{X}$ est irréductible entre F_0 et F_1, entre F_1 et F_2 et entre F_2 et F_0, $\mathcal{X}$ est *indécomposable*.

(29) *Si $\mathcal{X}$ est irréductible entre F et H_0 ainsi qu'entre F et H_1, $\mathcal{X}$ est irréductible entre F et $H_0 + H_1$.*

Ceci est une conséquence de l'énoncé suivant, facile à démontrer: étant donnés deux ensembles Z_j, $j = 0, 1$, non-connexes entre F et H_j (où $F + H_j \subset Z_j$), leur somme $Z_0 + Z_1$ est non-connexe entre F et $H_0 + H_1$.

Les corollaires 1 et 2 du N° 4, rapprochés des propositions (21), (27) et (24), (28), (29) entraînent les corollaires:

Corollaire 3. *Soit $\mathcal{X} = A_0 + A_1$ une décomposition en deux ensembles connexes et fermés et $A_0 \cdot A_1 = F_0 + \ldots + F_n$ une décomposition en $n+1$ ensembles fermés, disjoints, non vides et tels que A_j ($j = 0, 1$) est irréductible entre chaque couple F_k et $H_k = A_0 \cdot A_1 - F_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Il existe alors dans $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ un système de n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ linéairement indépendantes* $\mathrm{mod}\, \Gamma(\mathcal{X})$ *et telles que f_k irr non ~ 1.*

A savoir, $d_k = d_{F_k, H_k}$ désignant la fonction caractéristique de F_k (c. à d. que $d_k(F_k) = 1$ et $d_k(H_k) = 0$), on pose $f_k = h_{d_k}$.

Corollaire 4. *$f_1, \ldots, f_n$ étant la suite envisagée dans le cor. 2, on a la décomposition $A_0 \cdot A_1 = F_0 + \ldots + F_n$ en $n+1$ ensembles fermés, disjoints, non vides et tels que A_j ($j = 0, 1$) est irréductible entre chaque couple F_k et $H_k = A_0 \cdot A_1 - F_k$ ($k = 1, \ldots, n$).*

En effet, $d_1, \ldots, d_n$ étant les fonctions envisagées dans le cor. 2, il existe selon (24) une décomposition $A_0 \cdot A_1 = F_0 + \ldots + F_n$ en ensembles, fermés, disjoints, non vides et tels qu'à chaque couple d'indices $l \neq r$ correspond un k tel que $d_k(F_l) \cdot d_k(F_r) = 0$. Comme $d_k \epsilon \Psi(A_0 \cdot A_1, A_j)$, il vient $(d_k | F_l + F_r) \epsilon \Psi(F_l + F_r, A_j)$, donc selon (28) A_j est irréductible entre F_l et F_r, donc, d'après (29), entre F_l et $H_l = A_0 \cdot A_1 - F_l$.

Remarques. 1. Si $n \geqslant 2$, les ensembles A_j sont *indécomposables*.

2. Dans le cas où $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble du plan et $\mathcal{S}$ désigne la circonférence $|z| = 1$, la relation f *irr non* ~ 1 correspond à la notion de *coupure irréductible du plan*. De sorte que les cor. 3 et 4 permettent d'établir des relations entre cette notion et celle d'ensemble irréductible entre deux sous-ensembles [1]).

7. *Théorèmes „sur trois ensembles connexes"*. Soient C_0, C_1 et C_2 trois ensembles connexes tels que $\mathcal{X} = C_0 + C_1 + C_2$. Soient f et g deux fonctions-éléments de $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ telles que

$$f | C_k + C_l \sim 1 \quad \text{et} \quad g | C_k + C_l \sim 1, \qquad k, l = 0, 1, 2.$$

(30) *Les fonctions f et g sont linéairement dépendantes* $\mathrm{mod}\, \Gamma(\mathcal{X})$, *c. à d. qu'il existe deux entiers m et n qui ne s'annulent pas tous les deux et tels que $f^m \cdot g^n \sim 1$* [2]).

