Sur les transformations des complexes en sphères

(Note Complémentaire).

Par

Solomon Lefschetz (Princeton, U. S. A.).

26. Dans un travail sous le même titre[12]), auquel le présent fait suite, nous avions envisagé le problème suivant:

Soient K_p, H_n, où $p \geqslant n$, un p-complexe et une n-sphère. Définir à l'aide de certaines transformations non-uniformes $K_p \to H_n$ des groupes additifs isomorphes aux groupes duels d'homologie du complexe.

Il s'agissait surtout de ne faire usage que des propriétés les plus élémentaires du degré des transformations des simplexes en sphères. Au cours de notre traitement, nous avions utilisé un certain emme (lemme 4) qui a prêté, à juste titre, à de multiples objections de la part de plusieurs correspondants[13]). Je me propose de déduire les mêmes résultats en me passant tant de ce lemme que de la méthode du produit. Je crois qu'avec certaines modifications, on pourrait préserver l'un et l'autre. Toutefois le traitement auquel nous sommes arrivés est presque élémentaire et ne saurait être ni amélioré ni simplifié par l'emploi de la méthode en question. Pour terminer, nous indiquerons comment pour un K_2 certains groupes additifs d'homotopie directs de K_2 (en $H_1 \times H_2$) permettent également de définir ses groupes d'homologie.

---

[12]) S. Lefschetz, *Sur les transformations des complexes en sphères*, Fund. Math. **27** (1936), pp. 94-115. Pour faciliter les renvois, le numérotage du présent travail fait suite à celui du précédent.

[13]) Voir notamment l'article de M. H. Hopf, *Eine Charakterisierung der Bettischen Gruppen von Polyedern durch stetige Abbildungen* (à paraître dans Compos. Math.) et qu'il a eu l'obligeance de nous prêter en manuscrit.

Nous ne reviendrons pas aux questions traitées à **IV** (groupes de voisinage) car elles ne demandent nulle modification sérieuse.

27. Sauf avis contraire, nous adopterons la terminologie de notre travail antérieur. Toutefois, suivant au fond MM. Alexandroff-Hopf[14]), nous dédoublerons en quelque sorte les concepts singuliers. Plus précisément, seuls leurs éléments „continus" seront utilisés dans la suite.

Un *complexe continu* $\mathscr{K}$ sur un espace topologique $\mathscr{R}$ est un couple (T, K), où K est un polytope simplicial et T une transformation univoque et continue (t. u. c.) $K \to \mathscr{R}$. Sauf avis contraire, K est fini, fermé et ses simplexes sont tous orientés. Aux chaînes et cycles de K correspondent alors des chaînes et cycles continus de $\mathscr{K}$ ou, plus simplement, de $\mathscr{R}$. Il est entendu que K peut être remplacé par un transformé UK, où U est une homéomorphie affine sur chaque simplexe de K.

Soit K' une subdivision (barycentrique répétée) de K. Le complexe continu $\mathscr{K}' = (T, K')$ est dit *subdivision* de $\mathscr{K}$.

Soit K^* un polytope tel qu'il existe une transformation simpliciale T^* de K^* en un sous-complexe de K au sens usuel. Alors $\mathscr{K}^* = (TT^*, K^*)$ définit un complexe continu, dit *sous-complexe continu* de $\mathscr{K}$. Cette extension de la notion naturelle de sous-complexe est surtout avantageuse en vue du théorème de déformation (Théorème 1). Nous l'utiliserons sous la forme suivante:

Théorème 1'. *Tout complexe continu sur un polytope K admet une subdivision homotope sur K à un sous-complexe de K (entendu au sens général défini plus haut).*

28. Quelques remarques générales sur l'homotopie des complexes continus sur un espace topologique $\mathscr{R}$ vont nous être utiles. Convenons de désigner, une fois pour toutes, par l le segment $0 \leqslant t \leqslant 1$ de la variable réelle t. Soit K un polytope simplicial avec lequel on forme un prisme $K \times l$. Nous pouvons identifier K avec $K \times 0$, et nous désignerons $K \times 1$ par K'. Plus généralement, une configuration quelconque a de K aura pour image une configuration de K', que nous désignerons par a'.

