

Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence stochastique

Par

W. Kozakiewicz (Warszawa).

1. On dit qu'une suite de variables aléatoires $\{Z_n\}$ converge stochastiquement vers la variable aléatoire Z si, pour ε positif quelconque, la probabilité de l'inégalité $|Z_n - Z| < \varepsilon$ tend vers 1 avec $n \rightarrow +\infty$.

On sait que la convergence stochastique de la suite $\{Z_n\}$ vers Z entraîne la convergence de la suite des lois totales correspondantes $V_n(x)$ vers la loi $V(x)$ de la variable Z , et cela dans tout point de continuité de la fonction $V(x)$ ¹⁾.

Le théorème réciproque est vrai dans le cas de la convergence stochastique de la suite $\{Z_n\}$ vers une constante ²⁾; mais en général il ne l'est pas, puisque la fonction de probabilité totale ne détermine pas la variable aléatoire.

Dans les cas où le théorème réciproque s'applique, le théorème connu de Lévy ³⁾ nous permet d'exprimer d'une manière simple les critères de la convergence stochastique par des fonctions caractéristiques.

Le travail présent a pour but de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence stochastique d'une suite de variables aléatoires vers une variable aléatoire. Ces conditions seront exprimées soit par les lois de probabilité totale de deux variables aléatoires (théorèmes I, I', II, II' et III), soit par les fonctions caractéristiques (théorèmes IV et V).

¹⁾ Voir p. ex. M. Fréchet, *Généralités sur les probabilités. Variables aléatoires*, p. 169 (*Traité du Calcul des probabilités et des ses applications* par Emile Borel, Tome I, Fascicule III, Paris 1937).

²⁾ F. P. Cantelli, *Intorno ad un teorema di Calcolo delle Probabilità*, Giorn. Mat. Battag., vol. 49 (1911), p. 278.

³⁾ P. Lévy, *Calcul des probabilités*, Paris 1925, p. 195 et 197.

2. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ et X des variables aléatoires. $P\{E\}$ désignant la probabilité de l'événement E , posons pour x et y réels:

$$F_n(x, y) = P\{X_n < x, X < y\}, \quad F(x) = P\{X < x\},$$

où $P\{X_n < x, X < y\}$ est la probabilité de la simultanéité des inégalités entre crochets. $F_n(x, y)$ est donc la loi de probabilité totale de X_n et X ; $F(x)$ est celle de X .

Théorème I. La condition nécessaire et suffisante pour la convergence stochastique de la suite $\{X_n\}$ vers X est que l'on ait:

$$(A) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z, z) = F(z), \quad (B) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) = F(z)$$

pour chaque point z où la fonction $F(x)$ est continue.

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, l'égalité (B) exprime la condition nécessaire connue ⁴⁾ de la convergence stochastique d'une suite de variables aléatoires vers une variable aléatoire. Passons donc à la démonstration de l'égalité (A). Etant donné un nombre $\eta > 0$ quelconque, soit $\varepsilon > 0$ un nombre satisfaisant à l'inégalité

$$(1) \quad F(z - \varepsilon) - \varepsilon > F(z) - \eta.$$

Un tel nombre existe par suite de la continuité de $F(x)$ pour $x = z$. On remarque aisément que

$$(2) \quad P\{X_n < x, X < x\} \geq P\{X < x - \varepsilon, X_n < X + \varepsilon\}.$$

En nous appuyant sur la formule

$$(3) \quad P\{HK\} \geq P\{H\} + P\{K\} - 1$$

où H et K désignent deux événements quelconques et HK l'événement consistant en leur existence simultanée, nous concluons que

$$(4) \quad P\{X < z - \varepsilon, X_n < X + \varepsilon\} \geq P\{X < z - \varepsilon\} + P\{X_n < X + \varepsilon\} - 1.$$

A cause de la convergence de $\{X_n\}$ vers X , il existe un nombre $\mu > 0$ tel que

$$(5) \quad P\{X_n < X + \varepsilon\} > 1 - \varepsilon \quad \text{pour } n > \mu.$$

Les inégalités (2), (4) et (5) nous donnent

$$(6) \quad F_n(z, z) > F(z - \varepsilon) - \varepsilon > F(z) - \eta \quad \text{pour } n > \mu.$$

⁴⁾ Voir p. ex. M. Fréchet, loc. cit., p. 169.

Evidemment

$$(7) \quad F_n(z, z) \leq F(z),$$

donc

$$(8) \quad F(z) - \eta < F_n(z, z) \leq F(z) \quad \text{pour } n > \mu,$$

ce qui démontre l'équation (A).

La condition est suffisante. Remarquons d'abord que, pour u et z réels quelconques où $u < z$, on a

$$(9) \quad P\{u \leq X_n < z, u \leq X < z\} = F_n(z, z) - F_n(z, u) - F_n(u, z) + F_n(u, u).$$

Soient maintenant u et z des points de continuité de $F(x)$. Nous allons établir l'égalité

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} [F_n(z, z) - F_n(z, u) - F_n(u, z) + F_n(u, u)] = F(z) - F(u).$$

En effet, on a d'après l'égalité (A):

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z, z) = F(z), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(u, u) = F(u).$$

On a ensuite:

$$(12) \quad F_n(u, u) \leq F_n(z, u) \leq F(u), \quad F_n(u, u) \leq F_n(u, z) \leq F_n(u),$$

d'où l'on conclut en vertu de (A) et (B) que

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z, u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(u, z) = F(u).$$

L'égalité (10) résulte *a fortiori* de (11) et (13).

Ceci établi, soient ε et η des nombres positifs quelconques. Les propriétés connues de la loi de probabilité totale nous permettent de trouver des nombres M et N tels que

$$(14) \quad F(N) - F(M) > 1 - \varepsilon/2.$$

Divisons l'intervalle $\langle M, N \rangle$ en sous-intervalles de longueur plus petite que η . Soient $N = d_0 < d_1 < d_2 < \dots < d_k = M$ les points de cette division. Supposons en outre, ce qui est légitime, que la fonction $F(x)$ soit continue pour $x = d_i$ ($i = 0, 1, \dots, k$).

