Après avoir démontré — ce qui ne comporte aucune difficulté — les théorèmes de la théorie des fonctions caractéristiques, analogues à ceux de M. Glivenko[10]) et M. Cramér[11]) pour les lois de probabilité de deux variables, on peut remplacer la convergence uniforme de la suite de fonctions caractéristiques par des conditions plus faibles.

[10]) V. Glivenko, *Sul teorema limite della teoria delle funzioni caratteristiche*, Giorn. Istit. Attuari **7** (1936), p. 160—167.

[11]) H. Cramér, *Random variables and Probability Distributions*, Cambridge 1937, p. 29—31 et 121.

Sur le prolongement des transformations en surfaces sphériques.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

Etant donnés dans une variété n-dimensionnelle $\mathfrak{X}$ deux ensembles fermés et disjoints X et Y, on peut étudier leur situation mutuelle dans $\mathfrak{X}$ soit par la méthode d'homologie[1]), soit, dans quelques questions particulières, par la considération du groupe fondamental de $\mathfrak{X}-X-Y$ [2]).

La troisième méthode, très peu développée, est celle de mettre en jeu aussi les transformations continues f de X en sous-ensembles d'un espace $\mathfrak{S}$ convenablement choisi et d'envisager ces transformations au point de vue de l'existence de leurs prolongements $f(\mathfrak{X}-Y)\subset\mathfrak{S}$.

C'est ainsi que M. Borsuk a examiné récemment[3]) le cas où $\mathfrak{X}$ est une surface sphérique n-dimensionnelle S^n et $X=\mathfrak{S}$, en aboutissant à des conditions nécessaires de nature homologique (et qui sont aussi suffisantes dans quelques cas spéciaux), pour que toute transformation $f(X)\subset X$ admette un prolongement $f(S^n-Y)\subset X$ [4]).

Dans la suite, nous allons fixer $\mathfrak{S}$: ce sera toujours la surface sphérique m-dimensionelle S^m $(m>0)$. Nous aboutirons à des conditions pour que toute transformation $f(X)\subset S^m$ admette un prolongement $f(\mathfrak{X}-Y)\subset S^m$. Ces conditions seront également homologiques, mais cette fois elles seront suffisantes (sans être généralement nécessaires).

[1]) Voir p. ex. S. Lefschetz, *Topology*, New-York 1930, p. 142.

[2]) K. Reidemeister, *Knotentheorie*, Berlin, Springer 1932.

[3]) K. Borsuk, Fund. Math. **29** (1937), p. 191-205.

[4]) c. à d. pour que X soit un rétracte de S^n-Y.

La partie I contient l'exposé de la méthode et l'énoncé du lemme principal, dont la démonstration sera remise à la partie III. La partie II est consacrée à quelques appliquations du lemme principal; les parties II et III peuvent être lues indépendemment l'une de l'autre.

I

1. *Préliminaires.* $\mathfrak{X}$ désignera un espace métrique compact, donné dans une décomposition fixe

$$\mathfrak{X}=X+Q+Y \quad \text{où} \quad X\cdot Y=X\cdot Q=Y\cdot Q=0,$$

X et Y désignant des ensembles fermés et Q un polyèdre simplicial infini [5]).

Tous les simplexes de Q seront supposés orientés. Un simplexe k-dimensionnel (orienté) sera désigné par a_i^k et l'ensemble fermé qui lui correspond par $|a_i^k|$. La chaîne $(k-1)$-dimensionnelle qui est la frontière combinatoire de a_i^k sera désignée par ∂a_i^k.

2. *Cycles infinis mod Y* [6]). Soit $\mathfrak{G}$ un groupe abelien. Une fonction quelconque qui fait correspondre à tout simplexe k-dimensionnel a_i^k de Q un élément $\alpha_i \epsilon \mathfrak{G}$ sera désignée par

$$A^k=\sum \alpha_i a_i^k$$

et appellée *chaîne k-dimensionnelle infinie* à coefficients de $\mathfrak{G}$.

Posons

$$|A^k|=\sum_i |a_i^k|$$

où la sommation s'étend à tous les indices i pour lesquels $\alpha_i \neq 0$. On dira que A^k est une *chaîne mod* Y, lorsque

$$\overline{|A^k|}\cdot X=0 \quad {}^{7}).$$

[5]) Un *polyèdre infini* est un ensemble Q qui admet une *décomposition simpliciale*, c. à d. une décomposition de la forme $Q=\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ où Δ_i sont des simplexes géometriques fermés assujettis aux conditions:

1) $\Delta_i \cdot \Delta_j$ est une face (de dimension $\geqslant -1$) de Δ_i et de Δ_j,

2) aucun point de Q n'est un point d'accumulation d'une suite de points appartenant à de divers termes de la suite $\{\Delta_i\}$.

Ainsi, un polyèdre infini est *localement* un polyèdre fini. La décomposition simpliciale de Q étant fixée, nous dirons que Q est un polyèdre infini *simplicial*.

[6]) Cf. S. Lefschetz, l. cit., Chap. VII.

[7]) $\bar{A}$ désigne la fermeture de A dans $\mathfrak{X}$.

Soit

$$\partial A^k=\sum_i \alpha_i \partial a_i^k.$$

Si $\partial A^k=0$, on dira que A^k est un *cycle infini*. Si, de plus, A^k est une chaîne mod Y, on dira que A^k est une *cycle infini mod* Y (à coefficients du groupe $\mathfrak{G}$).

Un cycle infini k-dimensionnel γ^k mod Y (coefficient de $\mathfrak{G}$) sera dit *homologue à zéro mod* Y, en symboles:

$$\gamma^k \sim 0 \text{ mod } Y,$$

lorsqu'il existe une chaîne $(k+1)$-dimensionnelle A^{k+1} mod Y (à coefficients de $\mathfrak{G}$) telle que

$$\gamma^k=\partial A^{k+1}.$$

3. *Cellules duales.* Admettons maintenant que $Q=Q^n$ est une variété orientable à n-dimensions [8]) $(n>0)$. Nous considérons la composition de Q^n, duale à celle en a_i^k. Les cellules de cette décomposition seront dites *cellules duales* tout court. La cellule duale à a_i^k sera désignée par b_i^{n-k} et orientée de façon à avoir

$$\chi(a_i^k;\, b_i^{n-k})=1 \quad {}^{9}). \tag{3.1}$$

L'ensemble fermé qui correspond à b_i^{n-k} sera désigné par $|b_i^{n-k}|$ et la frontière combinatoire de b_i^{n-k} par s_i^{n-k-1}:

$$s^{n-k-1}=\partial b_i^{n-k}. \tag{3.2}$$

Le polyèdre $|s_i^{n-k-1}|$ est homéomorphe à la surface sphérique $(n-k-1)$-dimensionnelle S^{n-k-1}, que nous supposons orientée d'une manière fixe. D'autre part, $|s_i^{n-k-1}|$ sera supposé orienté par le cycle (à coefficients entiers) s_i^{n-k-1}. Ceci fait, nous pouvons fixer une transformation continue

$$\varphi_i^{n-k-1}(S^{n-k-1})\subset|s_i^{n-k-1}| \tag{3.3}$$

parmi celles qui ont le degré 1.

[8]) Pour tout ce qui concerne la définition des variétés et des cellules duales, voir S. Lefschetz, *Topology*, Ch. III, § 2.

[9]) L'opérateur χ désigne le coeficient d'intersection.

4. ***Les groupes*** **(m^i).** Considérons, pour un m positif, les transformations continues g de S^i en sous-ensembles de S^m; en symboles:

$$g(S^i)\subset S^m \qquad (m>0).$$

La classe des transformations homotopes à g sera désignée par $[g]$. Etant donnés deux classes $[g_1]$ et $[g_2]$, on définit la classe $[g_1]+[g_2]$ comme il suit:

Soit $S^i=S^i_-+S^i_+$ la décomposition de S^i en deux hemisphères et soit $q\epsilon S^m$. Il existe alors deux transformations $g'_1\epsilon[g_1]$ et $g'_2\epsilon[g_2]$ telles que:

$$\left.\begin{array}{lll}\text{pour tout} & x\epsilon S^i_- & g'_1(x)\\ \text{pour tout} & x\epsilon S^i_+ & g'_2(x)\end{array}\right\}=q.$$

Posons:

$$g(x)=\begin{cases} g'_1(x) & \text{pour tout} \quad x\epsilon S^i_+ \\ g'_1(x) & \text{pour tout} \quad x\epsilon S^i_- \end{cases}$$

et

$$[g]=[g_1]+[g_2].$$

On peut démontrer que cette addition est univoque et qu'elle conduit à un groupe abelien au plus dénombrable; nous les désignerons par (m^i) [10]. L'élément 0 de ce groupe correspond à la classe des transformations inessentielles.

