Une remarque concernant l'hypothèse du continu.

Par

Fritz Rothberger (Warszawa).

Je me propose de démontrer que les propositions C_{12} et C_{76} de M. Sierpiński[1]) prises à la fois, sont équivalentes à l'hypothèse du continu: $2^{\aleph_0}=\aleph_1$.

La proposition C_{12} est énoncée ici d'une façon différente de celle de M. Sierpiński, mais, en conséquence du lemme ci-dessous, les deux formes de l'énoncé de C_{12} sont équivalentes.

Notations. Etant données deux suites $\{h_i\}$ et $\{k_i\}$ de nombres naturels,

$\{h_i\}\leqslant\{k_i\}$ signifie que l'on a $h_i\leqslant k_i$ pour tous les i $(i=1,2,\ldots)$[2])
$\{h_i\}\lesssim\{k_i\}$ signifie que l'on a $h_i\leqslant k_i$ pour presque tous les i.

Lemme. *Soit $\boldsymbol{E}$ une famille (non dénombrable) de différentes suites de nombres naturels; alors les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Pour chaque suite S de nombres naturels (qu'elle appartienne à $\boldsymbol{E}$ ou non), l'ensemble des suites $T\epsilon\boldsymbol{E}$ telles que $T\leqslant S$ est au plus dénombrable.*

(ii) *Pour chaque suite S, l'ensemble de tous les $T\epsilon\boldsymbol{E}$ telles que $T\lesssim S$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. D'une part, l'implication (ii)$\to$(i) est immédiate. D'autre part, soit S une suite telle que l'ensemble de toutes les suites $T^x\lesssim S$ $(T^x\epsilon\boldsymbol{E})$ est non dénombrable (le paramètre x parcourant un ensemble non dénombrable X).

[1]) W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne 4, Warszawa-Lwów 1934, pp. 53 et 145.

[2]) Il est à observer que chez M. Sierpiński, loc. cit., le même signe est employé dans le sens de $\leqslant$ (p. 53) et de $\lesssim$ (p. 145).

Soit $S=\{s_i\}$ et $T^x=\{t_i^x\}$. En vertu de $T^x\lesssim S$, il existe pour chaque x un nombre naturel $\varphi(x)$ tel que $t_i^x\leqslant s_i$ pour $i\geqslant\varphi(x)$.

L'ensemble de toutes les suites finies $\{t_1^x, t_2^x, \ldots, t_{\varphi(x)}^x\}$ étant dénombrable et X étant indénombrable, il existe un système $\{s_1', s_2', \ldots, s_n'\}$ et un ensemble non dénombrable $X'\subset X$ tel que

$$n=\varphi(x) \quad \text{et} \quad s_i'=t_i^x \qquad \text{pour} \quad i\leqslant n \quad \text{et} \quad x\epsilon X'.$$

Soit maintenant

$$s_i'=s_i \qquad \text{pour} \quad i>n.$$

On a évidemment $t_i^x\leqslant s_i'$ pour tous les i et pour $x\epsilon X'$, c. à. d. il existe une suite $S'=\{s_i'\}$ telle que la relation $T\leqslant S'$ est satisfaite pour une sous-famille non dénombrable de $\boldsymbol{E}$, q. e. d.

Théorème. *L'hypothèse du continu équivaut au couple de deux propositions suivantes:*

C_{12}. *Il existe une famille $\boldsymbol{F}$ de puissance du continu de suites de nombres naturels telle que, pour chaque suite de nombres naturels S (qu'elle appartienne à $\boldsymbol{F}$ ou non), l'ensemble de toutes les suites $T\epsilon\boldsymbol{F}$ telles que $T\lesssim S$ (ou bien telles que $T\leqslant S$[3])) est au plus dénombrable.*

C_{76}. *Il existe une famille $\boldsymbol{G}$ de puissance du continu de suites de nombres naturels, bien ordonnée d'après la relation $\lesssim$ et ayant la propriété suivante: à chaque suite A de nombres naturels (qu'elle appartienne à $\boldsymbol{G}$ ou non) correspond une suite $B\epsilon\boldsymbol{G}$ telle que $A\lesssim B$.*

Démonstration. On sait que l'hypothèse du continu implique C_{12} et C_{76}[1]).