L'événement défini par l'inégalité $|X_n - X| < \eta$ se présentera si l'un des k événements incompatibles, définis par l'existence simultanée des inégalités:

$$(15) \quad \begin{aligned} d_0 \leq X_n < d_1, \quad d_1 \leq X_n < d_2, \quad \dots, \quad d_{k-1} \leq X_n < d_k \\ d_0 \leq X < d_1, \quad d_1 \leq X < d_2, \quad \dots, \quad d_{k-1} \leq X < d_k, \end{aligned}$$

se présente. La probabilité de l'événement donné par l'existence simultanée des inégalités:

$$(16) \quad d_{i-1} \leq X_n < d_i, \quad d_{i-1} \leq X < d_i$$

est égale à

$$(17) \quad p_{i,n} = F_n(d_i, d_i) - F_n(d_i, d_{i-1}) - F_n(d_{i-1}, d_i) + F_n(d_{i-1}, d_{i-1}).$$

En vertu du théorème de la probabilité totale, nous avons

$$(18) \quad P\{|X_n - X| < \eta\} \geq \sum_{i=1}^k p_{i,n}$$

et, en vertu de (10), il existe un nombre ν tel que

$$(19) \quad \left| \sum_{i=1}^k p_{i,n} - \sum_{i=1}^k [F(d_i) - F(d_{i-1})] \right| = \left| \sum_{i=1}^k p_{i,n} - [F(N) - F(M)] \right| < \varepsilon/2$$

pour $n > \nu$.

On a selon (18), (19) et (14)

$$(20) \quad P\{|X_n - X| < \eta\} > 1 - \varepsilon \quad \text{pour } n > \nu,$$

ce qui démontre la suffisance de la condition.

Corollaire. La condition nécessaire et suffisante pour la convergence stochastique de la suite $\{X_n\}$ vers X peut être exprimée par la relation (10) toute seule.

En effet, en admettant la convergence stochastique de la suite $\{X_n\}$ vers X , les égalités (A) et (B) sont satisfaites, ce qui entraîne la condition (10), comme nous l'avons établi dans la seconde partie de la démonstration du th. I. La suffisance de la condition exprimée par (10) a été établie dans la même partie de ladite démonstration.

Appellons deux variables T et Z presque égales si

$$P\{T \neq Z\} = 0.$$

La loi de probabilité totale $F(x, y)$ des variables T et Z possède les propriétés:

$$F(x, y) = \begin{cases} F(y, y) & \text{pour } x \geq y, \\ F(x, x) & \text{pour } x < y, \end{cases}$$

où

$$F(x) = P\{T < x\} = P\{Z < x\}.$$

Cela nous permet d'énoncer le th. I de manière suivante:

Théorème I. La condition nécessaire et suffisante pour la convergence stochastique de la suite $\{X_n\}$ de variables aléatoires vers la variable aléatoire X est la convergence de la suite $\{F_n(x,y)\}$ des lois correspondantes vers une fonction $F(x,y)$ qui est la loi de probabilité de deux variables presque égales à la variable X , en chaque point de continuité de $F(x,y)$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Posons:

$$(21) \quad F(x) = P\{X < x\}, \quad F_n(x) = P\{X_n < x\}.$$

La fonction $F(x,y)$ étant donnée par les relations:

$$(22) \quad F(x,y) = \begin{cases} F(y) & \text{pour } x \geq y, \\ F(x) & \text{pour } x < y, \end{cases}$$

remarquons que:

$$(23) \quad F_n(y,y) \leq F_n(x,y) \leq F_n(y) \quad \text{pour } x \geq y,$$

$$(24) \quad F_n(x,x) \leq F_n(x,y) \leq F_n(x) \quad \text{pour } x < y.$$

(u,z) étant un point de continuité de la fonction $F(x,y)$, on voit que $F(x)$ est continue, soit pour $x=z$ si $u \geq z$, soit pour $x=u$ si $u < z$.

En supposant satisfaites les conditions (A) et (B) du th. I, nous en concluons par substitution de $x=u$ et $y=z$ dans les formules (23) et (24) que:

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(u,z) = F(z) = F(u,z) \quad \text{pour } u \geq z,$$

$$(26) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(u,z) = F(u) = F(u,z) \quad \text{pour } u < z,$$

ce qui démontre la nécessité de la condition.

Pour en établir la suffisance, considérons deux nombres v et w tels que $v < w$ et que la fonction $F(x)$ soit continue pour $x=u$ et $x=w$. Il en résulte d'après (22) la continuité de la fonction $F(x,y)$ aux points (v,v) , (v,w) , (w,v) et (w,w) . En supposant la condition du th. I' satisfaite, nous en concluons que

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} [F_n(w,w) - F_n(v,w) - F_n(w,v) + F_n(v,v)] = \\ = F(w,w) - F(w,v) - F(v,w) + F(v,v) = F(w) - F(v),$$

ce qui démontre, conformément au corollaire, la convergence stochastique de la suite $\{X_n\}$ vers X .

3. Nous allons donner à présent un critère de la convergence stochastique de la suite $\{X_n\}$, dans lequel la variable limite n'intervient pas explicitement.

Posons pour x, y réels:

$$F_{nm}(x,y) = P\{X_n < x, X_m < y\}, \quad F_n(x) = P\{X_n < x\}.$$

Théorème II. La condition nécessaire et suffisante pour la convergence stochastique de la suite $\{X_n\}$ vers une variable aléatoire est l'existence d'une loi de probabilité $\Phi(x)$ telle que l'on ait

$$(C) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} F_{nm}(z,z) = \Phi(z)$$

pour chaque point z où la fonction $\Phi(x)$ est continue.

De plus, la fonction $\Phi(x)$ est précisément la loi de probabilité de la variable limite.

