Sur un problème de MM. Kuratowski et Ulam.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

1. Etant donnés deux ensembles compacts X et Y, soit $\tau(X,Y)$ la borne inférieure des plus grands diamètres $\delta[f^{-1}(y)]$ considérés pour toutes les fonctions continues f transformant X en Y tout entier, $f^{-1}(y)$ désignant, pour tout $y\epsilon Y$, l'ensemble des $x\epsilon X$ tels que $f(x)=y$. Si $\tau(X,Y)=\tau(Y,X)=0$, les ensembles X et Y s'appellent *quasi-homéomorphes* [1]).

MM. Kuratowski et Ulam ont posé le problème suivant: *l'existence d'une transformation continue φ de X en $\varphi(X)\subset X$ sans point invariant* (c. à d. telle que $\varphi(x)\neq x$ pour tout $x\epsilon X$) *est-elle une propriété invariante par rapport à la quasi-homéomorphie?*

Nous allons montrer que, dans le cas général, la réponse est *négative*, mais qu'elle est affirmative lorsque chacun des ensembles X,Y est un rétracte absolu de voisinage [2]).

2. ***Théorème.*** *Etant donné un rétracte absolu de voisinage X qui se laisse transformer en son sous-ensemble sans points invariants, il existe un $\varepsilon>0$ tel que, pour chaque transformation continue φ de X satisfaisant à l'inégalité $\delta[\varphi^{-1}(y)]<\varepsilon$ pour tout $y\epsilon\varphi(X)$, il existe une transformation continue de l'ensemble $\varphi(X)$ en lui-même sans points invariants.*

[1]) C. Kuratowski et S. Ulam, *Sur un coefficient lié aux transformations continues d'ensembles*, Fund. Math. **20** (1933), p. 252.

[2]) On entend par *rétracte absolu de voisinage* un espace compact A tel que, pour tout espace $M\supset A$, il existe une fonction continue $r(x)$ transformant un entourage U de A en A de manière que $r(x)=x$ pour tout $x\epsilon A$. En particulier, tout polyèdre (fini) est un rétracte absolu de voisinage.

Démonstration. L'ensemble X étant compact, il existe une constante positive η et une fonction continue f transformant X en lui-même de façon que

(1) $$|f(x)-x|\geqslant\eta \qquad \text{pour tout} \quad x\epsilon X.$$

L'ensemble X étant un rétracte absolu de voisinage, on peut faire correspondre à η un $\varepsilon>0$ tel [3]) que, pour chaque transformation continue φ de X satisfaisant à l'inégalité $\delta[\varphi^{-1}(y)]<\varepsilon$ pour tout $y\epsilon\varphi(X)$, il existe une transformation ψ de $\varphi(X)$ en un sous-ensemble de X assujettie à la condition

(2) $$|\psi\varphi(x)-x|<\eta \qquad \text{pour tout} \quad x\epsilon X.$$

Or, la fonction continue $g=\varphi f\psi$ transforme l'ensemble $\varphi(X)$ en son sous-ensemble sans points invariants. En effet, dans le cas contraire, il existerait un $y_0\epsilon\varphi(X)$ tel que $\varphi f\psi(y_0)=y_0$. Par conséquent, on aurait

(3) $$\psi\varphi f\psi(y_0)=\psi(y_0)$$

et la substitution $x=f\psi(y_0)$ dans l'inégalite (2) donnerait

$$|\psi\varphi f\psi(y_0)-f\psi(y_0)|<\eta,$$

d'où, en vertu de (3), $|f\psi(y_0)-\psi(y_0)|<\eta$, contrairement à (1).

Corollaire. *Etant donnés deux rétractes absolus de voisinage quasi-homéomorphes, X et Y, si X admet un point invariant pour toute transformation continue en son sous-ensemble, il en est de-même de Y.*

3. Soit $\mathfrak{C}$ le continu construit par moi comme l'exemple d'un continu péanien acyclique qui se laisse transformer en lui-même par une homéomorphie sans point invariant [4]). Cet exemple s'obtient en enlevant du cylindre

$$C=\underset{p}{E}[p=(x,y,z);\ x^2+y^2\leqslant 11^2;\ -3\leqslant z\leqslant 3]$$

deux tubes ouverts par rapport à C, dont chacun prend l'origine respectivement sur l'une des bases de C et, sans rencontrer l'autre tube, se contourne autour de lui en spirale de plus en plus effilée s'approchant asymptotiquement d'une circonférence située sur l'autre base de C et qui y entoure l'origine de l'autre tube.