---

[14]) Voir Alexandroff-Hopf, *Topologie*, J. Springer (1936), notamment p. 332.

Supposons donc qu'il existe une t.u.c. U: $K\times l\to\mathfrak{R}$. On dira alors que les deux complexes continus $\mathcal{K}=(U,K)$, $\mathcal{K}'=(U,K')$ sont *homotopes* sur $\mathfrak{R}$. L'équivalence avec la définition à l'aide d'une t. u. c. variable est bien connue. L'homotopie étant une relation symétrique, réflexive et transitive, elle donne lieu à un partage des complexes continus en classes.

Prenons en particulier pour K un polytope fixe. Si T est une t.u.c. $K\to\mathfrak{R}$, (T,K) est un complexe continu $\mathcal{K}$ sur $\mathfrak{R}$. On dit alors que deux t.u.c. T,T': $K\to\mathfrak{R}$ sont de la *même classe*, lorsqu'il en est ainsi pour les complexes continus (T,K), (T',K).

Remarque. Au lieu de (T,K), nous désignerons aussi souvent ce complexe continu par TK, sous-entendu „transformé de K".

29. Soit $\sigma_n\times l$ un prisme, supposé dans un espace euclidien à $n+1$ dimensions, et dont la base σ_n est un simplexe. Si $\sigma_n=a_0\dots a_n=a_0\sigma_{n-1}$, l'autre base est $\sigma'_n=a'_0\dots a'_n=a'_0\sigma'_{n-1}$, les orientations étant fixées par les ordres des sommets.

Je dis que les simplexes orientés $\sigma^{p}_{n+1}=(-1)^p a_0 a_1 \dots a_p a'_p \dots a_n$ décomposent $\sigma_n\times l$ en simplexes, en ce sens que tout point de $\sigma_n\times l$ appartient à un seul de ces simplexes (ouverts) ou de leurs faces. Tout d'abord, pour $n=0$, c'est évident. Supposons-le vrai pour $n-1$. Soit x un point quelconque de $\sigma_n\times l$, autre que a_0. La demi-droite a_0x, prolongée s'il le faut, coupe la frontière du prisme en un point $x'\neq a_0$, qui est soit sur $\sigma'_n-\sigma'_{n-1}$, soit sur $\sigma_{n-1}\times l$. Dans le premier cas, $x\subset\sigma^0_{n+1}$; dans le deuxième cas, en vertu de l'hypothèse de l'induction, $x'\subset\sigma^p_n$ tel que $x\subset\sigma^p_{n+1}=a_0\sigma^p_n$, $p>0$. Par hypothèse $\{\sigma^p_n\}$, $p>0$, est une décomposition de $\sigma_{n-1}\times l$. Donc $\{\sigma^p_{n+1}\}$, $p>0$, en est une de son „joint" avec a_0. Comme σ^0_{n+1} contient tous les points qui n'appartiennent pas à ce „joint", le prisme est bien décomposé de la manière voulue.

On vérifie aisément que si les σ^p_{n+1} sont orientés comme nous l'avons fait, deux simplexes adjacents sont toujours orientés de façon opposée relativement à leur face commune. Désignons cette manière d'orienter, lorsqu'elle est admissible, comme *normale*. Ainsi, une n-sphère décomposée en simplexes peut être orientée normalement en ce sens, et même de deux manières différentes. C'est d'ailleurs l'orientation présupposée dans toutes les questions où intervient le degré.

Considérons en particulier la sphère $H_n=F(\sigma_n\times l)$ et sa décomposition en simplexes par les faces des σ^p_{n+1}. Les

$$(-1)^{p-1}a_1a_2\dots a_p a'_p\dots a'_n$$

sont orientés normalement. Si l'on veut étendre cette orientation à σ_n,σ'_n, on trouve pour eux les orientations $-\sigma_n,\sigma'_n$. Donc:

Lemme 5. *Si l'on oriente normalement la frontière de $\sigma_n\times l$, et que l'orientation de la première base soit donnée par $\varepsilon\sigma_n$, où $\varepsilon=\pm1$, celle qui en résulte pour l'autre est spécifiée par $-\varepsilon\sigma'_n$.*

30. Outre le lemme précédent, il nous en faudra trois autres. Le premier, dû à Hopf, et le dernier (presque évident), ne sont rappelés que pour la commodité du lecteur.

