D'ailleurs, G', comme sous-famille de G, est bien-ordonnée; soit $B_1 \precsim B_2 \precsim \dots \precsim B_n \precsim \dots \precsim B_\alpha \dots$ la suite des éléments de G'.

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que cette suite transfinie est de type Ω, c. à. d., qu'elle ne contient pas d'élément B_Ω. Or, il existe — en vertu de la definition de G' — pour chaque $B_\alpha \epsilon G'$ un $T_\alpha \epsilon F$ tel que $T_\alpha \precsim f(T_\alpha) = B_\alpha$. Alors, s'il existait un B_Ω tel que $B_\alpha \precsim B_\Omega$ pour tout $\alpha < \Omega$, nous aurions aussi $T_\alpha \precsim B_\Omega$ pour tout $\alpha < \Omega$.

Mais ceci est en contradiction avec C_{12}, puisque, la fonction $f(T)$ étant univoque, les T_α sont différents deux à deux et leur ensemble est non dénombrable, q. e. d.

Sur une relation entre deux conséquences de l'hypothèse du continu.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

J'ai déduit ailleurs de l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) deux conséquences $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ suivantes:

$\boldsymbol{P}$: *Il existe une fonction $f(x)$ qui est continue dans un ensemble linéaire E de puissance du continu, mais qui n'est uniformément continue dans aucun sous-ensemble indénombrable de E* [1]).

$\boldsymbol{Q}$: *Il existe une suite infinie $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ de fonctions de variable réelle qui est convergente, mais qui n'est uniformément convergente dans aucun ensemble indénombrable* [2]).

Le but de cette Note est de démontrer (sans l'hypothèse du continu) que *la proposition $\boldsymbol{P}$ implique la proposition $\boldsymbol{Q}$.*

A ce but, je vais introduire deux propriétés P_1 et Q_1 des ensembles linéaires, définies comme suit.

Un ensemble linéaire E jouit de la propriété P_1, s'il existe une fonction $f(x)$ qui est continue sur E, mais qui n'est uniformément continue sur aucun sous-ensemble indénombrable de E.

---

[1]) Bull. Acad. Roumaine **17**; voir aussi mon livre *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne **4**, Warszawa-Lwów 1934, p. 52 (proposition C_8).

[2]) C. R. Soc. Sc. et Lettres Varsovie (1928), p. 84-87; cf. aussi mon livre précité, p. 52, proposition C_9. Cette proposition est, comme j'y ai démontré (p. 52-59), équivalente à chacune des trois autres propositions: C_{10}, C_{11} et C_{12}. Or, M. F. Rothberger a démontré récemment que l'ensemble des propositions C_{12} et C_{76} entraîne l'hypothèse du continu (ce volume, p. 224-226). Il en est donc de même pour l'ensemble des propositions C_8 et C_{76}.

Un ensemble linéaire E jouit de la propriété Q_1, s'il existe une suite infinie $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ de fonctions de variable réelle qui est convergente dans E, mais qui n'est uniformément convergente dans aucun sous-ensemble indénombrable de E.

Lemme. *Pour tout ensemble linéaire E, la propriété P_1 entraîne la propriété Q_1.*

Démonstration. Soient E un ensemble linéaire jouissant de la propriété P_1 et $f(x)$ la fonction qui existe en vertu de P_1.

Nous définirons la suite infinie de fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ comme il suit. E_1 désignant l'ensemble de tous les points de E qui sont des points de condensation de E, soit x un point de E_1 et n un nombre naturel donné. Il existe des entiers $p\geqslant 0$ tels que

$$(1)\qquad |f(t)-f(x)|<1/p \quad \text{pour} \quad |t-x|<1/n \quad \text{et} \quad t\,\epsilon\, E_1.$$

Tel est p. ex. le nombre $p=0$, en posant $1/0=\infty$.

L'ensemble des nombres p ne peut pas être infini, puisqu'on aurait dans ce cas $f(t)=f(x)$ pour $|t-x|<1/n$ et $t\,\epsilon\, E_1$, et la fonction $f(x)$ serait uniformément continue sur la portion de E_1 contenue dans l'intervalle $\left\langle x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right\rangle$, donc, vu que $x\,\epsilon\, E_1$, sur un sous-ensemble indénombrable de E, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc le plus grand entier $p\geqslant 0$ satisfaisant à la formule (1): nous le désignerons par $p_n(x)$. Soit

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p_n(x)+1} & \text{pour } x\,\epsilon\, E_1\\ 0 & \text{pour } x \text{ non } \epsilon\, E_1.\end{cases}$$

La suite infinie de fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ ainsi définie converge vers 0 pour x réels. En effet, soit d'abord $x\,\epsilon\, E_1$. La fonction $f(x)$ étant continue dans $E_1\subset E$ au point x, il existe pour tout p naturel un indice $n_p(x)$ tel que

$$|f(t)-f(x)|<1/p \quad \text{pour} \quad |x-t|<1/n_p(x) \quad \text{et} \quad t\,\epsilon\, E_1,$$

de sorte que l'on a pour tout $n\geqslant n_p(x)$

$$|f(t)-f(x)|<1/p \quad \text{pour} \quad |x-t|<1/n \quad \text{et} \quad t\,\epsilon\, E_1.$$