[3]) S. Eilenberg, *Sur les transformations à petites tranches*, Fund. Math. **30** (1938), p. 92.

[4]) K. Borsuk, *Sur un continu acyclique qui se laisse transformer topologiquement en lui-même sans points invariants*, Fund. Math. **24** (1934), p. 51-58.

Dans la suite, on n'aura à faire intervenir que trois propriétés de $\mathfrak{A}$, dont la première a été démontrée dans ma Note précitée [5]) et dont les deux autres sont des conséquences immédiates de la définition [4]) de $\mathfrak{A}$. Ces trois propriétés sont les suivantes:

(4) Soit $A_i^{(n)} = \underset{p}{E}[p=(x,y,z);\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1.1^2;\ 3-1/n \leqslant iz \leqslant 3]$ où $i=\pm 1$, $n=1,2,\ldots$ L'ensemble $A^{(n)} = \mathfrak{A} + A_1^{(n)} + A_{-1}^{(n)}$ est pour tout $n=1,2,\ldots$ un élément [6]) de dimension 3.

(5) Soit $P_i = \underset{p}{E}[p=(x,y,z); z=3i]$ où $i=\pm 1$. L'ensemble $\mathfrak{A}\cdot P_i$ coïncide avec l'anneau $B_i = \underset{p}{E}[p=(x,y,z);\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1.1^2;\ z=3i]$.

(6) L'hemisphère $H = \underset{p}{E}[p=(x,y,z);\ x^2+(y-2)^2+(z-3)^2 \leqslant 1;\ z \leqslant 3]$ est contenue dans A et l'ensemble $\overline{A-H}$ est un continu péanien contenant la partie sphérique de la surface de H.

Soit $\mathfrak{B}$ le cube euclidien à 3 dimensions (donc un continu qui admet au moins un point invariant pour chaque transformation continue en son sous-ensemble). Je vais montrer que le continu $\mathfrak{A}$ et le cube $\mathfrak{B}$ sont quasi-homéomorphes.

4. ***Lemme.*** *Prémisses*: 1⁰ *M est un espace métrique.*

2⁰ *Q est un rétracte absolu* [7]) *situé dans M.*

3⁰ *Il existe dans M des arcs simples L tels que $L\cdot Q \neq 0 \neq L-Q$.*

4⁰ *P est un continu péanien.*

5⁰ *φ est une fonction continue transformant Q en un sous-ensemble de P.*

Thèse: *Il existe un prolongement continu ψ de φ sur l'espace M tout entier satisfaisant à la condition $\psi(\overline{M-Q}) = P$.*

Démonstration. En vertu de 3⁰, il existe un arc simple $L \subset M$ n'ayant qu'un seul point a commun avec Q. D'après 2⁰, l'ensemble $Q+L$ est un rétracte absolu [8]). Par conséquent, il existe une fonction $r(x)$ rétractant M en $Q+L$. L'ensemble P étant, selon 4⁰, un continu péanien, il existe une fonction continue φ^* transformant L en P tout entier de façon que $\varphi^*(a) = \varphi(a)$. En tenant compte de 5⁰, la fonction

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{pour tout } x \in Q \\ \varphi^*(x) & \text{pour tout } x \in L \end{cases}$$

est un prolongement continu de φ sur l'ensemble $Q+L$ et on a $\psi^*(Q+L) = P$. La fonction

$$\psi(x) = \psi^*[r(x)] \qquad \text{pour tout } x \in M$$

satisfait à la thèse du lemme.

[5]) l. c., p. 54.

[6]) On entend par *élément n-dimensionnel* un ensemble homéomorphe au cube euclidien à n-dimensions.