Lemme 6. *Pour que deux n-sphères continues H^1_n,H^2_n sur une n-sphère H_n y soient homotopes, voire même avec un point donné A fixe, il faut et il suffit qu'elles aient le même degré sur H_n. Même résultat pour deux cellules continues E^1_n,E^2_n de frontières coïncidant avec A, et des homotopies maintenant la frontière fixe.*

Corollaire. *Pour que H^1_n (ou E^1_n) soit homotope à un point (à A dans une homotopie maintenant la frontière en A), il faut et il suffit que son degré soit nul sur H_n.*

Lemme 7. *Soit T une t.u.c. d'un simplexe σ_n en une n-sphère H_n, telle que $TF(\sigma_n)=A$. Soit ζ_n un n-simplexe sur σ_n. On peut modifier T dans sa classe de t.u.c. $\sigma_n\to H_n$, sans la changer sur $F(\sigma_n)$, de telle manière que $T(\sigma_n-\zeta_n)=A$.*

Nous dirons que T a été *concentrée* sur ζ_n. Soient P un point fixe (intérieur) de ζ_n, Q un point quelconque de $F(\sigma_n)$, R l'intersection de PQ avec $F(\zeta_n)$, S le point divisant RQ dans le rapport t, $0\leqslant t\leqslant 1$. Transformons PQ en lui même de telle manière que $PR\to PS$, $QR\to QS$ affinement. Ceci donne lieu à une t. u. c. $U(t)$: $\sigma_n\to\sigma_n$ fixe sur $F(\sigma_n)$ telle que $U(0)=1$, tandis que $U(1)$ est une t.u.c. telle que $U(1)(\sigma_n-\zeta_n)\subset F(\sigma_n)$. Alors $TU(t)$ détermine une homotopie $\sigma_n\to H_n$, fixe sur $F(\sigma_n)$ et telle que pour $t=0$ elle soit T, pour $t=1$ une t.u.c. $\sigma_n\to H_n$ telle que $T(\sigma_n-\zeta_n)=A$.

Lemme 8. *Soient H_n,H^1_n deux n-sphères, σ^i_n les simplexes d'une orientation normale de H^1_n, T une t.u.c. $H^1_n\to H_n$ transformant les $F(\sigma^i_n)$ en un point A de H_n. Alors les $T\sigma^i_n$ ont des degrés déterminés m^i sur H_n et leur somme est celui de TH^1_n. Même propriété pour une n-cellule au lieu de H^1_n.*

31. Transformations $K_n \to H_n$. Après ces préliminaires, considérons les t.u.c. $K_n \to H_n$. D'après **8**, il existe une t.u.c. T' de la même classe que T, dite *réduite* [15]), telle que $T'K_{n-1} = A$, un point donné de H_n. Dans ces conditions, σ_n^i étant les n-simplexes de K_n, $T\sigma_n^i$ recouvrira H_n avec un certain degré m^i, ce que nous exprimerons par la relation

$$T\sigma_n^i = m^i H_n. \tag{31.1}$$

Les m^i sont les *caractères* de T, et il existe une réduite T pour tout ensemble de valeurs entiéres m^i (**8**).

Soient T, T' deux réduites aux caractères m^i, m'^i. Pour qu'elles soient de la même classe, il faut et il suffit qu'il existe un polytope $K_n \times l$ et une t.u.c. U: $K_n \times l \to H_n$, tels que $TK_n = UK_n$, $TK_n =$ le complexe continu (U, K_n').

Soit H_n^i la sphère frontière de $\sigma_n^i \times l$. Puisque UH_n^i est homotope à un point sur H_n, son degré y est nul (Lemme 6). D'ailleurs si l'on se donne simplement une t.u.c. U de l'ensemble des H_n^i en H_n, telle que les degrés des H_n^i soient tous nuls, ces sphères continues sont homotopes à des points sur H_n, et on peut étendre U au prisme $K_n \times l$ tout entier (méthode de Hopf).