Le groupe (m^i) à été calculé dans les cas suivants:

1⁰ (m^i) pour $i<m$. Toute transformation $g(S^i)\subset S^m$ est alors inessentielle et le groupe (m^i) se réduit à l'élément 0.

2⁰ (m^m); la classe d'une transformation $g(S^m)\subset S^m$ est définie biunivoquement par le degré de g [11]; de-même, l'addition de classes correspond à celle de degrés. Le groupe (m^m) est donc cyclique infini [12]:

[10]) Le groupe (m^i) n'est rien d'autre que le i-ième groupe d'homotopie $\pi_i(S^m)$ de S^m introduit par M. W. Hurewicz (Proceed. Akad. Amsterdam **38** (1935), p. 113). La définition du texte est celle de M. K. Borsuk (C. R. Paris **202** (1936), p. 1400-3). La notation (m^i) est due à M. H. Freudenthal (Comp. Math. **5** (1937), p. 299).

[11]) P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie I*, Berlin, Springer 1935, p. 501-505; H. Whitney, Duke Math. Journ. **3** (1937), p. 46-50.

[12]) W. Hurewicz, l. cit., p. 114.

3⁰ (m^{m+1}) pour $m\geqslant3$ est cyclique d'ordre 2 [13]).

4⁰ (m^{m+2}) pour $m\geqslant3$ se réduit à l'élément 0 [14]).

5⁰ (1^i) pour $i\geqslant2$ se réduit à l'élément 0 [15]).

6⁰ (2^i) et (3^i) sont toujours isomorphes [16]).

On déduit [17]) facilement de 2⁰ que

(4.1) *$\varphi(S^i)\subset S^i$ étant une transformation de degré η, on a pour toute transformation continue $g(S^i)\subset S^m$*

$$[g\varphi]=\eta[g].$$

5. ***Définition de*** **$\gamma^k(f)$.** Soit P^k un sous-polyèdre k-dimensionnel de Q^n [18]), tel que $\overline{P^k}\cdot X=0$. Considérons une transformation continue

$$f(X+Q^n-P^k)\subset S^m \qquad (m>0). \tag{5.1}$$

Pour tout a_i^k de Q^n, on a donc $|s_i^{n-k-1}|\subset Q^n-P^k$, et la transformation

$$f\varphi_i^{n-k-1}(S^{n-k-1})\subset S^m \tag{5.2}$$

est bien définie. Posons

$$\alpha_i(f)=[f\varphi_i^{n-k-1}]\,\epsilon\,(m^{n-k-1}). \tag{5.3}$$

Toute transformation continue $\varphi(S^{n-k-1})\subset|s_i^{n-k-1}|$ de degré 1 étant homotope à φ_i^{n-k-1}, on a $[f\varphi]=[f\varphi_i^{n-k-1}]$. L'élément $\alpha_i(f)$ est donc défini univoquement par a_i^k et par la transformation (5.1).

Posons

$$\gamma^k(f)=\sum_i \alpha_i(f)\, a_i^k \tag{5.4}$$

où la sommation s'étend à tous les a_i^k de Q^n.

[13]) L. Pontrjagin, Congrès International de Mathématiciens, Oslo 1936, Tome II, p. 140; H. Freudenthal, l. cit., p. 301.

[14]) L. Pontrjagin, l. cit.

[15]) Alexandroff-Hopf, l. cit., p. 515.

[16]) W. Hurewicz, l. cit., p. 119.

[17]) H. Freudenthal, l. cit., p. 303.

[18]) *Sous-polyèdre de Q^n* veut dire: somme (d'un nombre fini ou non) de simplexes (fermés) de la subdivision simpliciale fixée de Q^n. Le terme *n-dimensionnel* est employé ici toujours dans le sens d'*au plus n-dimensionnel*.

Si $|a_i^k|$ non $\subset P^k$, on a $|b_i^{n-k}| \subset Q^n - P^k$. La transformation f est donc inessentielle sur $|s_i^{n-k-1}|$ et par conséquent la transformation (5.2) est inessentielle, c à d. $a_i(f)=0$. Il en résulte que

$$|\gamma^k(f)| \subset P^k. \tag{5.5}$$

6. *Lemme principal.* *$\gamma^k(f)$ est un cycle infini k-dimensionnel* mod Y *à coefficients de* $(\mathfrak{m}^{n-k-1})$.

La relation $\gamma^k(f) \sim 0$ mod Y *implique l'existence: d'un sous-polyèdre $(k-1)$-dimensionnel P^{k-1} de Q^n tel que $\overline{P^{k-1}} \cdot X = 0$, et d'une transformation continue*

$$f^*(X + Q^n - P^{k-1}) \subset S^m$$

qui coïncide avec f sur X.

Ce lemme sera démontré dans la partie III.

7. *Parallélisme de f et de $\gamma^k(f)$.* On a en vertu de (5.4) et de (3.1)

$$\chi[\gamma^k(f); b_i^{n-k}] = \chi[a_i(f) a_i^k; b_i^{n-k}] = a_i(f), \tag{7.1}$$

donc d'après (3.2)

$$v[\gamma^k(f); s_i^{n-k-1}] = a_i(f). \text{ [19]} \tag{7.2}$$

Désignons par $\hat{Q}^n$ la subdivision barycentrique de Q^n. Soit $\hat{\Lambda}^{n-k}$ une chaîne finie $(n-k)$-dimensionnelle de $\hat{Q}^n$ à coefficients d'un groupe abelien $\mathfrak{G}$, telle que $|\partial \hat{\Lambda}^{n-k}| \subset \hat{Q}^n - P^k$. On trouve alors facilement une suite finie $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in \mathfrak{G}$ telle que

$$\partial \hat{\Lambda}^{n-k} \sim \sum_{i=1}^{r} \beta_i s_i^{n-k-1} \quad \text{dans} \quad \hat{Q}^n - P^k, \tag{7.3}$$

ce qui implique en vertu de (7.2) que

$$\chi[\gamma^k(f); \hat{\Lambda}^{n-k}] = \sum_{i=1}^{r} \beta_i a_i(f). \tag{7.4}$$

Etant donné un cycle fini m-dimensionnel $\hat{\gamma}^m$ de $\hat{Q}^n - P^k$ à coefficients de $\mathfrak{G}$, on désignera par $\mathrm{g}(f; \hat{\gamma}^m)$ le degré de la transformation f sur le cycle $\hat{\gamma}^m$ [20].

[19]) L'opérateur v désigne le coefficient d'enlacement.

[20]) Le groupe $B^m(S^m)$ coef. $\mathfrak{G}$ étant isomorphe à $\mathfrak{G}$, on définit $\mathrm{g}(f, \hat{\gamma}^m)$ comme l'élément de $B^m(S^m)$ coef. $\mathfrak{G}$ déterminé par le cycle $f(\hat{\gamma}^m)$; cf. p. ex. Alexandroff-Hopf, l. cit., p. 491.