Réciproquement, étant données les deux familles $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ satisfaisant aux propositions respectives, il existe pour chaque suite $T\epsilon\boldsymbol{F}$ une suite correspondante $f(T)=B\epsilon\boldsymbol{G}$ telle que $T\lesssim B$ (en vertu de C_{76}). Les suites $f(T)$ (pour $T\epsilon\boldsymbol{F}$) forment alors une sous-famille $\boldsymbol{G}'$ de $\boldsymbol{G}$.

Je dis que $\overline{\overline{\boldsymbol{G}'}}=\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}$. En effet, pour chaque $B\epsilon\boldsymbol{G}'$, l'ensemble des arguments $f^{-1}(B)$ est au plus dénombrable (en vertu de C_{12}) et, puisque $\aleph_0\cdot\aleph_\xi=\aleph_\xi$, nous avons $\overline{\overline{\boldsymbol{G}'}}=\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}=2^{\aleph_0}$.

[3]) Ceci correspond à l'énoncé de M. Sierpiński (loc. cit. pp. 53, 54).

D'ailleurs, G', comme sous-famille de G, est bien-ordonnée; soit $B_1 \precsim B_2 \precsim \dots \precsim B_n \precsim \dots \precsim B_\alpha \dots$ la suite des éléments de G'.

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que cette suite transfinie est de type Ω, c. à. d., qu'elle ne contient pas d'élément B_Ω. Or, il existe — en vertu de la definition de G' — pour chaque $B_\alpha \epsilon G'$ un $T_\alpha \epsilon F$ tel que $T_\alpha \precsim f(T_\alpha) = B_\alpha$. Alors, s'il existait un B_Ω tel que $B_\alpha \precsim B_\Omega$ pour tout $\alpha < \Omega$, nous aurions aussi $T_\alpha \precsim B_\Omega$ pour tout $\alpha < \Omega$.

Mais ceci est en contradiction avec C_{12}, puisque, la fonction $f(T)$ étant univoque, les T_α sont différents deux à deux et leur ensemble est non dénombrable, q. e. d.

Sur une relation entre deux conséquences de l'hypothèse du continu.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

J'ai déduit ailleurs de l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) deux conséquences $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ suivantes:

$\boldsymbol{P}$: *Il existe une fonction $f(x)$ qui est continue dans un ensemble linéaire E de puissance du continu, mais qui n'est uniformément continue dans aucun sous-ensemble indénombrable de E* [1].

$\boldsymbol{Q}$: *Il existe une suite infinie $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ de fonctions de variable réelle qui est convergente, mais qui n'est uniformément convergente dans aucun ensemble indénombrable* [2].

Le but de cette Note est de démontrer (sans l'hypothèse du continu) que *la proposition $\boldsymbol{P}$ implique la proposition $\boldsymbol{Q}$.*

A ce but, je vais introduire deux propriétés P_1 et Q_1 des ensembles linéaires, définies comme suit.

Un ensemble linéaire E jouit de la propriété P_1, s'il existe une fonction $f(x)$ qui est continue sur E, mais qui n'est uniformément continue sur aucun sous-ensemble indénombrable de E.

---

[1]) Bull. Acad. Roumaine **17**; voir aussi mon livre *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne **4**, Warszawa-Lwów 1934, p. 52 (proposition C_8).

[2]) C. R. Soc. Sc. et Lettres Varsovie (1928), p. 84-87; cf. aussi mon livre précité, p. 52, proposition C_9. Cette proposition est, comme j'y ai démontré (p. 52-59), équivalente à chacune des trois autres propositions: C_{10}, C_{11} et C_{12}. Or, M. F. Rothberger a démontré récemment que l'ensemble des propositions C_{12} et C_{76} entraîne l'hypothèse du continu (ce volume, p. 224-226). Il en est donc de même pour l'ensemble des propositions C_8 et C_{76}.