Posons, en effet, en réduisant l'indice k mod 3:

$$f | C_k + C_{k+1} = e_{\varphi_{k,k+1}}, \qquad \varphi_{k,k+1} \epsilon \mathcal{S}^{C_k + C_{k+1}}$$

et

$$g | C_k + C_{k+1} = e_{\psi_{k,k+1}}, \qquad \psi_{k,k+1} \epsilon \mathcal{S}^{C_k + C_{k+1}}.$$

Sur C_k, on a $e_{\varphi_{k-1,k}} = e_{\varphi_{k,k+1}}$, d'où $e_{\varphi_{k-1,k} - \varphi_{k,k+1}} = 1$. Donc, C_k étant connexe, il existe un entier $a_k (\epsilon \mathcal{G})$ tel que $\varphi_{k-1,k} - \varphi_{k,k+1} = a_k$ (sur C_k) et, d'une façon analogue, un $b_k \epsilon \mathcal{G}$ tel que $\psi_{k-1,k} - \psi_{k,k+1} = b_k$.

Posons $\chi_{k,k+1} = m\varphi_{k,k+1} + n\psi_{k,k+1} + p_k$ sur $C_k + C_{k+1}$, les entiers m, n, p_0, p_1 et p_2 satisfaisant aux trois équations:

$$(\dagger) \qquad m a_k + n b_k + p_{k-1} - p_k = 0 \qquad k = 0, 1, 2,$$

et où, soit $m \neq 0$, soit $n \neq 0$ (ce que l'on peut postuler, car on peut admettre que $p_0 = 0$ et que $|p_1| + |p_2| + |m| + |n| \neq 0$).

---

[1]) Cf. S. Eilenberg, l. c. pp. 82 et 103 et ma note de Fund. Math. **6**, 1924), p. 130.

[2]) Autrement dit, le rang du groupe $\dfrac{\Gamma(C_0 + C_1) \cdot \Gamma(C_1 + C_2) \cdot \Gamma(C_2 + C_0)}{\Gamma(C_0 + C_1 + C_2)}$ (que l'on pourrait désigner par $\mathfrak{B}_1(C_0, C_1, C_2)$) est $\leqslant 1$.

Sur C_k, on a

$$\chi_{k-1,k}-\chi_{k,k+1}=m(\varphi_{k-1,k}-\varphi_{k,k+1})+n(\psi_{k-1,k}-\psi_{k,k+1})+p_{k-1}-p_k=$$
$$=ma_k+nb_k+p_{k-1}-p_k=0.$$

Il existe par conséquent [1] une fonction $\chi\epsilon\mathcal{S}^{\mathfrak{X}}$ telle que

$$\chi|C_k+C_{k+1}=\chi_{k,k+1}.$$

Comme $e_{\chi_{k,k+1}}=e_{m\varphi_{k,k+1}}\cdot e_{n\psi_{k,k+1}}\cdot e_{p_k}=f^m\cdot g^n$ sur C_k+C_{k+1}, il vient $f^m\cdot g^n=e_\chi$ (sur $\mathfrak{X}$), donc $f^m\cdot g^n\sim 1$.

En particulier [2]

(31) *si* $C_0\cdot C_1\cdot C_2\neq 0$, *on a* $f\sim 1$ [3]).

Posons, en effet, $x_0\epsilon C_0\cdot C_1\cdot C_2$. On parvient (dans le raisonnement précédent) aux trois égalités: $\varphi_{k-1,k}(x_0)-\varphi_{k,k+1}(x_0)=a_k$, $k=0,1,2$; en les ajoutant, on a $a_0+a_1+a_2=0$. Donc, en posant $g=1$ et $m=1$, le système d'équations (†) (où $m=1$ et $b_k=0$) se laisse résoudre; il a, en effet, pour racines: $p_0=0$, $p_1=a_1$ et $p_2=-a_0$. En définissant la fonction χ comme auparavant (c. à d. que $\chi_{k,k+1}=\varphi_{k,k+1}+p_k$), il vient $f=e_\chi$, c. q. f. d.