Admettons que $n = m + k + 1$. On a alors $n - k - 1 = m$ et l'élément $\mathrm{g}(f; \partial \hat{\Lambda}^{n-k}) \in \mathfrak{G}$ est bien déterminé. L'élément $a_i(f)$ étant, comme on le déduit de sa définition, égal à $\mathrm{g}(f; s_i^{n-k-1})$, on tire de (7.3) et (7.4)

$$\chi[\gamma^k(f); \hat{\Lambda}^{n-k}] = \mathrm{g}(f; \partial \hat{\Lambda}^{n-k}). \tag{7.5}$$

Admettons, de plus, que $\mathfrak{X} = S^n = Q^n$ et $X = Y = 0$. Pour tout cycle $\hat{\gamma}^m$ de $\hat{Q}^n - P^k$, on a alors $\hat{\gamma}^m \sim 0$ dans $\hat{Q}^n$, ce qui implique en vertu de (7.5) que

$$v[\gamma^k(f); \hat{\gamma}^m] = \mathrm{g}(g; \hat{\gamma}^m). \tag{7.6}$$

On voit donc que f et $\gamma^k(f)$ sont parallèles dans le sens introduit par M. Borsuk et moi [21]) pour $m=1$.

8. *Le cas de Q^n non orientable.* Même dans ce cas, la définition de $\gamma^k(f)$ et le lemme principal restent valables, si l'on suppose que chaque élément du groupe $(\mathfrak{m}^{n-k-1})$ est d'ordre 2. On a alors $\alpha = -\alpha$ pour tout $\alpha \in (\mathfrak{m}^{n-k-1})$ et la définition (5.3) de $a_i(f)$ reste univoque, malgré que b_i^{n-k} soit non orienté et que s_i^{n-k-1} soit un cycle mod 2.

II

9. *Cycles convergents mod Y.* [22]) Soit $\mathfrak{Y}$ un espace métrique et $Y \subset \mathfrak{Y}$ un ensemble fermé.

Le complexe algébrique k-dimensionnel c^k (à coefficients appartenant à un groupe abelien $\mathfrak{G}$) est dit *ε-complexe* ou *ε-chaîne de $A \subset \mathfrak{Y}$*, lorsque tous ses sommets appartiennent à A (en symboles: $c^k \subset A$) et que la distance entre deux sommets d'un simplexe de c^k reste inférieure à ε.

z^k est dit *ε-cycle k-dimensionnel* mod Y *de A*, lorsque z^k est une ε-chaîne k-dimensionnelle de A et $\partial z^k \subset Y$.

Le ε-cycle z^k mod Y est dit *ε-homologue à zéro* mod Y *dans A*, en symboles:

$$z^k \underset{\varepsilon}{\sim} 0 \bmod Y \text{ dans } A,$$

lorsqu'il existe une ε-chaîne $(k+1)$-dimensionnelle $c^{k+1} \subset A$ telle que $z^k - \partial c^{k+1} \subset Y$.

[21]) K. Borsuk et S. Eilenberg, Fund. Math. **26** (1936), p. 210.

[22]) Cf. L. Vietoris, Math. Ann. **97** (1927), p. 458; S. Lefschetz, Ann. of Math. **29** (1928), p. 232-254; P. Alexandroff. Math. Ann. **106** (1932), p. 191.

Une suite

$$Z^k = (z_1^k, z_2^k, \dots)$$

est dite *vrai cycle k-dimensionnel* mod Y *de* A, lorsqu'il existe un ensemble compact (en soi) $A_1 \subset A$ et une suite de nombres positifs $\varepsilon_i \to 0$, tels que z_i^k est un ε_i-cycle k-dimensionnel mod Y de A_1.

Un vrai cycle Z^k est dit *homologue à zéro* mod Y *dans* A, en symboles:

$$Z^k \sim 0 \text{ mod } Y \text{ dans } A,$$

lorsqu'il existe un ensemble compact $A_1 \subset A$ et une suite $\varepsilon_i \to 0$, tels que $z_i^k \underset{\varepsilon_i}{\sim} 0 \text{ mod } Y$ dans A_1.

Un vrai cycle Z^k mod Y de A est dit *convergent*, lorsqu'il existe un ensemble compact $A_1 \subset A$ et une suite $\varepsilon_i \to 0$, tels que $z_i^k - z_{i+1}^k \underset{\varepsilon_i}{\sim} 0$ mod Y dans A_1.

Le groupe d'homologie qui s'obtient en considérant les cycles k-dimensionnels convergents Z^k mod Y de A (les coefficients étant pris du groupe $\mathfrak{G}$) sera désigné par

$$B^k(A) \text{ mod } Y \text{ coef. } \mathfrak{G}.$$

Dans le cas $Y=0$ le signe „mod Y" sera tout simplement omis.

10. ***Passage des cycles infinis aux cycles convergents.*** Dans les applications qui vont suivre, on admettra toujours que:

1⁰ $\mathfrak{X}$ est un rétracte absolu de voisinage [23]),

2⁰ $X \subset \mathfrak{X}$ est un ensemble fermé,

3⁰ $Y \subset \mathfrak{X} - X$ est un rétracte absolu de voisinage [24]),

4⁰ l'ensemble ouvert $\mathfrak{X} - X - Y$ est donné dans une décomposition simpliciale (infinie) Q^n qui est une variété orientable à n dimensions.

On sait [25]) que dans ces conditions

(10.1) *l'étude des cycles infinis* γ^k mod Y *de* Q^n *équivaut à celle des cycles convergents* Z^k mod Y *de* $\mathfrak{X} - X$.

---

[23]) K. Borsuk, Fund. Math. **19** (1932), p. 222.

[24]) Au lieu de 1⁰ et 3⁰, il suffit d'admettre que $\mathfrak{X}$ est un espace métrique compact et que $Y \subset \mathfrak{X} - X$ est un ensemble fermé tel que

(R) *pour tout entourage U de Y, il existe un entourage V de Y tel que chaque cycle convergent mod Y de V est homologue à zéro mod Y dans U.*

[25]) L'idée de la démonstration est indiquée par M. S. Lefschetz (*Topology*, p. 330-334). La démonstration détaillée est assez simple; elle fait usage de la propriété (R) de [24]).

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe abelien discret et au plus dénombrable. $\mathfrak{G}^*$ désignera le groupe topologique compact, orthogonal [26]) à $\mathfrak{G}$. En particulier, (m^m) étant isomorphe au groupe des nombres entiers, $(m^m)^*$ l'est à celui des nombres réels réduits mod 1.

Soient: Z_1^k un cycle convergent k-dimensionnel mod Y de $\mathfrak{X} - X$ à coefficients de $\mathfrak{G}$ et Z_2^{n-k} un cycle convergent $(n-k)$-dimensionnel mod X de $\mathfrak{X} - Y$ à coefficients de $\mathfrak{G}^*$. Alors:

(10.2) *le coefficient d'intersection* $\chi(Z_1^k; Z_2^{n-k})$ *détermine l'orthogonalité des groupes:*

$$B^k(\mathfrak{X} - X) \text{ mod } Y \text{ coef. } \mathfrak{G}, \qquad B^{n-k}(\mathfrak{X} - Y) \text{ mod } X \text{ coef. } \mathfrak{G}^* \text{ [27])}.$$

11. ***Théorème I.*** *Supposons que*

$$(11.1)_i \qquad B^{i+1}(\mathfrak{X} - Y) \text{ mod } X \text{ coef. } (m^i)^* = 0 \text{ [28])}$$

et soit $f(X) \subset S^m$ une transformation continue.

S'il existe un sous-polyèdre $(n-i-1)$-dimensionnel P^{n-i-1} de Q^n tel que $\overline{P^{n-i-1}} \cdot X = 0$, et si la fonction f admet un prolongement

$$(11.2) \qquad f(\mathfrak{X} - Y - P^{n-i-1}) \subset S^m,$$

alors il existe aussi un sous-polyèdre $(n-i-2)$-dimensionnel P^{n-i-2} de Q^n tel que $\overline{P^{n-i-2}} \cdot X = 0$ et que f admet un prolongement

$$(11.3) \qquad f(\mathfrak{X} - Y - P^{n-i-2}) \subset S^m.$$

En effet, soit $\gamma^{n-i-1}(f)$ le cycle infini mod Y de Q^n à coefficients de (m^i), associé à (11.2). En vertu de $(11.1)_i$, (10.2) et (10.1), on a alors $\gamma^{n-i-1}(f) \sim 0$ mod Y dans Q^n. L'existence du polyèdre P^{n-i-2} et du prolongement (11.3) résulte donc du lemme principal.

---

[26]) L. Pontrjagin, Ann. of Math. **35** (1934), p. 369.