[7]) On entend par *rétracte absolu* un espace Q tel qu'il existe, pour tout espace $E \supset Q$, une fonction continue r (fonction *rétractant* E en Q) transformant E en Q de façon que l'on a $r(x)=x$ pour tout $x \in Q$.

[8]) N. Aronszajn et K. Borsuk, *Sur la somme et le produit combinatoire des rétractes absolus*, Fund. Math. **18** (1932), p. 194.

5. ***Théorème.*** *Le continu $\mathfrak{A}$ et le cube euclidien $\mathfrak{B}$ sont quasi-homéomorphes.*

Démonstration. 1⁰ $\tau(\mathfrak{A},\mathfrak{B})=0$. Il s'agit de montrer qu'il existe, pour tout $\varepsilon>0$, une fonction continue ψ transformant $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ et satisfaisant à l'inégalité

$$\delta[\psi^{-1}(y)] < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad y \in \mathfrak{B}. \tag{7}$$

Soit n un nombre naturel tel que $4/n < \varepsilon$. Envisageons une décomposition de l'anneau $B_i = \mathfrak{A}\cdot P$ en éléments $E_i^1, E_i^2, \ldots, E_i^{k_i}$ à 2 dimensions, de diamètre $\leqslant 1/n$ et dont les intérieurs sont disjoints deux à deux. En posant

$$C_i^j = \underset{p}{E}[p=(x,y,z);\ (x,y,3i) \in E_i^j;\ 3-1/n \leqslant iz \leqslant 3] \tag{8}$$

pour tout $i=\pm 1$ et $j=1,2,\ldots,k_i$, on obtient des éléments à 3 dimensions, de diamètre $\leqslant 2/n$, dont les intérieurs sont disjoints deux à deux et qui constituent une décomposition de l'ensemble $A_i^{(n)}$, défini par (4). Soit Q_i^j l'élément de dimension 2 qui s'obtient de la surface S_i^j de l'élément C_i^j, en enlevant de S_i^j l'intérieur de l'élément E_i^j. Appliquons le lemme **4**, en y posant:

$$M = S_i^j, \qquad P = C_i^j, \qquad Q = Q_i^j \qquad \text{et} \qquad \varphi = \textit{identité}.$$

On en conclut qu'il existe une fonction ψ transformant S en C_i^j d'une manière continue, l'élément Q_i^j en lui-même par l'identité et qui prend dans E_i^j tout point de C_i^j comme valeur. L'ensemble C_i^j étant un rétracte absolu, la fonction ψ se laisse prolonger à une transformation continue de l'élément C_i^j tout entier en lui-même.

En appliquant ce procédé à tout élément C_i^j, on parvient à une fonction continue f définie dans l'ensemble $A_1^{(n)}+A_{-1}^{(n)}$, transformant chacun des ensembles $A_i^{(n)}$ en lui-même de façon que les ensembles

$$B_i^{(n)}=\underset{p}{E}[p=(x,y,z);\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 11^2;\ z=3i-i/n],$$

où $i=\pm 1$, se trouvent transformés en eux-mêmes par l'identité et que l'anneau B_i, défini dans (5), soit transformé en $A_i^{(n)}$ tout entier. En outre, pour une telle fonction f, tout argument $x\in A_i^{(n)}$ appartient au même élément C_i^j que la valeur $\psi(x)$. Par conséquent $|f(x)-x|<2/n$ pour tout $x\in A_i^{(n)}$, de sorte que la transformation f satisfait à l'inégalité $\delta[f^{-1}(y)]<4/n<\varepsilon$ pour tout $y\in B_1^{(n)}+B_{-1}^{(n)}$. Or, en prolongeant f par l'égalité

$$f(x)=x \qquad \text{pour tout} \quad x\in\mathcal{C}-(A_1^{(n)}+A_{-1}^{(n)}),$$

on obtient une fonction continue, définie dans le sur-ensemble $\mathcal{C}+A_1^{(n)}+A_{-1}^{(n)}$ de $\mathcal{C}$ et satisfaisant à la condition

$$\delta[f^{-1}(y)]<\varepsilon, \quad \text{quel que soit } y\in f(\mathcal{C}).$$

Cette fonction transforme, en particulier, $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}+A_1^{(n)}+A_{-1}^{(n)}$. D'après (4), il existe une homéomorphie h transformant $\mathcal{C}+A_1^{(n)}+A_{-1}^{(n)}$ en $\mathcal{B}$. Il suffit donc de poser

$$\psi(x)=hf(x) \qquad \text{pour tout} \quad x\in\mathcal{C},$$

afin d'obtenir une transformation continue de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{B}$ satisfaisant à l'inégalité (7).