Démonstration. Pour établir la nécessité de la condition, supposons que la suite $\{X_n\}$ converge vers la variable X et désignons par $\Phi(x)$ la loi de probabilité de la variable X .

Alors, comme on sait,

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) = \Phi(z)$$

pour chaque valeur z de x pour laquelle la fonction $\Phi(x)$ est continue.

Étant donné un nombre $\eta > 0$ quelconque, soit $\varepsilon > 0$ un nombre satisfaisant aux conditions:

$$(29) \quad \Phi(x) \text{ est continue pour } x = z - \varepsilon,$$

$$(30) \quad \Phi(z - \varepsilon) - 2\varepsilon > \Phi(z) - \eta.$$

On voit que

$$(31) \quad P\{X_n < z, X_m < z\} \geq P\{X_n < z - \varepsilon, X_m < X_n + \varepsilon\}.$$

En appliquant la formule (3), nous obtenons:

$$(32) \quad P\{X_n < z - \varepsilon, X_m < X_n + \varepsilon\} \geq P\{X_n < z - \varepsilon\} + P\{X_m < X_n + \varepsilon\} - 1 = \\ = F_n(z - \varepsilon) + P\{X_m < X_n + \varepsilon\} - 1.$$

$\{X_n\}$ tendant stochastiquement vers X , la suite $\{X_n\}$ satisfait stochastiquement à la condition de Cauchy⁵⁾. Il existe donc un nombre $\mu_1 > 0$ tel que

$$(33) \quad P\{X_m < X_n + \varepsilon\} > 1 - \varepsilon \quad \text{pour } n > \mu_1 \text{ et } m > \mu_1.$$

⁵⁾ M. Fréchet, l. c., p. 167.

Les inégalités (32) et (33) donnent

$$(34) \quad F_{nm}(z, z) = P\{X_n < z, X_m < z\} > F_n(z - \varepsilon) - \varepsilon \quad \text{pour } n > \mu_1 \text{ et } m > \mu_1.$$

La suite $\{F_n(z - \varepsilon)\}$ convergeant vers $\Phi(z - \varepsilon)$, il existe un nombre $\mu_2 > 0$ tel que

$$(35) \quad F_n(z - \varepsilon) > \Phi(z - \varepsilon) - \varepsilon \quad \text{pour } n > \mu_2.$$

On a donc

$$(36) \quad F_{nm}(z, z) > \Phi(z - \varepsilon) - 2\varepsilon > \Phi(z) - \eta \quad \text{pour } n > \max(\mu_1, \mu_2) < m.$$

D'autre part:

$$(37) \quad F_{nm}(z, z) \leq F_n(z),$$

$$(38) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) = \Phi(z),$$

de sorte qu'il existe un $\mu_3 > 0$ tel que

$$(39) \quad F_{nm}(z, z) < \Phi(z) + \eta \quad \text{pour } n > \mu_3.$$

En posant $\mu = \max(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, on peut écrire

$$(40) \quad \Phi(z) - \eta < F_{nm}(z, z) < \Phi(z) + \eta \quad \text{pour } n > \mu,$$

ce qui démontre l'égalité (C).

Pour montrer que la condition est suffisante, remarquons que pour u et z réels où $u < z$ on a

$$(41) \quad P\{u \leq X_n < z, u \leq X_m < z\} = F_{nm}(z, z) - F_{nm}(z, u) - F_{nm}(u, z) + F_{nm}(u, u).$$

Soient maintenant u et z des points de continuité de $F(x)$. Nous allons établir l'égalité

$$(42) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} [F_{nm}(z, z) - F_{nm}(z, u) - F_{nm}(u, z) + F_{nm}(u, u)] = \Phi(z) - \Phi(u).$$

En posant $n = m$ dans l'égalité (C), on obtient

$$(43) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{nn}(z, z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) = \Phi(z).$$

On a aussi:

$$(44) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} F_{nm}(u, u) = \Phi(u), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(u) = \Phi(u).$$

Les inégalités:

$$(45) \quad F_{nm}(u, u) \leq F_{nm}(z, u) \leq F_m(u), \quad F_{nm}(u, u) \leq F_{nm}(u, z) \leq F_n(u)$$

entraînent en vertu de (44) et (45)

$$(46) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} F_{nm}(u, z) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} F_{nm}(z, u) = \Phi(u).$$

L'égalité (42) résulte immédiatement de (C), (44) et (46).

Ceci établi, soient ε et η deux nombres positifs quelconques. Nous allons démontrer que l'on a pour n et m suffisamment grands

$$(47) \quad P\{|X_n - X_m| < \eta\} > 1 - \varepsilon,$$

ce qui suffit d'après un résultat de M. Slutsky⁶⁾ pour que la suite $\{X_n\}$ converge stochastiquement vers une variable aléatoire.

Les calculs détaillés ne diffèrent pas essentiellement de ceux de la seconde partie de la démonstration du th. I. Nous constatons d'abord l'existence d'une suite $\{d_i\}$ ($i=0, \dots, k$) de points de continuité de la fonction $\Phi(x)$ pour lesquels:

$$(48) \quad 0 < d_i - d_{i-1} < \eta, \quad F(d_k) - F(d_0) > 1 - \varepsilon/2 \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Ensuite, nous remarquons que

$$(49) \quad P\{|X_n - X_m| < \eta\} \geq \sum_{i=1}^k P\{d_{i-1} \leq X_n < d_i, d_{i-1} \leq X_m < d_i\} = \sum_{i=1}^k [F_{nm}(d_i, d_i) - F_{nm}(d_i, d_{i-1}) - F_{nm}(d_{i-1}, d_i) + F_{nm}(d_{i-1}, d_{i-1})].$$

En vertu de (42), et puis en vertu de (48), il vient pour n et m suffisamment grands:

$$(50) \quad \sum_{i=1}^k [F_{nm}(d_i, d_i) - F_{nm}(d_i, d_{i-1}) - F_{nm}(d_{i-1}, d_i) + F_{nm}(d_{i-1}, d_{i-1})] > \sum_{i=1}^k [F(d_i) - F(d_{i-1})] - \varepsilon/2 = F(d_k) - F(d_0) - \varepsilon/2 > 1 - \varepsilon,$$

d'où finalement selon (49)

$$(51) \quad P\{|X_n - X_m| < \eta\} > 1 - \varepsilon.$$

La convergence de la suite $\{X_n\}$ étant ainsi établie, désignons par X la variable limite et par $\Phi_1(x)$ la loi de probabilité totale de X .