[27]) C'est un théorème correspondant dans la théorie d'orthogonalité de M. L. Pontrjagin (Ann. of Math. **35** (1934), p. 912), au théorème de dualité de M. S. Lefschetz (*Topology*, p. 142 et p. 314). Dans la démonstration, on répète partiellement le raisonnement de M. Pontrjagin (cf. aussi Math. Ann. **105** (1931), p. 190) et le raisonnement employé dans la démonstration de (10.1) (cf. renvoi [25])).

Les démonstrations des propositions (10.1) et (10.2), essentielles pour les théorèmes qui suivent, exigent une étude spéciale dépassant les fins de cet article.

[28]) c. à d. que le groupe en question se réduit à l'élément 0.

Théorème II. [29]) *Pour toute transformation continue $f(X)\subset S^m$, il existe un sous-polyèdre $(n-m-1)$-dimensionnel P^{n-m-1} de Q^n, tel que $\overline{P^{n-m-1}}\cdot X=0$ et que f admet un prolongement*

$$f(\mathfrak{X}-Y-P^{n-m-1})\subset S^m. \tag{11.4}$$

S^m étant un rétracte absolu de voisinage, il existe un entourage U de X et un prolongement $f(U)\subset S^m$ [23]). Il existe donc un sous-polyèdre n-dimensionnel P^n de Q^n tel que $\overline{P^n}\cdot X=0$ et un prolongement $f(\mathfrak{X}-Y-P^n)\subset S^n$. Désignons par P^{n-1} la somme de tous les simplexes au plus $(n-1)$-dimensionnels de P^n et posons $f(x)=q\,\epsilon\,S^m$ pour tout $x\,\epsilon\,P^n-P^{n-1}$. On a ainsi $\overline{P^{n-1}}\cdot X=0$ et $f(\mathfrak{X}-Y-P^{n-1})\subset S^m$.

Pour $i=0,1,\dots,m-1$, on a $(m^i)=0$ et la condition $(11.1)_i$ est alors automatiquement satisfaite. En appliquant donc le th. I successivement à $i=0,1,\dots,m-1$, on aboutit à P^{n-m-1} et au prolongement (11.4).

12. *Etude du cycle $\gamma^{n-m-1}(f)$.* Soit $f(X)\subset S^m$ [30]). A tout cycle convergent m-dimensionnel Z^m de X à coefficients pris de $(m^m)^*$ correspond un élément de $(m^m)^*$ qui est le degré de f sur Z^m. Nous le désignerons par $\mathrm{g}(f;Z^m)$.

En faisant correspondre à tout cycle convergent $(m+1)$-dimensionnel Z^{m+1} mod X de $\mathfrak{X}-Y$ à coefficients de $(m^m)^*$ l'élément $\mathrm{g}(f;\partial Z^{m+1})\,\epsilon\,(m^m)^*$, on obtient un caractère [26]) du groupe

$$B^{m+1}(\mathfrak{X}-Y) \bmod X \text{ coef. } (m^m)^*.$$

La transformation f sera dite *algébriquement prolongeable sur* $\mathfrak{X}-Y$, lorsque ce caractère est 0, c. à d. lorsqu'on a toujours $\mathrm{g}(f;\partial Z^{m+1})=0$.

Evidemment, c'est une condition nécessaire pour l'existence d'un prolongement $f(\mathfrak{X}-Y)\subset S^m$; elle est toujours satisfaite si $B^{m+1}(\mathfrak{X}-Y)$ mod X coef. $(m^m)^*=0$ ou bien $B^m(X)$ coef. $(m^m)^*=0$.

Le caractère qui vient d'être attaché à f détermine en vertu de (10.2) et (10.1) une classe d'homologie mod Y de cycles infinis $(n-m-1)$-dimensionnels γ^{n-m-1} mod Y de Q^n à coefficients de (m^m).

[29]) Ce théorème se laisse établir d'une façon tout à fait élémentaire; cf. S. Eilenberg, Fund. Math. **26** (1936), p. 280 et K. Borsuk, Fund. Math. **29** (1937), p. 162.

Nous désignerons cette classe par $\Gamma^{n-m-1}(f)$. Les cycles

$$\gamma^{n-m-1}\,\epsilon\,\Gamma^{n-m-1}(f)$$

sont caractérisés par l'équation

$$\chi(\gamma^{n-m-1};Z^{m+1})=\mathrm{g}(f;\partial Z^{m+1}), \tag{12.1}$$

qui est satisfaite pour chaque cycle convergent $(m+1)$-dimensionnel Z^{m+1} mod X de $\mathfrak{X}-Y$ à coefficients de $(m^m)^*$. Il en résulte qu'on a $\Gamma^{n-m-1}(f)=0$ dans le cas où f est algébriquement prolongeable sur $\mathfrak{X}-Y$ et seulement dans ce cas.

Soient maintenant: P^{n-m-1} le polyèdre donné par le th. II et $\gamma^{n-m-1}(f)$ le cycle qui correspond au prolongement (11.4). Il résulte de (7.5) que $\gamma^{n-m-1}(f)$ satisfait à (12.1), donc que $\gamma^{n-m-1}(f)\,\epsilon\,\Gamma^{n-m-1}(f)$. La classe d'homologie mod Y de $\gamma^{n-m-1}(f)$ ne dépend donc pas du choix du polyèdre P^{n-m-1} et du prolongement (11.4).

En particulier, si f est algébriquement prolongeable sur $\mathfrak{X}-Y$, on a $\Gamma^{n-m-1}(f)=0$, c. à d. $\gamma^{n-m-1}(f)\sim 0$ mod Y dans Q^n. En vertu du lemme principal, il existe alors un sous-polyèdre $(n-m-2)$-dimensionnel P^{n-m-2} de Q^n, tel que $\overline{P^{n-m-2}}\cdot X=0$ et que f admet un prolongement $f(\mathfrak{X}-Y-P^{n-m-2})\subset S^m$. D'autre part, pour tout cycle convergent m-dimensionnel Z^m de X, la relation $Z^m\sim 0$ dans $\mathfrak{X}-Y$ implique la relation $Z^m\sim 0$ dans $\mathfrak{X}-Y-P^{n-m-2}$. Un prolongement $f(\mathfrak{X}-Y-P^{n-m-2})\subset S^m$ n'est donc possible que pour f algébriquement prolongeable sur $\mathfrak{X}-Y$. Nous avons ainsi démontré le

Théorème III. *Pour qu'une transformation continue $f(X)\subset S^m$ soit algébriquement prolongeable sur $\mathfrak{X}-Y$, il faut et il suffit qu'il existe un sous-polyèdre $(n-m-2)$-dimensionnel P^{n-m-2} de Q^n, tel que $\overline{P^{n-m-2}}\cdot X=0$ et que f admette un prolongement*

$$f(\mathfrak{X}-Y-P^{n-m-2})\subset S^m. \tag{12.2}$$

13. *Théorème IV.* *Supposons que*

$$B^{i+1}(\mathfrak{X}-Y) \bmod X \text{ coef. } (m^i)^*=0 \tag{13.1$_i$}$$

pour $i=m+1,m+2,\dots,n-1$. Pour qu'une transformation continue $f(X)\subset S^m$ admette un prolongement $f(\mathfrak{X}-Y)\subset S^m$, il faut et il suffit qu'elle soit algébriquement prolongeable sur $\mathfrak{X}-Y$.

Théorème IVa. *Si l'on a* $(13.1)_i$ *pour* $i=m, m+1, \ldots, n-1$, *toute transformation continue* $f(X)\subset S^m$ *admet un prolongement* $f(\mathfrak{X}-Y)\subset S^m$.

Le th. IV s'obtient du th. III et du th. I, appliqué successivement à $i=m+1, m+2, \ldots, n-1$.

14. ***Cas où*** $\mathfrak{X}$ ***et*** X ***sont des surfaces sphériques.*** Admettons que $\mathfrak{X}=S^n$ et que $X=S_1^m$ est une image homéomorphe de S^m. Soit Z_1^m un cycle convergent de S_1^m qui constitue une base dans le groupe $B^m(S_1^m)$ coef. (m^m) (c. à d. à coefficients entiers).