2^0 $\tau(\mathcal{B},\mathcal{C})=0$. Il s'agit de montrer qu'il existe, pour tout $\varepsilon>0$, une fonction ψ transformant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ et satisfaisant à l'inégalité

$$(9) \qquad \delta[\psi^{-1}(y)]<\varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad y\in\mathcal{C}.$$

Envisageons une décomposition du cube $\mathcal{B}$ en deux éléments Q_1 et Q_2 tels que $\delta(Q_1)<\varepsilon$ et que leur partie commune $Q=Q_1\cdot Q_2$ soit un élément de dimension 2 situé à la surface de Q_1 et de Q_2. Soit φ une homéomorphie transformant Q_2 en l'hémisphère H de manière que l'élément $\varphi(Q)$ coïncide avec la partie sphérique de la surface de H. En tenant compte de la propriété (6), appliquons le lemme **4** (avec $M=Q_1$ et $P=\overline{\mathcal{C}-H}$) à la fonction φ considérée seulement dans l'élément Q. Il existe donc un prolongement continu de φ sur l'élément Q_1 tout entier transformant Q_1 en $\overline{\mathcal{C}-H}$. La fonction φ ainsi prolongée transforme la somme $Q_1+Q_2=\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ de manière que l'égalité $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$ ne se présente pour $x_1\neq x_2$ que dans le cas où x_1 et x_2 appartiennent à Q_1. Comme $\delta(Q_1)<\varepsilon$, on en conclut que la fonction ψ jouit de la propriété (9), ce qui achève la démonstration.

6. Comme le continu $\mathcal{C}$ n'est pas localement connexe en dimension 1 [9]), et par conséquent ni localement contractile [10]), ni rétracte absolu, et son groupe fondamental [11]) ne disparaît pas [12]) — tandis que le cube euclidien à 3 dimensions $\mathcal{B}$ jouit de chacune de ces propriétés — on parvient au

Corollaire. *Aucune des propriétés suivantes: connexité locale en dimension 1, contractilité locale, rétracte absolu, évanouissement du groupe fondamental, n'est invariante par rapport à la quasi-homéomorphie.*

---

[9]) Un espace compact E est dit *localement connexe en dimension* 1, lorsqu'à chaque $\varepsilon>0$ correspond un $\eta>0$ tel que, pour toute fonction continue f transformant la circonférence $\underset{p}{E}[p=(x,y);\ x^2+y^2=1]$ en un sous-ensemble de E de diamètre $<\eta$, il existe un prolongement continu de f sur le cercle

$$\underset{p}{E}[p=(x,y);\ x^2+y^2\leqslant 1]$$

dont les valeurs constituent un sous-ensemble de E de diamètre $<\varepsilon$.

[10]) Un espace compact E est dit *localement contractile*, lorsqu'à tout $\varepsilon>0$ correspond un $\eta>0$ tel que, pour tout sous-ensemble K de E de diamètre $<\eta$, il existe une fonction continue de deux variables $\varphi(x,t)$, où $x\in K$ et $0\leqslant t\leqslant 1$, dont les valeurs constituent un sous-ensemble de E de diamètre $<\varepsilon$ et qui satisfait aux conditions: $\varphi(x,0)=x$; $\varphi(x,1)=\text{const.}$, quel que soit $x\in K$. Un espace localement contractile est connexe en toutes dimensions. Chaque rétracte absolu de voisinage est localement contractile.

[11]) Quant à la définition du groupe fondamental, voir p. ex. S. Lefschetz, *Topology*, New York 1930, p. 82-83.

[12]) K. Borsuk, l. c., p. 58.