Soit x_0 une valeur de x telle que $\Phi_1(x)$ et $\Phi(x)$ sont simultanément continues pour $x = x_0$. Puisque X_n converge stochastiquement vers X , on a

$$(52) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_0) = \Phi_1(x_0).$$

⁶⁾ M. Fréchet, l. c., p. 167.

D'autre part,

$$(53) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_0) = \Phi(x_0),$$

donc $\Phi_1(x_0) = \Phi(x_0)$ et, en vertu de la continuité à gauche ⁷⁾ des fonctions monotones $\Phi_1(x)$ et $\Phi(x)$, cette équation subsiste pour x quelconque, ce qui montre que $\Phi(x)$ est bien la loi de probabilité de la variable X .

On a aussi un théorème tout à fait analogue au th. I', à savoir le

Théorème II'. *La condition nécessaire et suffisante pour la convergence stochastique d'une suite $\{X_n\}$ vers une variable aléatoire est la convergence de la suite double $\{F_{nm}(x, y)\}$, où*

$$F_{nm}(x, y) = P\{X_n < x, X_m < y\},$$

vers une fonction $\Phi(x, y)$ qui est la loi de probabilité de deux variables presque égales, en tout point de continuité de $\Phi(x, y)$.

Démonstration. Pour établir la nécessité de la condition, supposons que $\{X_n\}$ converge stochastiquement vers une variable aléatoire, et soit $\Phi(x)$ la fonction satisfaisant à la condition (C) du th. II. Définissons la fonction $\Phi(x, y)$ par les relations:

$$(54) \quad \Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi(y) & \text{pour } x \geq y, \\ \Phi(x) & \text{pour } x < y \end{cases}$$

et posons

$$(55) \quad F_n(x) = P\{X_n < x\}.$$

Remarquons que l'on a:

$$(56) \quad F_{nm}(y, y) \leq F_{nm}(x, y) \leq F_m(y) \quad \text{pour } x \geq y,$$

$$(57) \quad F_{nm}(x, x) \leq F_{nm}(x, y) \leq F_n(x) \quad \text{pour } x < y.$$

Soit (u, z) un point de continuité de la fonction $\Phi(x, y)$. En vertu de (54), la fonction $\Phi(x)$ est continue soit pour $x = z$ si $u \geq z$, soit pour $x = u$ si $u < z$. On a en vertu de (C):

$$(58) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} F_{nm}(u, u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(u) = \Phi(u), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{nm}(z, z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) = \Phi(z).$$

Ces égalités, ainsi que les inégalités (56) et (57), nous donnent:

$$(59) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} F_{nm}(u, z) = \Phi(z) = \Phi(u, z) \quad \text{pour } u \geq z,$$

$$(60) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} F_{nm}(u, z) = \Phi(u) = \Phi(u, z) \quad \text{pour } u < z,$$

ce qui prouve que la suite $\{F_{nm}(u, z)\}$ converge vers $\Phi(u, z)$.

Pour démontrer la suffisance de la condition, supposons que

$$(61) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} F_{nm}(u, z) = \Phi(u, z),$$

où $\Phi(x, y)$ est la loi de probabilité de deux variables presque égales.

Les relations (54) subsistent et nous en concluons que la continuité de la fonction $\Phi(x)$ pour $x = u$ entraîne celle de la fonction $\Phi(x, y)$ au point (u, u) . Nous avons donc en vertu de (61)

$$(62) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} F_{nm}(u, u) = \Phi(u),$$

ce qui montre d'après le th. II que la suite $\{X_n\}$ converge stochastiquement vers une variable aléatoire.

4. Les raisonnements qui suivent sont consacrés à la généralisation de certains résultats obtenus plus haut au cas de la convergence des systèmes de variables aléatoires.

Soient $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$ et $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(k)}$ ($n=1, 2, \dots$) des variables aléatoires. On dit que la suite de systèmes $\{X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}\}$ converge stochastiquement vers le système $\{X^{(1)}, \dots, X^{(k)}\}$ avec $n \rightarrow +\infty$ si, pour un nombre quelconque $\varepsilon > 0$, on a

$$(63) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\{|X^{(1)} - X_n^{(1)}| < \varepsilon, \dots, |X^{(k)} - X_n^{(k)}| < \varepsilon\} = 1.$$

Nous supposons toutes les inégalités entre crochets satisfaites simultanément.

Posons pour $\zeta_1, \zeta'_1, \dots, \zeta_k, \zeta'_k$:

$$G_n(\zeta_1, \zeta'_1, \dots, \zeta_k, \zeta'_k) = P\{X^{(1)} < \zeta_1, X_n^{(1)} < \zeta'_1, \dots, X^{(k)} < \zeta_k, X_n^{(k)} < \zeta'_k\},$$

$$F_n(\zeta_1, \dots, \zeta_k) = P\{X_n^{(1)} < \zeta_1, \dots, X_n^{(k)} < \zeta_k\},$$

$$G_n^{(i)}(\zeta_i, \zeta'_i) = P\{X^{(i)} < \zeta_i, X_n^{(i)} < \zeta'_i\}, \quad F_n^{(i)}(\zeta_i) = P\{X_n^{(i)} < \zeta_i\}, \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

$$F(\zeta_1, \dots, \zeta_k) = P\{X^{(1)} < \zeta_1, \dots, X^{(k)} < \zeta_k\}, \quad F^{(i)}(\zeta_i) = P\{X^{(i)} < \zeta_i\}.$$

Il résulte immédiatement de cette définition que la convergence stochastique de chacune des variables $X_n^{(i)}$ ($i=1, \dots, k$) vers la variable correspondante $X^{(i)}$ est nécessaire et suffisante pour que

⁷⁾ M. Fréchet, l. c., p. 32.