A chaque transformation [30] $f(S_1^m)\subset S^m$ correspond un nombre entier $g(f;S_1^m)=g(f;Z_1^m)$ qui est le degré de cette transformation. Le th. IV peut être mis alors sous la forme qui suit:

Théorème V. *Soit* $S_1^m\subset S^n$ *une image homéomorphe de* S^m. *Soit* $Y\subset S^n-S_1^m$ *un rétracte absolu de voisinage, tel que*

$$B^{n-i-2}(Y) \text{ coef. } (m^i)=0 \qquad \textit{pour} \quad i=m+1, m+2, \ldots, n-1. \tag{14.1$_i$}$$

Pour qu'une transformation continue $f(S_1^m)\subset S^m$ *admette un prolongement* $f(S^n-Y)\subset S^m$, *il faut et il suffit qu'il existe un cycle convergent* Z_2^{n-m-1} *de* Y *à coefficients entiers, tel que*

$$v(Z_1^m; Z_2^{n-m-1})=g(f;S_1^m). \tag{14.2}$$

La condition est n é c e s s a i r e. Admettons, en effet, l'existence du prolongement $f(S^n-Y)\subset S^m$. A tout cycle convergent Z^m de $S^n-S_1^m$ à coefficients de $(m^m)^*$ correspond alors un élément $g(f;Z^m)\in(m^m)^*$, qui est son degré. On obtient ainsi une transformation homomorphe du groupe $B^m(S^n-Y)$ coef. $(m^m)^*$ en groupe $(m^m)^*$, c.à d. on obtient le caractère du groupe $B^m(S^n-Y)$. Or, le groupe $B^{n-m-1}(Y)$ coef. (m^m) étant orthogonal à $B^m(S^n-Y)$ coef. $(m^m)^*$ [31], il existe un cycle convergent Z_2^{n-m-1} de Y à coefficients entiers, tel que l'on a

$$v(Z^m; Z_2^{n-m-1})=g(f;Z^m)$$

pour tout cycle convergent Z^m de S^n-Y à coefficients de $(m^m)^*$.

[30]) Dans tout l'article nous nous occupons seulement des transformations *continues*.

[31]) L. Pontrjagin, Ann. of Math. **35** (1934), p. 912.

Soit $\alpha\in(m^m)^*$. Le cycle αZ_1^m est alors un cycle convergent à coefficients de $(m^m)^*$. Donc

$$v(\alpha Z_1^m; Z_2^{n-m-1})=g(f;\alpha Z_1^m),$$

d'où

$$\alpha v(Z_1^m; Z_2^{n-m-1})=\alpha g(f;S_1^m).$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha\in(m^m)^*$, on en déduit (14.2).

La condition est s u f f i s a n t e. En vertu du $(14.1)_i$ et du théorème de dualité [31]) on a en effet

$$B^{i+1}(S^n-Y) \text{ coef. } (m^i)^*=0 \qquad \text{pour} \quad i=m+1, \ldots, n-1. \tag{14.3$_i$}$$

Soit Z^{i+1} un cycle convergent mod S_1^m de S^n-Y à coefficients de $(m^i)^*$ $(i=m+1, \ldots, n-1)$. ∂Z^{i+1} étant un cycle convergent i-dimensionnel de S_1^m où $i>m$, il existe un cycle convergent $'Z^{i+1}$ de S^n-Y à coefficients de $(m^i)^*$, tel que $'Z^{i+1}\sim Z^{i+1}$ mod S_1^m dans S^n-Y. En vertu de $(14.3)_i$ on a donc $Z^{i+1}\sim 0$ mod S_1^m dans S^m-Y. Il est ainsi établi que

$$B^{i+1}(S^n-Y) \bmod S_1^m \text{ coef. } (m^i)^*=0 \qquad \text{pour} \quad i=m+1, \ldots, n-1. \tag{14.4$_i$}$$

Soit Z^{m+1} un cycle convergent mod S_1^m de S^n-Y à coefficients de $(m^m)^*$. Il existe alors un $\alpha\in(m^m)^*$ tel que $\partial Z^{m+1}\sim\alpha Z_1^m$ dans S_1^m. En vertu de (14.2), on a alors

$$g(f;\partial Z^{m+1})=\alpha g(f;Z_1^m)=\alpha v(Z_1^m;Z_2^{n-m-1})=v(\partial Z^{m+1};Z_2^{n-m-1}).$$

Il en résulte que $g(f;\partial Z^{m+1})=v(\partial Z^{m+1};Z_2^{n-m-1})=0$, puisque $\partial Z^{m+1}\sim 0$ dans S^n-Y.

La transformation f étant ainsi algébriquement prolongeable sur S^n-Y, il existe en vertu du th. IV un prolongement $f(S^n-Y)\subset S^m$.

Les conditions $(14.1)_i$ n'interviennent que dans la démonstration de la suffisance. Il est peut être intéressant de savoir si ces conditions sont essentielles pour le th. V [32]).

Si l'on choisit comme $f(S_1^m)\subset S^m$ une transformation homéomorphe de degré 1 (donc—ce qui revient au même—la transformation de S_1^m en S_1^m par l'identité), on a $g(f;S_1^m)=1$ et le th. V donne une condition nécessaire et suffisante pour que S_1^m soit un rétracte de S^n-Y.

[32]) Cf. K. Borsuk, Fund. Math. **29** (1937), p. 198. Dans le cas $m=1$, la question a été résolue par l'affirmative (voir S. Eilenberg, Fund. Math. **28** (1937), p. 241).

15. ***Cas où $\mathfrak{X}$, X et Y sont des surfaces sphériques.*** Soient $S_1^m \subset S^n$ et $S_2^{n-m-1} \subset S^n - S_1^m$ des ensembles homéomorphes à S^m et S^{n-m-1} respectivement. Soient $Z_1^m \subset S_1^m$ et $Z_2^{n-m-1} \subset S_2^{n-m-1}$ deux cycles convergents à coefficients entiers qui forment respectivement des bases de $B^m(S_1^m)$ et de $B^{n-m-1}(S_2^{n-m-1})$ à coefficients entiers. Posons

$$\bar{v}(S_1^m; S_2^{n-m-1}) = |v(Z_1^m; Z_2^{n-m-1})|.$$

En posant $Y = S_2^{n-m-1}$, on constate que les conditions (14.1) sont satisfaites pour $i = m+1, \dots, n-1$. Le th. V implique donc le

Théorème Va. *Pour qu'une transformation continue $f(S_1^m) \subset S^m$ admette un prolongement $f(S^n - S_2^{n-m-1}) \subset S^m$, il faut et il suffit que $g(f; S_1^m)$ soit un multiple de $\bar{v}(S_1^m; S_2^{n-m-1})$.*

En choisissant comme f la transformation de S_1^m en S_1^m par l'identité, on en déduit le

Théorème Vb[33]). *Pour que S_1^m soit un rétracte de $S^n - S_2^{n-m-1}$, il faut et il suffit que*

$$\bar{v}(S_1^m, S_2^{n-m-1}) = 1.$$

En particulier, si S_1^m et un rétracte de $S^n - S_2^{n-m-1}$, alors S_2^{n-m-1} et un rétracte de $S^n - S_1^m$.

16. ***Transformations algébriquement inessentielles.*** $\mathcal{Y}$ étant un espace métrique quelconque, on dit que la transformation continue $f(\mathcal{Y}) \subset S^m$ est *algébriquement inessentielle*, lorsque $g(f, Z^m) = 0$ pour tout cycle convergent m-dimensionnel Z^m de $\mathcal{Y}$ à coefficients de $(m^m)^*$.

Soit $X \subset S^n$ un vrai sous-ensemble fermé de S^n. Soit $f(X) \subset S^m$. En vertu du th. II, il existe un polyèdre fini $(n-m-1)$-dimensionnel $P^{n-m-1} \subset S^n - X$ et un prolongement $f(S^n - P^{n-m-1}) \subset S^m$.