Orientons H_n^i de manière que $\sigma_n'^i$ en soit une cellule positive. D'après le Lemme 5, σ_n^i en sera alors une cellule négative. Comme le degré de UH_n^i est nul, on aura

$$m'^i - m^i + \text{degré de } UF(\sigma_n^i \times l) = 0. \tag{31.2}$$

Ainsi pour que T, T' soient de la même classe, il faut et il suffit que l'on puisse choisir les degrés des $UF(\sigma_n^i \times l)$ de manière à satisfaire à ces relations.

Supposons en particulier que T, T' aient les mêmes caractères. Les degrés des sphères continues $UF(\sigma_n^i \times l)$ sont des sommes de ceux des cellules continues $U\sigma_{n-1}^i \times l$. Prenons ces dernières toutes en coïncidence avec A, donc de degrés nuls. Ceux des $UF(\sigma_n^i \times l)$ le seront également, (31.1) est satisfait, donc T, T' sont de la même classe. Ainsi, *deux réduites aux mêmes caractères sont de la même classe.*

---

[15]) Les réduites ont été employées également (indépendamment de notre travail) par M. H. Whitney, sous le nom de *normal maps*, dans un article sur les mêmes questions inséré au Duke Journal **31** (1937), pp. 51-55, notamment p. 52.

32. Soient T, T^* deux réduites aux caractères m^i, m^{*i}. Les réduites aux caractères $m^i + m^{*i}$ appartiennent à une classe fixe. Nous en designérons une représentante quelconque par $T + T^*$, dite *somme* de T et T^*. Or, résultat dû à M. Freudenthal [2]):

Théorème 11. *La classe de $T + T^*$ ne dépend que de celles de T, T^* et non du choix particulier de ces réduites dans leurs classes.*

En effet, soit T' une réduite de même classe que T, et soient m'^i ses caractères. Il suffit de montrer que $T^* + T'$, réduite aux caractères $m^{*i} + m'^i$, est de la même classe que $T^* + T$. Commençons par prendre sur σ_n^i deux n-cellules ζ_n^i, η_n^i, puis concentrons T, T' sur ζ_n^i. Puisque T, T' continuent à être des réduites aux mêmes caractères, qu'auparavant, elles sont toujours de la même classe. Donc, il leur correspond $K_n \times l, U, \ldots$, comme à **31**, et (31.1) est vérifée.

Choisissons maintenant une nouvelle t.u.c. V de l'ensemble des H_n^i en H_n telle que: (a) en dehors des η, η', on a $V = U$; (b) $VF(\eta_n^i) = VF(\eta_n'^i) = A$, comme auparavant; (c) $V\eta_n^i = V\eta_n'^i = m^{*i} H_n$. Comme nous avions $U\eta_n^i = U\eta_n'^i = A$, V est toujours une t.u.c. $\Sigma H_n^i \to H_n$, mais cette fois $V\sigma_n^i = (m^i + m^{*i}) H_n$, $V\sigma_n'^i = (m'^i + m^{*i}) H_n$. On en conclut que VH_n^i a le même degré zéro sur H_n que UH_n^i. Donc V peut être étendue au prisme $K_n \times l$ tout entier.

Or, V, $T + T^*$, $T' + T^*$ sont dans la même relation que U, T, T'. Donc $T + T^*$ et $T' + T^*$ sont de la même classe.

33. Puisque la classe inessentielle contient la réduite T_0 aux m^i tous nuls, la somme de deux transformations inessentielles est inessentielle. Désignons par $-T$ la réduite aux caractères $-m^i$. $T + (-T)$ est alors T_0, donc inessentielle. De plus, soit T inessentielle et prenons $T' = T_0$ dans (31.1). Les m' étant tous nuls, on pourra y remplacer m^i par $-m^i$ partout, donc $-T$ est inessentielle également. Enfin, (a) si T et T' sont des la même classe, $T + (-T')$, écrite $T - T'$, est de la même classe que $T' + (-T')$, qui est T_0, donc elle est inessentielle; (b) $T + T_0$ est de la même classe que T; (c) l'addition est associative et commutative. On en conclut que si l'on écrit $T = 0$ lorsque T est inessentielle, l'addition des classes engendre un groupe additif G_n (*groupe de Hopf* selon M. Freudenthal).