$\{X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}\}$ converge vers $\{X^{(1)}, \dots, X^{(k)}\}$. La condition (63) est donc équivalente aux égalités:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n^{(i)}(\zeta_i^0, \zeta_i^0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n^{(i)}(\zeta_i^0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F^{(i)}(\zeta_i^0) \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

ces équations devant être satisfaites pour les ζ_i^0 qui sont des points de continuité des fonctions correspondantes $F^{(i)}(\zeta_i)$.

Les critères de la convergence stochastique du système $\{X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}\}$ vers $\{X^{(1)}, \dots, X^{(k)}\}$ peuvent être exprimés, pour tout entier k , par deux conditions. On a en effet le

Théorème III. *La condition nécessaire et suffisante pour la convergence stochastique de la suite de systèmes $\{X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}\}$ vers le système $\{X^{(1)}, \dots, X^{(k)}\}$ est que l'on ait:*

$$(D) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\zeta_1^0, \zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0, \zeta_k^0) = F(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0),$$

$$(E) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0) = F(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0)$$

en tout point $(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0)$ qui est un point de continuité de la fonction $F(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$.

Démonstration. Nous allons démontrer d'abord la nécessité de l'équation (D). Etant donné un nombre quelconque $\eta > 0$, soit ε un nombre satisfaisant à la condition

$$(64) \quad F(\zeta_1^0 - \varepsilon, \dots, \zeta_k^0 - \varepsilon) - \varepsilon > F(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0) - \eta.$$

Un tel nombre existe en vertu de la continuité de la fonction $F(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ au point $(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0)$. On remarque aisément que

$$(65) \quad \begin{aligned} & G_n(\zeta_1^0, \zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0, \zeta_k^0) \geq \\ & \geq F(\zeta_1^0 - \varepsilon, \dots, \zeta_k^0 - \varepsilon) + P\{X_n^{(1)} < X^{(1)} + \varepsilon, \dots, X_n^{(k)} < X^{(k)} + \varepsilon\} - 1. \end{aligned}$$

Comme on a en vertu de (63), pour n suffisamment grand

$$(66) \quad P\{X_n^{(1)} < X^{(1)} + \varepsilon, \dots, X_n^{(k)} < X^{(k)} + \varepsilon\} > 1 - \varepsilon$$

et que l'inégalité (64) subsiste, on obtient

$$(67) \quad G_n(\zeta_1^0, \zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0, \zeta_k^0) > F(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0) - \eta$$

pour n suffisamment grand. D'autre part,

$$(68) \quad G_n(\zeta_1^0, \zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0, \zeta_k^0) \leq F(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0).$$

Les inégalités (67) et (68) entraînent

$$(69) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\zeta_1^0, \zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0, \zeta_k^0) = F(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0),$$

c. à d. l'équation (D).

Considérons maintenant un nombre $\tau > 0$ quelconque et soit $\lambda > 0$ un nombre satisfaisant à l'inégalité

$$(70) \quad F(\zeta_1^0 + \lambda, \dots, \zeta_k^0 + \lambda) < F(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0) + \tau.$$

On a

$$(71) \quad \begin{aligned} F_n(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0) &= P\{X_n^{(1)} < \zeta_1^0, \dots, X_n^{(k)} < \zeta_k^0\} = \\ &= P\{X_n^{(1)} < \zeta_1^0, X^{(1)} < X_n^{(1)} + \lambda, \dots, X_n^{(k)} < \zeta_k^0, X_n^{(k)} < X_n^{(k)} + \lambda\} + P\{H_n\} \end{aligned}$$

où H_n est l'événement consistant en ce que les inégalités

$$(72) \quad X_n^{(1)} < \zeta_1^0, \dots, X_n^{(k)} < \zeta_k^0$$

se présentent simultanément et qu'au moins une des inégalités

$$(73) \quad X_i < X_n^{(i)} + \lambda \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

n'ait pas lieu. Mais:

$$(74) \quad \begin{aligned} P\{X_n^{(1)} < \zeta_1^0, X^{(1)} < X_n^{(1)} + \lambda, \dots, X_n^{(k)} < \zeta_k^0, X^{(k)} < X_n^{(k)} + \lambda\} \leq \\ \leq P\{X^{(1)} < \zeta_1^0 + \lambda, \dots, X^{(k)} < \zeta_k^0 + \lambda\} = F(\zeta_1^0 + \lambda, \dots, \zeta_k^0 + \lambda), \end{aligned}$$

$$(75) \quad P\{H_n\} \leq \sum_{i=1}^k P\{X^{(i)} \geq X_n^{(i)} + \lambda\},$$

$$(76) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\{X^{(i)} \geq X_n^{(i)} + \lambda\} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P\{|X^{(i)} - X_n^{(i)}| \geq \lambda\} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

d'où, en vertu de (70), on a pour n suffisamment grand

$$(77) \quad F_n(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0) < F(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0) + \tau.$$

D'autre part (voir (68)):

$$(78) \quad F_n(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0) \geq G_n(\zeta_1^0, \zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0, \zeta_k^0)$$

et on a l'égalité (D), d'où

$$(79) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0) = F(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0),$$

c. à d. l'égalité (E).