En vertu de la définition de $p_n(x)$, on a donc $p_n(x)\geqslant p$ pour $n\geqslant n_p(x)$ et par conséquent, vu la définition de $f_n(x)$:

$$f_n(x)=\frac{1}{p_n(x)+1}<\frac{1}{p} \quad \text{pour} \quad n\geqslant n_p(x),$$

d'où $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x)=0$. La même formule subsiste évidemment pour x *non* $\epsilon\, E_1$, puisqu'on a dans ce cas $f_n(x)=0$ pour $n=1,2,...$

Supposons maintenant que la suite $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ converge uniformément (vers 0) sur un sous-ensemble indénombrable N de E, donc aussi sur l'ensemble $N_1=N\cdot E_1$, qui est un sous-ensemble indénombrable de E_1 (l'ensemble $E-E_1$ étant — comme on sait — au plus dénombrable). Il existerait par conséquent, pour tout i naturel, un indice q_i tel que

$$|f_{q_i}(x)|<1/i \quad \text{pour} \quad x\,\epsilon\, N_1,$$

d'où selon la définition de $f_n(x)$

$$p_{q_i}(x)\geqslant i \quad \text{pour} \quad x\,\epsilon\, N_1,$$

et selon la définition de $p_n(x)$

$$|f(t)-f(x)|<\frac{1}{p_{q_i}(x)}\leqslant\frac{1}{i} \quad \text{pour} \quad |t-x|<\frac{1}{q_i}, \quad t\,\epsilon\, E_1 \quad \text{et} \quad x\,\epsilon\, N.$$

La fonction $f(x)$ serait donc uniformément continue sur N_1, contrairement à la propriété P_1 de E (puisque $N_1\subset E_1\subset E$).

Il est ainsi démontré que la suite $f_n(x)$ converge dans E, mais ne converge uniformément dans aucun sous-ensemble indénombrable de E, c. à d. que E jouit de la propriété Q_1. Le lemme est ainsi établi.

Or, il est à remarquer qu'en admettant l'hypothèse du continu, la propriété Q_1 n'entraîne pas P_1. En d'autres mots, l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'un ensemble linéaire E jouissant de la propriété Q_1, mais ne jouissant pas de la propriété P_1. En effet, il résulte de la proposition $\boldsymbol{Q}$ (qui est une conséquence de l'hypothèse du continu) que l'ensemble E de tous les nombres réels jouit de la propriété Q_1. Cependant cet ensemble ne jouit pas de la propriété P_1, toute fonction continue de variable réelle étant — comme on sait — uniformément continue dans tout intervalle fini.

Admettons maintenant la proposition $\boldsymbol{P}$. Il existe donc un ensemble linéaire E de puissance du continu jouissant de la propriété P_1, donc aussi, en vertu du lemme, de la propriété Q_1. Il existe par conséquent une suite infinie $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ de fonctions de variable réelle qui converge non uniformément sur tout sous-ensemble indénombrable de E. L'ensemble E étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe une fonction $\varphi(x)$ de variable réelle à valeurs distinctes dont l'ensemble des valeurs (pour x réels) est précisément l'ensemble E. La suite infinie $f_n(\varphi(x))$ $(n=1,2,...)$ est, comme on voit sans peine, non uniformément convergente sur tout ensemble linéaire indénombrable, d'où la proposition Q. L'implication $P \to Q$ se trouve ainsi démontrée.

Sur les espaces des transformations continues en certains groupes abeliens.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Dédié à Monsieur Felix Hausdorff.

$\mathcal{X}$ étant un espace topologique (métrique p. ex.) et $\mathcal{Y}$ un groupe abelien topologique, je désigne par $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ le groupe des transformations continues de $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de $\mathcal{Y}$, l'addition des fonctions-éléments f_1 et f_2 de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ étant définie par la condition: $f_3=f_1+f_2$ lorsque, pour chaque $x \in \mathcal{X}$, $f_3(x)=f_1(x)+f_2(x)$. $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est évidemment un groupe abelien (et la fonction identiquement égale à 0 est son élément neutre).

Nous considérons dans cet ouvrage *deux groupes abeliens topologiques* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{S}$ (l'opération du groupe $\mathcal{E}$ étant désignée comme addition et celle du groupe $\mathcal{S}$ comme multiplication) *et une homomorphie continue* e *transformant* $\mathcal{E}$ *en* $\mathcal{S}$; de sorte que, pour $t \in \mathcal{E}$, on a $e(t) \in \mathcal{S}$ et qu'à chaque $z \in \mathcal{S}$ correspond un $t \in \mathcal{E}$ tel que $e(t)=z$. Soit $\mathcal{G}$ le *noyau* de cette homomorphie, c. à d. l'ensemble des t tels que $e(t)=1$.

Nous considérons, en outre, un espace $\mathcal{X}$ tel que:

(i) *A étant un sous-ensemble fermé arbitraire de $\mathcal{X}$, chaque fonction $\varphi \in \mathcal{E}^A$ admet une extension $\varphi^* \in \mathcal{E}^{\mathcal{X}}$*,

(ii) *C étant un sous-ensemble connexe arbitraire de $\mathcal{X}$, chaque fonction $d \in \mathcal{G}^C$ est une constante*[1]).

---

[1]) Ces conditions sont remplies par chaque espace (métrique) $\mathcal{X}$, si $\mathcal{E}$ est un rétracte absolu et $\mathcal{G}$ en est un sous-ensemble isolé.