On peut aussi procéder de la manière suivante. Si l'on pose $T_0 = 0$, l'addition des T engendre un isomorphe Γ du groupe additif libre des caractères m^i. Dans Γ, les T inessentielles sont représentées par les éléments d'un sous-groupe Γ' et $G_n = \Gamma - \Gamma'$.

Il est à peine besoin d'observer que, de par sa définition même, G_n est un invariant topologique de K_n.

34. Extension à K_p, $p>0$. Nous désignerons toujours par σ_q^i les q-simplexes de K_p, et par K_q l'ensemble des simplexes de K_p de dimension $\leqslant q$. Nous allons donc considérer les t. u. c. T: $K_n \to H_n$. On dira que T est *normale*, si elle possède une extension $\overline{T}$ à K_{n+1}, c. à d. s'il existe une t. u. c. $\overline{T}$: $K_{n+1} \to H_n$ coïncidant avec T sur K_n. On identifiera alors K_n avec le complexe ainsi désigné dans ce qui précède.

Pour que T soit normale, il faut et il suffit que les sphères continues $TF(\sigma_{n+1}^i)$ sur H_n soient frontières de $(n+1)$-cellules continues, c. à d. que leurs degrés sur H_n soient nuls. Or, si T' est de même classe que T (par rapport à K_n), les degrés de $TF(\sigma_{n+1}^i)$ et $T'F(\sigma_{n+1}^i)$ sont égaux, puisque ces sphères sont homotopes sur H_n. Donc, si T est normale, il en est de même de T'. Ainsi la normalité est une propriété des classes. Nous pouvons donc parler de classes normales.

Conséquence: si T est normale, les réduites de même classe le sont également. Soient alors T, T' deux réduites normales. Les degrés de $(T+T')F(\sigma_{n+1}^i)$ et $-TF(\sigma_{n+1}^i)$ sont respectivement la somme de ceux de $TF(\sigma_{n+1}^i)$ et $T'F(\sigma_{n+1}^i)$, et le négatif de celui de $TF(\sigma_{n+1}^i)$, donc nuls. Par conséquent $T+T'$ et $-T$ sont normales. Enfin, si T est une réduite de caractères m^i nuls, donc inessentielle, les degrés des $T\sigma_n^i$, donc des $TF(\sigma_{n+1}^i)$, sont bien nuls et T est normale. On en conclut que les opérations du groupe G_n effectuées sur les classes normales engendrent un sous-groupe G_{pn} de G_n, composé de classes normales. Nous allons montrer que G_{pn} est un invariant topologique de K_p.

35. Soit, en effet, L_p un nouveau complexe, en coïncidence en tant qu'ensemble de points avec K_p. Nous désignerons par ζ_q^i, L_r respectivement ses q-simplexes et l'ensemble de ceux de dimension $\leqslant r$, et par Γ_{pn} son groupe G_{pn}. Il s'agit de montrer que tous deux sont isomorphes.

En vertu du Théorème 1, K_p, L_p ont des subdivisions K_p', L_p' homotopes respectivement à des sous-complexes de L_p, K_p. Nous désignerons par U l'homotopie appliquée à K_p', et par V celle appliquée à L_p'. Si K_r', L_r' sont les subdivisions de K_r, L_r induites par K_p', L_p', U induit une homotopie de K_r' en un sous-complexe de L_r, et V une homotopie de L_r' en un sous-complexe de K_r.

Soit T une t. u. c. normale $L_n \to H_n$ et $\overline{T}$ son extension à L_{n+1}. A tout point $x \in K_n$ correspond ainsi le point $y = Ux$ de L_n, et par suite le point $z = Ty = TUx$ de H_n.

Il est clair que $S = TU$ est une t. u. c. $K_n \to H_n$. Nous allons étudier la correspondance $T \to S$ ainsi déterminée par U.

Tout d'abord S est normale. En effet, si T est une extension de T à L_{n+1}, $\overline{S} = \overline{T}U$ est une t. u. c. $K_{n+1} \to H_n$, égale à S sur K_n, c. à d. une extension de S à K_{n+1}, ce qui assure la normalité. De plus, quand T varie dans une classe fixe, il en est manifestement de même de S. Donc $T \to S$ est une correspondance U^* entre les classes $\{T\}$ et $\{S\}$. C'est cette correspondance qui nous intéresse surtout.