Passons à la démonstration que la condition est suffisante. Soit ζ_i^0 un point de continuité de la fonction $F^{(l)}(\zeta_i)$ ($i=1, 2, \dots, k$). Alors $(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0)$ en est un de la fonction $F(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$. On a:

$$(80) \quad G_n^{(l)}(\zeta_1^0, \zeta_l^0) \geq G_n(\zeta_1^0, \zeta_1^0, \dots, \zeta_l^0, \zeta_l^0, \dots, \zeta_k^0, \zeta_k^0), \quad G_n^{(l)}(\zeta_1^0, \zeta_l^0) \leq F^{(l)}(\zeta_l^0),$$

$$F^l(\zeta_l^0) = P\{X^{(l)} < \zeta_l^0\} \leq$$

$$(81) \quad \leq P\{X^{(1)} < \zeta_1^0, \dots, X^{(l)} < \zeta_l^0, \dots, X^{(k)} < \zeta_k^0\} + \sum_{l=1}^k P\{X^{(l)} \geq \zeta_l^0\} =$$

$$= F(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0) + \sum_{l=1}^k [1 - F(\zeta_l^0)],$$

d'où

$$(82) \quad 0 \leq F^{(l)}(\zeta_l) - G_n^{(l)}(\zeta_l^0, \zeta_l^0) \leq$$

$$\leq F(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0) + \sum_{l=1}^k [1 - F(\zeta_l^0)] - G_n(\zeta_1^0, \zeta_1^0, \dots, \zeta_l^0, \zeta_l^0, \dots, \zeta_k^0, \zeta_k^0).$$

Soit w un nombre positif quelconque. Fixons ζ_l^0 et prenons ζ_l ($l=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, k$) suffisamment grand pour que l'on ait

$$(83) \quad \sum_{l=1}^k [1 - F(\zeta_l^0)] < w/2.$$

En admettant l'équation (D), on aura donc pour n suffisamment grand

$$(84) \quad F(\zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0) - G_n(\zeta_1^0, \zeta_1^0, \dots, \zeta_k^0, \zeta_k^0) < w/2,$$

d'où

$$(85) \quad 0 \leq F^{(l)}(\zeta_l) - G_n^{(l)}(\zeta_l^0, \zeta_l^0) < w,$$

ce qui montre que

$$(86) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n^l(\zeta_l^0, \zeta_l^0) = F^l(\zeta_l^0).$$

On prouve d'une manière tout à fait analogue que

$$(87) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n^{(l)}(\zeta_l^0) = F^{(l)}(\zeta_l^0).$$

i désignant un nombre quelconque de la suite $1, 2, \dots, k$, les équations (86) et (87) montrent que chacune des suites $\{X_n^{(l)}\}$ converge stochastiquement vers $X^{(l)}$ ($i=1, 2, \dots, k$), et, par conséquent, que la suite des systèmes $\{X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}\}$ converge stochastiquement vers le système $\{X^{(1)}, \dots, X^{(k)}\}$, c. q. t. d.

Remarquons, que l'on peut considérer aussi la convergence des systèmes de variables aléatoires dans le cas où le système limite de ces variables n'est pas connu.

5. Passons maintenant aux critères de la convergence stochastique qui s'expriment par les fonctions caractéristiques. Rappelons la définition de ces fonctions.

T étant une variable aléatoire, possédant une loi $F(x)$, nous appelons *fonction caractéristique de la variable T* , ou bien *fonction caractéristique de la loi $F(x)$* , la fonction ψ de la variable réelle t , définie par la formule

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x),$$

l'intégrale étant entendue au sens de Stieltjes-Riemann.

D'une façon analogue, nous définissons la *fonction caractéristique de deux variables* quelconques Y et Z , ou bien la *fonction caractéristique de loi de probabilité $F(x, y)$* de ces variables, par la formule

$$\psi(t', t'') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(xt' + yt'')} dF(x, y),$$

où t' et t'' sont des variables réelles et l'intégrale double est celle de Stieltjes-Riemann.

Nous allons nous appuyer sur deux théorèmes suivants de la théorie des fonctions caractéristiques:

Théorème de Lévy⁸⁾. *La condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une suite $\{F_n(x)\}$ de lois de probabilité totale vers une loi $F(x)$ dans tous les points de continuité de la fonction $F(x)$ est la convergence de la suite $\{\psi_n(t)\}$, où $\psi_n(t)$ est la fonction caractéristique de la loi $F_n(x)$, vers une limite $\psi(t)$, la convergence étant uniforme dans un intervalle contenant à l'intérieur le point $t=0$.*

De plus, $\psi(t)$ est précisément la fonction caractéristique de la loi $F(x)$.

Théorème de Lévy-Romanovsky⁹⁾. *La condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une suite $\{F_n(x, y)\}$ de lois de probabilité vers une loi $F(x, y)$ dans tous les points de continuité de la fonction $F(x, y)$ est la convergence uniforme dans tout intervalle fini $\langle t', t'' \rangle$ de la suite $\{\Psi_n(t', t'')\}$ de fonctions caractéristiques correspondantes vers la fonction caractéristique de la loi $F(x, y)$.*

⁸⁾ P. Lévy, *Théorie de l'Addition des variables aléatoires* p. 49, Théorème 17 (Monographies des probabilités publiées sous la direction de M. Emile Borel, Fasc. I. Paris 1937).

⁹⁾ V. Romanovsky, *Recueil Mathématique de la Société Mathématique de Moscou* 36 (1929), p. 36-64.

Lemme. Si T et Z sont deux variables aléatoires presque égales et $\psi(t)$ est la fonction caractéristique de la variable T , alors $\psi(t+t')$ est la fonction caractéristique des variables T et Z .