Théorème IIIa. *Soit $X \subset S^n$ un vrai sous-ensemble fermé de S^n. Pour qu'une transformation continue $f(X) \subset S^m$ soit algébriquement inessentielle, il faut et il suffit qu'il existe un polyèdre fini $(n-m-2)$-dimensionnel $P^{n-m-2} \subset S^n - X$ et un prolongement $f(S^n - P^{n-m-2}) \subset S^n$.*

Ce th. résulte du th. III en y posant $\mathfrak{X} = S^n$ et $Y = 0$.

33) Pour le cas $n=3$, $m=1$, voir S. Eilenberg et K. Borsuk, Fund. Math. **26** (1936), p. 215.

Théorème VI[34]). *Soit $\mathfrak{X}$ un espace métrique compact de dimension finie et tel que*

$$(16.1)_i \qquad B^i(\mathfrak{X}) \text{ coef. } (m^i)^* = 0 \qquad \textit{pour} \quad i = m+1, m+2, \dots$$

Toute transformation continue $f(\mathfrak{X}) \subset S^m$ qui est algébriquement inessentielle est inessentielle.

En particulier, si on a aussi $(16.1)_m$, alors toute transformation continue $f(\mathfrak{X}) \subset S^m$ est inessentielle.

On peut admettre que $\mathfrak{X} = X \subset S^n$ où $n > 2 \dim \mathfrak{X}$ [35]). Soit Y un ensemble composé d'un seul point de $S^n - X$. En vertu de $(16.1)_i$, on a donc

$$(16.2)_i \quad B^{i+1}(S^n - Y) \operatorname{mod} X \text{ coef. } (m^i)^* = 0 \quad \text{pour} \quad i = m+1, m+2, \dots, n-1$$

et, d'après le th. IV, la fonction f admet un prolongement $f(S^n - Y) \subset S^m$. Il en résulte que f est une transformation inessentielle, puisque $S^n - Y$ est contractile dans soi.

III

17. ***Lemme***[36]). *Soit A un sous-ensemble fermé d'un espace métrique compact $\mathcal{Y}$. Soient $f_1(A) \subset S^m$ et $f_2(A) \subset S^m$ deux transformations*[30]) *homotopes. Pour tout prolongement $f_1(\mathcal{Y}) \subset S^m$, il existe un prolongement $f_2(\mathcal{Y}) \subset S^m$ homotope à f_1 (sur $\mathcal{Y}$).*

18. ***Lemme.*** *Si deux transformations:*

$$f_1(X + Q^n - P^k) \subset S^m, \qquad f_2(X + Q^n - P^k) \subset S^m$$

sont homotopes, on a

$$\gamma^k(f_1) = \gamma^k(f_2).$$

On a, en effet, pour tout a_i^k de Q^n

$$[f_1 \varphi_i^{n-k-1}] = [f_2 \varphi_i^{n-k-1}],$$

c. à d. $a_i(f_1) = a_i(f_2)$.

34) Ce théorème renferme la solution affirmative (pour les espaces de dimension finie) d'un problème posé par M. K. Borsuk, Fund. Math. **28** (1937), p. 210.

35) Voir W. Hurewicz, Sitzungsber. Preuss. Akad. 1933, p. 755.

36) K. Borsuk, Annales Soc. Pol. de Math. **16** (1937), p. 218.

19. ***Les ensembles*** $I(a_i^k)$. Soient $x_1 \epsilon |a_i^k|$ et $x_2 \epsilon |s_i^{n-k-1}|$. Les points x_1 et x_2 appartiennent donc au même simplexe de Q^n et le segment rectiligne x_1x_2 est bien déterminé. La somme de tous ces segments sera désignée par $I(a_i^k)$. On vérifie sans peine que deux segments ne peuvent avoir des points intérieurs communs. Il en résulte immédiatement que

(19.1) *$I(a_i^k)-|a_i^k|$ se laisse déformer dans lui-même en $|s_i^{n-k-1}|$.*

L'ensemble $I(a_i^k)$ peut être aussi défini de la même manière en considérant les segments x_1x_2 pour $x_1 \epsilon |\partial a_i^k|$ et $x_2 \epsilon |b_i^{n-k}|$. On en déduit que

(19.2) *$I(a_i^k)-|\partial a_i^k|$ se laisse déformer dans lui-même en $|b_i^{n-k}|$.*

Soit p_i le point d'intersection de a_i^k et b_i^{n-k}. En remplaçant tout $x \epsilon |b_i^{n-k}|$ par le centre $^*x$ du segment xp_i, on obtient une cellule „concentrique" avec b_i^{n-k}; désignons-la par $^*b_i^{n-k}$. La définition de $^*I(a_i^k)$ est analogue à celle de $I(a_i^k)$: on n'a qu'à remplacer b_i^{n-k} par $^*b_i^{n-k}$.

Soit x_1x_2 un segment tel que $x_1 \epsilon |\partial a_i^k|$ et $x_2 \epsilon |^*b_i^{n-k}|$. Pour tout $x \epsilon x_1x_2$ où $x \neq x_1$, posons $r(x)=x_2$. On obtient ainsi une transformation continue

(19.3) $$r[^*I(a_i^k)-|\partial a_i^k|] \subset |^*b_i^{n-k}|$$

telle que:

(19.4) $$r(x)=x \quad \text{pour} \quad x \epsilon |^*b_i^{n-k}|,$$

(19.5) $$r(x) \epsilon |^*s_i^{n-k-1}| \quad \text{pour} \quad x \epsilon \mathrm{Fr}[^*I(a_i^k)]-|\partial a_i^k|\ ^{37}).$$

Remarquons encore que la suite des ensembles $\{I(a_i^k)\}$, les a_i^k parcourant tous les simplexes de Q^n, n'a aucun point d'accumulation dans Q^n.

20. ***Lemme.*** *Etant donnée une transformation*

$$f(X+Q^n-P^k) \subset S^m,$$

il existe un sous-polyèdre $(k-1)$-dimensionnel $P^{k-1} \subset P^k$ de Q^n et une transformation

$$f_1(X+Q^n-|\gamma^k(f)|-P^{k-1}) \subset S^m$$

qui est homotope à f sur $X+Q^n-P^k$ et qui coïncide avec f sur X.

[37]) Fr(A) désigne la frontière de l'ensemble A.

Soit $a_1^k, a_2^k, \dots$ la suite de tous les a_i^k de P^k pour lesquels $a_i(f)=0$, c. à d. pour lesquels f transforme $|s_i^{n-k-1}|$ d'une façon inessentielle. En vertu de (19.1), f est donc inessentielle sur $I(a_i^k)-|a_i^k|$ et, à plus forte raison, sur $^*I(a_i^k)-|a_i^k|$. Posons

$$V=\sum_{i=1}^{\infty} {}^*I(a_i^k)-|a_i^k|.$$

Les sommandes de V étant disjoints, ouverts et fermés dans V, et la fonction f étant inessentielle sur chacune d'elles, on conclut que f est inessentielle sur V. Comme V est un sous-ensemble fermé de $X+Q^n-P^k$ et disjoint de X, il existe en vertu de **17** une transformation $f_2(X+Q^n-P^k) \subset S^m$, homotope à f et telle que

$$f_2(x)=\begin{cases} q & \text{pour} \quad x \epsilon V \\ f(x) & \text{pour} \quad x \epsilon X. \end{cases}$$

La transformation f_1 peut être définie comme suit:

$$P^{k-1}=\sum_{i=1}^{\infty} |\partial a_i^k|,$$

$$f_1(x)=\begin{cases} f_2(x) & \text{pour} \quad x \epsilon X+Q^n-P^k, \\ q & \text{pour} \quad x \epsilon V-P^{k-1}. \end{cases}$$

21. ***Lemme.*** *Soit a^{k+1} un simplexe $(k+1)$-dimensionnel de Q^n et $\beta \epsilon (m^{n-k-1})$. Il existe une transformation*

$$g(X+Q^n-|\partial a^{k+1}|) \subset S^m$$

telle que:

(21.1) $$\gamma^k(g)=\beta\, \partial a^{k+1},$$

(21.2) $$g(x)=q \quad \textit{pour} \quad x \epsilon X+Q^n-{}^*I(a^{k+1}).$$

Soit $h(S^{n-k-1}) \subset S^m$ une transformation telle que $[h]=\beta$. Choisissons un $q' \epsilon S^{n-k-1}$ tel que $h(q')=q$ et une transformation

$$\psi(|b^{n-k-1}|) \subset S^{n-k-1}$$

telle que

$$\psi(x)=q' \quad \text{pour} \quad x \epsilon |b^{n-k-1}|-|^*b^{n-k-1}|$$

et qui soit de degré 1 dans chaque point de S^{n+k-1} distinct de q'. Posons conformément à (21.2):

(21.3) $$g(x)=\begin{cases} q & \text{pour} \quad x \epsilon X+Q^n-{}^*I(a^{k+1}), \\ h\psi r(x) & \text{pour} \quad x \epsilon {}^*I(a^{k+1})-|\partial a^{k+1}|. \end{cases}$$

Pour $x \in \mathrm{Fr}[{}^*I(a^{k+1})]-|\partial a^{k+1}|$, on a $r(x) \in |{}^*s^{n-k}|$ d'après (19.5), ce qui donne $\psi r(x)=q'$ et $h\psi r(x)=q$. Il en résulte que la transformation $g(X+Q^n-|a^{k+1}|) \subset S^m$ est continue.

Soit
$$\partial a^{k+1} = \sum \eta_i a_i^k \qquad \text{où} \quad \eta_i = \pm 1$$
et posons

(21.4)
$$\psi_i(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{pour} \quad x \in |b^{n-k-1}|, \\ q' & \text{pour} \quad x \in |s_i^{n-k-1}|-|b^{n-k-1}|. \end{cases}$$

La transformation continue $\psi_i(|s_i^{n-k-1}|) \subset S^{n-k-1}$ ainsi définie est de degré η_i. La transformation $\psi_i \varphi_i^{n-k-1}(S^{n-k-1}) \subset S^{n-k-1}$ est donc aussi de degré η_i, d'où en vertu de (4.1)
$$[h\psi_i \varphi_i^{n-k-1}] = \eta_i \beta$$
et, comme $h\psi_i = g$ en vertu de (21.3), (19.4) et (21.4),
$$[g\varphi_i^{n-k-1}] = \eta_i \beta.$$

On a donc $a_i(g) = \eta_i \beta$ et $\gamma^k(g) = \sum \eta_i \beta a_i^k = \beta \partial a^{k+1}$, c. à d. (21.1).

22. ***Lemme.*** *Etant données: une transformation*
$$f(X+Q^n-P^k) \subset S^m,$$
un simplexe $(k+1)$*-dimensionnel* a^{k+1} *de* Q *et un élément* $\beta \in (m^{n-k-1})$, *il existe une transformation*
$$f_1(X+Q^n-P^k-|\partial a^{k+1}|) \subset S^m$$
telle que:

(22.1) $$\gamma^k(f_1) = \gamma^k(f) + \beta \partial a^{k+1},$$

(22.2) $$f_1(x) = f(x) \qquad \textit{pour} \quad x \in X+Q^n-P^k-I(a^{k+1}).$$

La transformation f est inessentielle sur $|b^{n-k-1}| \subset Q-P^k$. En vertu de (19.2), elle est donc inessentielle sur $I(a^{k+1})-|\partial a^{k+1}|$ et à plus forte raison sur ${}^*I(a^{k+1})-|\partial a^{k+1}|$. Les ensembles ${}^*I(a^{k+1})-|\partial a^{k+1}|$ et $X+Q^n-P^k-I(a^{k+1})+\mathrm{Fr}[I(a^{k+1})]-|\partial a^{k+1}|$ étant disjoints et fermés dans $X+Q^n-P^k-|\partial a^{k+1}|$, il existe en vertu de **17** une transformation
$$f_2(X+Q^n-P^k-|\partial a^{k+1}|) \subset S^m$$
homotope à f et telle que:

(22.3) $$f_2(x) = f(x) \qquad \text{pour} \quad x \in X+Q^n-P^k-I(a^{k+1})$$

(22.4) $$f_2(x) = q \qquad \text{pour} \quad x \in {}^*I(a^{k+1})-|\partial a^{k+1}|.$$

En vertu de **18**, on a donc

(22.5) $$\gamma^k(f_2) = \gamma^k(f).$$

Posons

(22.6)
$$f_1(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{pour} \quad x \in X+Q^n-P^k-{}^*I(a^{k+1}), \\ g(x) & \text{pour} \quad x \in {}^*I(a^{k+1})-|\partial a^{k+1}|. \end{cases}$$

où g désigne la fonction donnée par **21**. Il résulte de (21.2), (22.4) et (22.3) que la transformation $f_1(X+Q^n-P^k-|\partial a^{k+1}|) \subset S^m$ est continue et satisfait à (22.2).

Reste à établir (22.1). En vertu de (22.1) et de (22.5), il suffit à ce but de démontrer que
$$\gamma^k(f_1) = \gamma^k(f_2) + \gamma^k(g).$$

Soit a_i^k un simplexe k-dimensionnel de Q. Deux cas sont à distinguer:

1° $|a_i^k|$ non $\subset |\partial a^{k+1}|$. On a alors $|s_i^{n-k-1}| \subset Q^n-{}^*I(a^{k+1})$. En vertu de (22.6) et de (21.2), on a donc:
$$f_1(x) = f_2(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = q \quad \text{pour} \quad x \in |s_i^{n-k-1}|,$$
ce qui implique que:
$$a_i(f_1) = a_i(f_2), \qquad a_i(g) = 0$$
et, par conséquent, que $a_i(f_1) = a_i(f_2) + a_i(g)$.

2° $|a_i^k| \subset |\partial a^{k+1}|$. On a alors $|b^{n-k-1}| \subset |s_i^{n-k-1}|$, donc aussi
$$|{}^*b^{n-k-1}| \subset |s_i^{n-k-1}|.$$

Choisissons la transformation continue de degré 1
$$\varphi_i^{n-k-1}(S^{n-k-1}) \subset |s_i^{n-k-1}|$$
de façon que l'on ait:
$$\varphi_i^{n-k-1}(S_+^{n-k-1}) \subset |{}^*b^{n-k-1}|,$$
$$\varphi_i^{n-k-1}(S^{n-k-1}-S_+^{n-k-1}) \subset |s_i^{n-k-1}|-|{}^*b^{n-k-1}|,$$
où S_+^{n-k-1} est une hémisphère de S^{n-k-1}. Comme on a en vertu de (22.6)
$$f_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour} \quad x \in |{}^*b^{n-k-1}| \\ f_2(x) & \text{pour} \quad x \in |s_i^{n-k-1}|-|{}^*b^{n-k-1}|, \end{cases}$$

il vient conformément à la définition de l'addition dans le groupe (m^{n-k-1}) (voir **4**)

$$[f_1\varphi_i^{n-k-1}]=[f_2\varphi_i^{n-k-1}]+[g\varphi_i^{n-k-1}],$$

c. à d. $a_i(f_1)=a_i(f_2)+a_i(g)$.

23. *Lemme.* *Etant données: une transformation*

$$f(X+Q^n-P^k)\subset S^m$$

et une chaîne infinie $(k+1)$-dimensionnelle A^{k+1} mod Y *à coefficients de (m^{n-k-1}), il existe un sous-polyèdre P_1^k de Q^n tel que $\overline{P_1^k}\cdot X=0$*[38]*) et une transformation*

$$f(X+Q^n-P_1^k)\subset S^m$$

telle que:

$$\gamma^k(f_1)=\gamma^k(f)+\partial A^{k+1},$$

$$f_1(x)=f(x) \qquad \textit{pour} \quad x\in X.$$

Soit $a_1^{k+1}, a_2^{k+1},\ldots$ la suite de tous les simplexes $(k+1)$-dimensionnels de $|A^{k+1}|$. On a donc

$$A^{k+1}=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i a_i^{k+1} \quad \text{où} \quad \beta_i\in(m^{n-k-1}),\ \beta_i\neq 0.$$

Posons

$$P_1^k=P^k+\sum_{i=1}^{\infty}|\partial a_i^{k+1}|.$$

On a $P_1^k\subset P^k+|A^{k+1}|$, d'où $\overline{P_1^k}\cdot X=0$, puisque A^{k+1} est une chaîne mod Y.