Je dis que si T est une réduite, il en est de même de S. En effet, on aura alors $TL_{n-1} = A$ et, comme $UK_{n-1} \subset L_{n-1}$, on a $TUK_{n-1} = SK_{n-1} = A$.

Supposons donc que S, T soient toutes deux des réduites. La cellule σ_n^i est décomposée par K_n' en une somme de cellules orientées σ_n^{ij}, en concordance avec elle. Chacune des σ_n^{ij} est transformée par U en un certain simplexe de L_n, que nous désignerons par une somme $\eta_h^{ij}\zeta_n^h$, où tous les η^{ij} sauf un sont nuls et celui-ci est ± 1. Par conséquent le degré de $S\sigma_n^i$ est la somme de ceux des $T(\sum \eta_h^{ij}\zeta_n^h)$, c. à d. si m^i, n^i sont les caractères de S, T:

$$m^i = \sum \eta_h^{ij} n^h. \tag{35.1}$$

On en tire de suite

$$U^*(T \pm T') = U^*T \pm U^*T'.$$

Donc U^* est un homomorphisme $\Gamma_{pn} \to G_{pn}$. De même, à V correspond un homomorphisme V^*: $G_{pn} \to \Gamma_{pn}$. Pour montrer l'identité des deux groupes, il suffit d'établir que U^* ou V^* est un isomorphisme, donc, comme nous allons le faire, que

$$U^*V^* = 1, \qquad V^*U^* = 1. \tag{35.2}$$

36. Tout revient ainsi à établir p. ex. la première des relations (35.2). Soit donc S une t. u. c. normale $K_n \to H_n$. La t. u. c. SVU: $K_n \to H_n$ induit U^*V^*. Tout revient donc à démontrer que SVU est de la même classe que S. Or, VU est une homotopie de K_n en un sous-complexe de K_n. Nous avons donc une t. u. c. W du prisme $K_n \times l$ en K_p, telle que $WK_n = K_n$, $WK_n' = VUK_n =$ un sous-complexe de K_n. En vertu du Théorème 1, nous pouvons réduire le complexe continu $WK_n \times l$ à la coïncidence avec un sous-complexe de K_{n+1}. Nous aurons donc au lieu de VU une homotopie dans K_{n+1} que nous désignerons par (VU) et qui produit le même effet que VU sur K_n. Comme S est normale, elle a une extension $\bar{S}$ sur K_{n+1}. Par conséquent $S(VU)$ est une homotopie sur H_n du complexe continu SK_n en $SVUK_n$. En d'autres termes, S et SVU sont de la même classe, ce qui démontre (35.2) et par conséquent l'invariance topologique de G_{pn}.

37. Rapport avec les groupes d'homologie. Arrivés où nous en sommes, les démonstrations des Théorèmes 2 (Hopf), 6 (Freudenthal) et 7 n'offrent nulle difficulté. Nous pouvons énoncer le théorème compréhensif suivant:

Théorème 12. *Soit K_n le n-sous-complexe maximal de K_p, $p \geqslant n \geqslant 0$. L'addition des t.u.c. normales $K_n \to H_n$ donne lieu à un groupe additif abélien G_{pn} qui est un invariant topologique de K_p. Toute classe des t.u.c. normales en question est caractérisée par une classe homologique des n-cocycles*[16]*). La correspondance de classe à classe ainsi définie est une isomorphie entre G_{pn} et le groupe additif g^n des classes d'homologie des n-cocycles.*

Soient

$$F(\sigma_{q+1}^i) = \varepsilon_{q,j}^i \sigma_q^j \tag{37.1}$$

les relations d'incidence pour K_p. Soient K^p le complexe abstrait duel[17]) de K_p et σ_i^q l'élément de K^p correspondant à σ_q^i de K_p. Les relations d'incidence de K^p sont par définition:

$$F(\sigma_i^q) = \varepsilon_{q,i}^j \sigma_j^{q+1}. \tag{37.2}$$

Ceci posé, soit T une réduite $K_n \to H_n$, aux caractères m^i, et considérons la chaîne $\gamma^n = m^i \sigma_i^n$ de K^p. Je dis que pour que γ^n soit un cocycle, il faut et il suffit que T soit normale.