Remarque [4]). Les théorèmes (30) et (31) impliquent que C_0, C_1 et C_2 étant trois sous-ensembles connexes de la surface sphérique $\mathcal{S}_2$ et x_0, x_1 et x_2 trois points de $\mathcal{S}_2$ tels qu'aucun C_k+C_l ne coupe $\mathcal{S}_2$ entre aucun couple de ces points, $C_0+C_1+C_2$ ne coupe pas $\mathcal{S}_2$ entre au moins un de ces couples. Il ne le coupe entre aucun de ces couples si $C_0\cdot C_1\cdot C_2\neq 0$.

[1]) Car, d'une façon générale, étant donnés trois ensembles C_k $(k=0,1,2)$ et trois fonctions $f_{k,k+1}\epsilon\mathcal{Y}^{C_k+C_{k+1}}$ telles que $f_{k-1,k}|C_k=f_{k,k+1}|C_k$, il existe une fonction $f\epsilon\mathcal{Y}^{C_0+C_1+C_2}$ telle que $f|C_k+C_{k+1}=f_{k,k+1}$.

[2]) S. Eilenberg, l. c., p. 79.

[3]) C.à d. le groupe $\mathfrak{B}_1(C_0,C_1,C_2)$ se réduit à l'élément neutre.

[4]) Cf. ibid. et E. Čech, Publ. Univ. Masaryk (1931), p. 20, ma note *Théorème sur trois continus*, Monatsh. f. Math. u. Ph. **36** (1929), p. 77.

Sur les transformations continues des courbes.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

1. Notations et terminologie. J'appelle *courbe* un continu de dimension 1.

Je désigne par E un espace arbitraire métrique et compact et par R_2 le plan euclidien. A désignant un sous-ensemble fermé de E, resp. un sous-ensemble fermé et borné de R_2, je désigne par R_2^A l'espace des fonctions continues transformant A en sous-ensembles de R_2, par 2^A l'espace des sous-ensembles fermés de A, par $\Gamma(A)$ l'espace des sous-ensembles fermés et connexes de A et par $\Gamma_1(A)$ l'espace des courbes situées dans A. Je désigne respectivement par ϱ et δ la distance et le diamètre dans E, R_2, R_2^E et par ϱ_1 la distance dans 2^E (donc aussi dans $\Gamma(E)$ et $\Gamma_1(E)$).

$A\times B$ désignera le produit cartésien des ensembles A et B. Pour $A\epsilon 2^E$ et $0<\lambda<\mu$, je désigne par $U(A,\lambda)$ l'ensemble des points $u\epsilon E$ tels que $\varrho(u,A)<\lambda$; par $V(A,\lambda,\mu)$ l'ensemble des points $u\epsilon E$ tels que $\lambda<\varrho(u,A)<\mu$.

Je dis qu'un continu $C\epsilon\Gamma(E)$ *traverse* $V(A,\lambda,\mu)$ si l'on a

$$C[U(A,\mu)-V(A,\lambda,\mu)]\neq 0\neq C[E-U(A,\mu)]$$

et que C *traverse* $V(A,\lambda,\mu)$ *intérieurement* si l'on a en outre:

$$C\subset\overline{V(A,\lambda,\mu)}.$$

Pour $z_1,z_2\epsilon R_2$, je désigne par $I(z_1,z_2)$ le segment rectiligne aux extrémités z_1 et z_2.

Je pose pour $A\epsilon 2^E$

$$d_1(A)=\max\delta(C)\quad\text{où}\quad C\epsilon\Gamma(A);$$

évidemment $d_1(A)$ est la constante d'Urysohn de A, correspondant à la dimension 1 [1]).

[1]) P. Urysohn, Fund. Math. **8**, p. 352-353.