Soient $f^{(0)}=f$ et $f^{(i)}$ la fonction qu'on obtient en appliquant **22** à $f^{(i-1)}$, a_i^{k+1} et β_i. Conformément à **22**, on a donc:

$$f^{(i)}(X+Q^n-P_1^k)\subset S^m,$$

$$\gamma^k(f^{(i)})=\gamma^k(f)+\partial\Big(\sum_{\gamma=1}^{i}\beta_j a_j^{k+1}\Big),$$

$$f^{(i)}(x)=f^{(i-1)}(x) \quad \text{pour} \quad x\in X+Q^n-P_1^k-I(a_i^{k+1}).$$

Or, A^{k+1} étant une chaîne mod Y, tous les points d'accumulation de la suite $\{I(a_i^{k+1})\}$ appartiennent à Y. Pour tout ensemble

[38]) On a même $P_1^k\subset P^k+|A^{k+1}|$.

compact $Z\subset X+Q^n-P_1^k$, il existe donc un i_0 tel que $Z\cdot I(a_i^{k+1})=0$ pour $i\geqslant i_0$. Par conséquent

$$f^{(i)}(x)=f^{(i_0)}(x) \qquad \text{pour} \quad x\in Z \qquad \text{et} \quad i>i_0$$

et il ne reste qu'a poser

$$f_1(x)=\lim_{i\to\infty}f^{(i)}(x) \qquad \text{pour} \quad x\in X+Q-P_1^k.$$

24. *Lemme.* *Etant donnés: une division simpliciale Q^n de S^n, un sous-polyèdre 0-dimensionnel P^0 de Q^n et une transformation*

$$f(S^n-P^0)\subset S^m,$$

la somme des coefficients de $\gamma^0(f)$ est égale à 0.

Soient $a_1^0, a_2^0,\ldots,a_r^0$ les simplexes de P^0. On a

$$\gamma^0(f)=\sum_{i=1}^{r}a_i(f)a_i^0.$$

Posons

$$\gamma_1^0=\sum_{i=1}^{r}a_i(f)a_1^0. \tag{24.1}$$

Comme la somme des coefficients de $\gamma^0(f)$ est égale à celle de γ_1^0, il existe une chaîne 1-dimensionnelle A^1 de Q^n à coefficients de (m^{n-1}), telle que

$$\gamma_1^0=\gamma^0(f)+A^1.$$

En vertu de **23**, il existe un sous-polyèdre 0-dimensionnel P_1^0 de Q^n et une transformation $f_1(S^n-P_1^0)\subset S^m$ telle que $\gamma^0(f_1)=\gamma_1^0$. Comme $|\gamma^0(f_1)|=|a_1^0|$, on peut admettre en vertu de **20** que P_1^0 contient seulement le sommet a_1^0. Mais alors f_1 est une transformation inessentielle, puisque $S^n-|a_1^0|$ est contractile dans soi. Par conséquent $\gamma_1^0=\gamma^0(f_1)=0$ et, d'après (24.1), $\sum_{i=1}^{r}a_i(f)=0$, c. q. f. d.

25. *Démonstration du lemme principal.* Soit a^{k-1} un simplexe $(k-1)$-dimensionnel arbitraire de Q^n. Soient $a_1^k, a_2^k,\ldots,a_r^k$ tous les simplexes k-dimensionnels de Q^n contenant a^{k-1} comme face. Soit η_i le coefficient de a^{k-1} dans ∂a_i^k. On a alors

$$s^{n-k}=\sum_{i=1}^{r}\eta_i b_i^{n-k}. \tag{25.1}$$

Désignons par p_i le point d'intersection de a_i^k et b_i^{n-k} (c. à d. le centre de gravité de a_i^k) et par $\hat{P}^0$ le polyèdre 0-dimensionnel composé de points $p_1, p_2, \dots, p_r$. On a alors

(25.2) $$|s^{n-k}| - \hat{P}^0 \subset Q - P^k.$$

Le polyèdre $|s^{n-k}|$ est homéomorphe à S^{n-k} et la première subdivision barycentrique de Q^n fournit une division simpliciale $\hat{Q}^{n-k}$ de $|s^{n-k}|$. Le point p_i devient alors un sommet $\hat{a}_i^0$ et $\hat{P}^0$ devient un sous-polyèdre de $\hat{Q}^{n-k}$.

Toute transformation $f(X+Q^n-P^k) \subset S^m$ induit en vertu de (25.2) une transformation $f(\hat{Q}^{n-k}-\hat{P}^0) \subset S^m$; celle-ci nous fournit la chaîne $\gamma^0(f)$ et les éléments $\hat{a}_i(f) \epsilon (m^{n-k-1})$ pour $i=1,2,\dots,r$.

D'après **24**, on a donc

(25.3) $$\sum_{i=1}^{r} \hat{a}_i(f) = 0.$$

La cellule $\hat{b}_i^{n-k}$, duale à $\hat{a}_i^0$ dans $\hat{Q}^{n-k}$, est contenue dans la cellule b_i^{n-k} et, en vertu de (25.1), elle est orientée comme $\eta_i b_i^{n-k}$. Par conséquent $\hat{a}_i(f) = \eta_i a_i(f)$ et d'après (25.3) $\sum_{i=1}^{r} \eta_i a_i(f) = 0$.

Comme c'était le coefficient de a^{k-1} dans la chaîne infinie $\partial[\gamma^k(f)]$, la chaîne $\gamma^k(f)$ est un cycle infini. Il résulte de (5.5) qu'elle est un cycle infini mod Y.

Supposons maintenant que $\gamma^k(f) \sim 0$ mod Y. Soit donc A^{k+1} la chaîne infinie $(k+1)$-dimensionnelle mod Y à coefficients de (m^{n-k-1}), telle que

$$\gamma^k(f) + \partial A^{k+1} = 0.$$

En vertu de **23**, il existe un sous-polyèdre k-dimensionnel P_1^k de Q tel que $\overline{P_1^k} \cdot X = 0$, et une transformation $f_1(X+Q-P_1^k) \subset S^m$ telle que $\gamma^k(f_1) = 0$ et $f_1(x) = f(x)$ pour $x \epsilon X$. Comme $|\gamma^k(f_1)| = 0$, on trouve, en appliquant **20**, un polyèdre $(k-1)$-dimensionnel $P^{k-1} \subset P_1^k$ et une transformation

$$f^*(X+Q-P^{k-1}) \subset S^m$$

qui coïncide sur X avec f_1, donc aussi avec f.

On the equivalence of any set of first category to a set of measure zero.

By

J. C. Oxtoby and S. M. Ulam (Cambridge, U. S. A.).

In n-dimensional euclidean space $R^{(n)}$ it is an easy matter to define sets of first category which have positive measure, and even, ones whose complements are of measure zero. For instance, the complement of the intersection of any sequence of dense open sets whose measures tend to zero defines such a set. Nevertheless one may ask whether such a set is equivalent to a set of measure zero under the group of homeomorphisms of the space onto itself. In other words, does there exist an automorphism (that is, a homeomorphism of the space onto itself) which carries the given set into one of measure zero. The object of the present note is to show that such a transformation always exists, indeed that the automorphisms which carry a given set of first category into one of measure zero form a residual set in the space of antomorphisms, provided the latter is suitably metrised.

To begin with, consider the unit cube $\mathcal{I}^{(n)}$ in n-dimensional euclidean space, $(n \geqslant 1)$. Let $[H]$ denote the space of all automorphisms of $\mathcal{I}^{(n)}$ metrise by the formula [1])

$$\varrho(g,h) = \max_{x \epsilon \mathcal{I}^{(n)}} (|gx-hx|, |g^{-1}x-h^{-1}x|),$$

where $|x-y|$ denotes the euclidean distance between x and y. The space $[H]$ is complete and the group operations are continuous in the metric, so that it forms a metric group.

[1]) This metric is equivalent to the usual one. See S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne **1**, Warszawa 1932, p. 229.