En effet, pour que T soit normale, il faut et il suffit que les sphères $TF(\sigma_{n+1}^i)$ soient de degré 0 sur H_n. Comme m^i est le degré de σ_n^i, en vue de (37.1) pour $q=n$, cette condition revient à

$$\varepsilon_{n,j}^i m^j = 0. \tag{37.3}$$

Donc, pour que T soit normale, il faut et il suffit que ses caractères m satisfassent à (37.3). A toute solution de ce système

---

[16]) Au lieu de pseudocycle ou cycle duel, nous adoptons ici le terme plus commode de *cocycle* de M. Whitney.

[17]) Voir sur ces complexes notre récent article du Bull. Amer. Math. Soc. **43** (1937), pp. 345-358.

en m entiers, il correspond une T normale. Pour que T soit inessentielle, il faut et il suffit que l'on puisse satisfaire à (31.1) avec $m'^i = 0$. Il faudra donc pouvoir trouver des entiers d^i, les degrés des sphères $U\sigma_{n-1}^i \times l$, tels que

$$m^i = \varepsilon_{n-1,j}^i d^j. \tag{37.4}$$

D'un autre côté, pour que γ^n soit un cocycle, il faut et il suffit que $F(m^i \sigma_i^n) = 0$, ce qui revient à (37.3), c. à d. à la condition de normalité. Le groupe additif des n-cocycles est donc isomorphe à celui des réduites normales. Enfin, pour que $\gamma^n \sim 0$, il faut et il suffit qu'il soit une combinaison linéaire des $F(\sigma_i^{n-1})$, c. à d. que

$$m^i \sigma_i^n = \varepsilon_{n-1,h}^j \sigma_j^n d^h. \tag{37.5}$$

Ceci revient à (37.4), c. à d. à la condition nécessaire et suffisante pour que T soit inessentielle. Par conséquent, G_{pn} est bien isomorphe au groupe d'homologie g^n des n-cocycles. Ceci démontre la seule partie du Théorème 12 qui n'a pas encore été établie aux numéros précédents.

38. Retour à la methode du produit. Dans ce qui précède, nous avons laissé de côté le produit $K_p \times H_n$. Bien entendu, on peut réinterpréter ce que nous avons fait en termes de ce produit. Pour préciser, alors qu'auparavant les transformations normales étaient exprimées en termes de certains n-complexes continus $\subset K_p \times H_n$, ici nous les avons décrites en termes des t.u.c. $K_n \to H_n$. Nous aurions pu tout aussi bien prendre les images de ces t.u.c. dans $K_p \times H_n$, mais comme leur addition s'est faite ici dans $K_n \times H_n$, ce procédé n'aurait pas offert d'avantage.

39. Cas spécial $p=2$. Alors que pour $p=n$ (cas de M. Freudenthal[2])) et pour $p>n=1$ (cas de M. Bruschlinski[2])) les groupes G_{pn} sont des groupes de t.u.c. $K_p \to H_n$, dans le cas général ce ne sont que des groupes de t.u.c. de sous-complexes de K_p en H_n[18]). Comme les groupes reliés aux t.u.c. de K_p lui-même offrent de beaucoup le plus d'intérêt, nous nous permettons d'indiquer un cas nouveau, où les groupes d'homotopie ont la même relation avec les groupes de cocycles.

---

[18]) Dans une note récente des Annals of Math. **38** (1937), pp. 733-738, M. K. Borsuk a introduit d'une manière entièrement différente des groupes additifs de t. u. c. $M \to H_n$, M séparable métrique et de dimension $<2n$, qui sont reliés directement aux groupes de Betti des n-cycles, et non plus des n-cocycles.

Considérons effectivement un K_2 et les t.u.c. T: $K_2 \to H_1 \times H_2$, et soit $y \in K_2$. On aura $Ty = x_1 \times x_2$, $x_n \in H_n$. Par suite, T_n: $y \to x_n$ est une t.u.c. $K_2 \to H_n$, dite *projection* de T sur H_n. Les deux projections déterminent T, et T_1 est normale (la normalité ne se pose pas pour T_2).