Démonstration. Posons pour x, y réels quelconques:

$$(88) \quad F(x) = P\{T < x\} = P\{Z < x\}, \quad F(x, y) = P\{T < x, Z < y\}.$$

Etant donné un nombre $\varepsilon > 0$ quelconque, soit N un nombre fixe tel que

$$(89) \quad F(N, N) - F(N, -N) - F(-N, N) + F(-N, -N) = \\ = F(N) - F(-N) > 1 - \varepsilon/4.$$

Par conséquent:

$$(90) \quad \left| \int_{-N}^N \int_{-N}^N e^{i(xt' + yt'')} dF(x, y) - \psi(t', t'') \right| < \varepsilon/4,$$

$$(91) \quad \left| \int_{-N}^N e^{ix(t' + t'')} dF(x) - \psi(t' + t'') \right| < \varepsilon/4.$$

Les fonctions $e^{i(xt' + yt'')}$ et $e^{ix(t' + t'')}$ étant uniformément continues par rapport aux variables x et y pour $|x| \leq N$, $|y| \leq N$ et t', t'' fixes, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que l'on a pour $|x_1 - x_2| \leq \eta$ et $|y_1 - y_2| \leq \eta$:

$$(92) \quad |e^{i(x_1 t' + y_1 t'')} - e^{i(x_2 t' + y_2 t'')}| < \varepsilon/4,$$

$$(93) \quad |e^{ix_1(t' + t'')} - e^{ix_2(t' + t'')}| < \varepsilon/4.$$

En employant la représentation géométrique, divisons l'intervalle $\langle -N, N \rangle$ de l'axe Ox d'un système cartésien de coordonnées en sous-intervalles de longueur plus petite que η ; traçons par les points de division d'abscisses z_i ($-N = z_0 < z_1 < \dots < z_k = N$) les lignes parallèles à l'axe Oy , jusqu'à l'intersection avec les côtés du carré $|x| \leq N$, $|y| \leq N$. Ces parallèles coupent la droite $y = x$ en $k+1$ points par lesquels nous allons tracer des parallèles à l'axe Ox jusqu'à l'intersection avec les côtés du carré. Le carré $|x| \leq N$, $|y| \leq N$ se trouvera ainsi divisé en rectangles que nous allons classer en deux familles. Rangeons dans la famille I les carrés ayant deux sommets sur la droite $y = x$ et dans la famille II les rectangles qui restent.

On a pour chacun de ces derniers:

$$(94) \quad \left| \int_L \int_L e^{i(xt' + yt'')} dF(x, y) \right| \leq \int_L \int_L dF(x, y) = 0,$$

ce qui donne en vertu de (92)

$$(95) \quad \left| \int_{-N}^N \int_{-N}^N e^{i(xt' + yt'')} dF(x, y) - \sum_{s=1}^k e^{iz_s(t' + t'')} \Delta_s F(x, y) \right| < \varepsilon/4,$$

où

$$(96) \quad \Delta_s F(x, y) = F(z_s, z_s) - F(z_s, z_{s-1}) - F(z_{s-1}, z_s) + F(z_{s-1}, z_{s-1})$$

pour $s=1, 2, \dots, k$.

Evidemment

$$(97) \quad \Delta_s F(x, y) = F(z_s) - F(z_{s-1}) \quad (s=1, 2, \dots, k).$$

D'autre part, on a en vertu de (93)

$$(98) \quad \left| \int_{-N}^N e^{ix(t' + t'')} dF(x) - \sum_{s=1}^k e^{iz_s(t' + t'')} [F(z_s) - F(z_{s-1})] \right| < \varepsilon/4.$$

On obtient de (90), (91), (95) et (98)

$$(99) \quad \left| \int_{-N}^N \int_{-N}^N e^{i(xt' + yt'')} dF(x, y) - \int_{-N}^N e^{ix(t' + t'')} dF(x) \right| < \varepsilon/2$$

et par suite, en vertu de (90) et (91),

$$(100) \quad |\psi(t, t'') - \psi(t' + t'')| < \varepsilon.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, nous en concluons que $\psi(t, t'') = \psi(t' + t'')$, c. q. f. d.

6. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ et X des variables aléatoires. Posons:

$$F(x) = P\{X < x\}, \quad F_n(x, y) = P\{X_n < x, X < y\}.$$

Désignons par $\varphi_n(t', t'')$ la fonction caractéristique de la loi $F_n(x, y)$ et par $\varphi(t)$ celle de la loi $F(x)$.

Théorème IV. La condition nécessaire et suffisante pour la convergence stochastique de la suite $\{X_n\}$ vers X est qu'on ait

$$(F) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t', t'') = \varphi(t' + t'')$$

uniformément dans tout domaine borné $|t'| \leq T'$, $|t''| \leq T''$.

Ce théorème résulte *a fortiori* du th. I' et du th. de Lévy-Romanovsky, si l'on remarque que, en vertu du lemme, la fonction caractéristique de deux variables aléatoires dont chacune est presque égale à la variable X est précisément $\varphi(t' + t'')$.

7. Etant donnée une suite $\{X_n\}$ de variables aléatoires quelconques, posons:

$$(101) \quad F_n(x) = P\{X_n < x\}, \quad F_{nm}(x, y) = P\{X_n < x, X_m < y\}.$$

Désignons comme auparavant par $\varphi_{nm}(t', t'')$ la fonction caractéristique de la loi $F_n(x)$ et par $\varphi_n(t)$ celle de la loi $F_n(x)$.

Théorème V. La condition nécessaire et suffisante pour la convergence stochastique de la suite $\{X_n\}$ vers une variable aléatoire est la convergence uniforme, avec $n \rightarrow +\infty$ et $m \rightarrow +\infty$, de la suite $\{\varphi_{nm}(t', t'')\}$ dans tout domaine borné $|t'| \leq T'$, $|t''| \leq T''$.

Démonstration. Pour montrer que la condition est nécessaire, supposons que la suite $\{X_n\}$ converge stochastiquement vers une variable aléatoire. D'après le th. II', il existe alors une loi de probabilité totale $\Phi(x, y)$ de deux variables presque égales, telle que l'on a dans chaque point (u, z) qui est un point de continuité de la fonction $\Phi(x, y)$:

$$(102) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} F_{nm}(u, z) = \Phi(u, z).$$

Désignons par $\psi(t', t'')$ la fonction caractéristique de la loi $\Phi(x, y)$. Nous allons montrer que l'égalité

$$(103) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \varphi_{nm}(t', t'') = \psi(t', t'')$$

se présente uniformément dans tout domaine borné $|t'| \leq T'$, $|t''| \leq T''$.