Soit $A = A_1 \times A_2$, où A_n est un point fixe de H_n. Lorsque T_n varie dans une classe déterminée, il en est de même de T. Profitons en pour ramener T_1, T_2 à des réduites: $T_n K_{n-1} = A_n$. La T résultante est dite *réduite* également.

Soient σ_n^i les n-simplexes de K_2 et supposons T réduite. $T_n \sigma_n^i$ aura alors un degré déterminé m_n^i sur H_n. Les m sont les *caractères* de T. Toute réduite aux mêmes caractères que T est de même classe. C'est une conséquence immédiate de la même propriété pour les T_n.

Comme les m_1^i sont les caractères de T_1, ils doivent satisfaire à la condition de normalité pour cette dernière. D'ailleurs, à part cela, les m sont arbitraires. En effet, supposons qu'on se les donne avec les m_1^i satisfaisant simplement à cette condition. On peut alors se donner $T_1 K_1$ sur H_1. Puisque toute H_n, où $n > 1$, est inessentielle sur H_1, on pourra étendre T_1 à K_2 tout entier.

Il s'agit maintenant de construire T_2. A cet effet, on prend d'abord $T_2 \sigma_n^i = A_2$, où $n = 0,1$. Puis on prendra $T_2 \sigma_2^i$ telle qu'elle recouvre H_2 avec le degré m_2^i. Ceci définit T_2, donc T pour K_2 tout entier.

On pourra alors définir l'addition $T + T'$ par la condition que les projections de la somme soient les sommes des projections, et de même, de façon évidente, pour $-T$. D'ailleurs, T est inessentielle quand, et seulement quand ses projections le sont. On écrira alors $T = 0$. Ceci donne ainsi lieu à un groupe additif G. En s'en rapportant au Théorème 12, on voit donc que l'on a:

Théorème 13. *Les classes de t.u.c. $K_2 \to H_1 \times H_2$ donnent lieu à un groupe additif abélien G, et l'on a $G = G_{21} \oplus G_{22}$ (somme directe), où les facteurs sont les groupes des projections sur les H_n.*

Ce sont d'ailleurs les G_{2n} du Théorème 12, et par conséquent ils sont isomorphes aux groupes d'homologie g^1, g^2 des cocycles.

On locally bicompact spaces.

By

H. E. Vaughan (Ann Arbor, Mich. U. S. A.). [1]

The object of this paper is to define and study two classes of locally bicompact spaces [2]) which may be considered as generalizations of the class of locally compact, separable, metrisable spaces. Both generalizations are based on the well known fact that a characteristic property of spaces of this class is that of being the sum of a sequence [3]) of compact metrisable spaces, each of which is interior to the next.

Guided by this, *a space will be said to belong to the class S_1* [4]) *if it is the sum of a sequence of bicompact spaces each of which is interior to the next, and will be said to belong to the class S_2 if each of the bicompact spaces in question has the property that each of its closed subsets is a G_δ* [5]). Evidently the spaces which belong to the class S_2 also belong to the class S_1, while the class of metrisable spaces belonging to either class is exactly that of the locally compact, separable, metrisable spaces.

---

[1]) Alfred H. Lloyd Fellow, University of Michigan.

[2]) All spaces considered in this paper will be Hausdorff spaces. The word *neighborhood* (of a point) will be used to denote any set to which the point in question is interior. A space is said to be *bicompact* if every covering of the space by open sets is reducible to a finite one, and is said to be *locally bicompact* if each point has a neighborhood which is a bicompact space. For a detailed study of such spaces, see Alexandroff and Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verh. Akad. Wet. Amsterdam, **14** (1929), pp. 1-96.

[3]) By a *sequence* is meant a denumerable ordered set which is ordinally similar to the set of positive integers.

[4]) It seems undesirable, at this time, to add another name to the large number already in use in the theory of abstract spaces. Such a step can well be delayed until the definitions have proved their utility.

[5]) See [2]), p. 35, also Čech, *Sur la dimension des espaces parfaitement normaux*, Bull. Intern. Acad. Sc. de Bohême, 1932.