Supposons, par contre, qu'il n'en soit pas ainsi. Il existerait donc des nombres $\varepsilon_0, T'_0, T''_0, t'_k, t''_k$ (où $k=1, 2, \dots$) et deux suites croissantes d'indices $\{n_k\}$ et $\{m_k\}$, telles que:

$$(104) \quad |\varphi_{n_k m_k}(t'_k, t''_k) - \psi(t', t'')| \geq \varepsilon_0, \quad |t'_k| \leq T'_k, \quad |t''_k| \leq T''_0 \quad (k=1, 2, \dots).$$

D'autre part, on obtient de (102)

$$(105) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} F_{n_k m_k}(u, z) = \Phi(u, z)$$

et, en vertu du th. de Lévy-Romanovsky,

$$(106) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_{n_k m_k}(t', t'') = \psi(t', t'')$$

uniformément pour $|t'| \leq T'_0$, $|t''| \leq T''_0$.

Or, (106) est en contradiction avec (104).

Pour établir la suffisance de la condition, supposons que la suite $\{\varphi_{nm}(t', t'')\}$ converge uniformément dans tout domaine borné des variables t', t'' et désignons par $\omega(t', t'')$ la limite de la suite $\{\varphi_{nm}(t', t'')\}$. On a alors

$$(107) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \varphi_{nm}(t', t'') = \omega(t', t'')$$

uniformément pour $|t'| \leq T'$, $|t''| \leq T''$. Si $n=m$, on a

$$\varphi_{nn}(t', t'') = \varphi_n(t' + t'').$$

Il en résulte que la suite $\{\varphi_n(t)\}$ est uniformément convergente dans tout l'intervalle fini $|t| \leq T'$ et que $\omega(t', t'') = \omega_1(t' + t'')$. Nous en concluons en vertu du théorème de Lévy que la limite $\omega_1(t)$ de la suite $\{\varphi_n(t)\}$ est la fonction caractéristique d'une certaine loi de probabilité $\Phi(x)$. D'après le lemme, $\omega_1(t' + t'') = \omega(t', t'')$ est donc fonction caractéristique de deux variables presque égales dont chacune admet la loi de probabilité $\Phi(x)$. Désignons par $\Phi(x, y)$ la loi de probabilité de ces variables. Soit (u, z) un point de continuité de la fonction $\Phi(x, y)$. Nous allons prouver que

$$(108) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} F_{nm}(u, z) = \Phi(u, z).$$

Supposons, par contre, que (108) est en défaut dans un point (u_0, z_0) de continuité de la fonction $\Phi(x, y)$. Alors il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites croissantes d'indices $\{n_k\}$, $\{m_k\}$ telles que

$$(109) \quad |F_{n_k m_k}(u_0, z_0) - \Phi(u_0, z_0)| \geq \varepsilon_0 \quad (k=1, 2, \dots).$$

D'autre part, on a selon (107)

$$(110) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_{n_k m_k}(t', t'') = \omega(t', t'')$$

uniformément pour $|t'| \leq T'$, $|t''| \leq T''$ où T', T'' sont deux nombres positifs quelconques. Il en résulte en vertu du théorème de Lévy-Romanovsky que

$$(111) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} F_{n_k m_k}(u_0, z_0) = \Phi(u_0, z_0),$$

contrairement à (109).

L'égalité (108) étant ainsi établie, on en conclut en vertu du th. II que la suite $\{X_n\}$ est stochastiquement convergente.

Après avoir démontré — ce qui ne comporte aucune difficulté — les théorèmes de la théorie des fonctions caractéristiques, analogues à ceux de M. Glivenko ¹⁰⁾ et M. Cramér ¹¹⁾ pour les lois de probabilité de deux variables, on peut remplacer la convergence uniforme de la suite de fonctions caractéristiques par des conditions plus faibles.

¹⁰⁾ V. Glivenko, *Sul teorema limite della teoria delle funzioni caratteristiche*, Giorn. Istit. Attuari 7 (1936), p. 160—167.

¹¹⁾ H. Cramér, *Random variables and Probability Distributions*, Cambridge 1937, p. 29—31 et 121.

Sur le prolongement des transformations en surfaces sphériques.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

Etant donnés dans une variété n -dimensionnelle \mathcal{C} deux ensembles fermés et disjoints X et Y , on peut étudier leur situation mutuelle dans \mathcal{C} soit par la méthode d'homologie ¹⁾, soit, dans quelques questions particulières, par la considération du groupe fondamental de $\mathcal{C}-X-Y$ ²⁾.

La troisième méthode, très peu développée, est celle de mettre en jeu aussi les transformations continues f de X en sous-ensembles d'un espace \mathfrak{S} convenablement choisi et d'envisager ces transformations au point de vue de l'existence de leurs prolongements $f(\mathcal{C}-Y) \subset \mathfrak{S}$.

C'est ainsi que M. Borsuk a examiné récemment ³⁾ le cas où \mathcal{C} est une surface sphérique n -dimensionnelle S^n et $X=\mathfrak{S}$, en aboutissant à des conditions nécessaires de nature homologique (et qui sont aussi suffisantes dans quelques cas spéciaux), pour que toute transformation $f(X) \subset X$ admette un prolongement $f(S^n-Y) \subset X$ ⁴⁾.

Dans la suite, nous allons fixer \mathfrak{S} : ce sera toujours la surface sphérique m -dimensionnelle S^m ($m > 0$). Nous aboutirons à des conditions pour que toute transformation $f(X) \subset S^m$ admette un prolongement $f(\mathcal{C}-Y) \subset S^m$. Ces conditions seront également homologiques, mais cette fois elles seront suffisantes (sans être généralement nécessaires).

¹⁾ Voir p. ex. S. Lefschetz, *Topology*, New-York 1930, p. 142.

²⁾ K. Reidemeister, *Knotentheorie*, Berlin, Springer 1932.

³⁾ K. Borsuk, *Fund. Math.* 29 (1937), p. 191-205.

⁴⁾ c. à d. pour que X soit un rétracte de S^n-Y .