11. ***Démonstration du théorème dans le cas général.*** Faisons correspondre à tout type topologique[12]) d'un graphe connexe de dimension 1 la variable réelle y munie d'un indice convenable, et au type topologique des graphes se réduisant à un seul élément — le nombre 1.

Soit K un polyèdre dont toute composante C admet une décomposition en produit cartésien des graphes $L_1, L_2, \dots, L_m$. D'après **10**, les types topologiques des L_i qui ne se réduisent pas à un seul élément sont déterminés d'une manière univoque. Soit y_i la variable correspondant au type topologique de L_i. Le produit $P(C)=y_1\cdot y_2\cdot\ldots\cdot y_n$ est alors déterminé par le type topologique de C et réciproquement. Par addition de tous les produits $P(C)$ correspondant aux composantes C de K, on parvient à un polynôme $P(K)$ aux coefficients entiers non négatifs. Le polynôme $P(K)$ sera dit *polynôme caractéristique du polyèdre* K.

Le degré du polynôme caractéristique $P(K)$ coïncide évidemment avec la dimension de K. En particulier, le polynôme caractéristique d'un polyèdre formé de m points se réduit au nombre m. On voit, en outre, que le polynôme caractéristique de la somme de deux polyèdres disjoints est la somme de leurs polynômes caractéristiques et que le polynôme caractéristique du produit cartésien de deux polyèdres est le produit de leurs polynômes caractéristiques. Il en résulte sans peine que, pour tout polynôme

$$P=\sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} a_{i_1 i_2 \dots i_k}\, y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_k^{i_k} \neq 0$$

aux coefficients $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ entiers non négatifs, il existe un polyèdre dont le polynôme caractéristique coïncide avec P.

On en conclut que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polyèdre K soit décomposable en un produit cartésien des graphes topologiquement premiers est que son polynôme caractéristique $P(K)$ soit décomposable en un produit de facteurs linéaires et premiers (dont les coefficients sont des entiers réels). Cette dernière décomposition étant unique d'après le théorème bien connu de l'algèbre, il en est de même de la décomposition de K. L'unicité de cette décomposition est ainsi établie.

[12]) On entend par *type topologique* d'un graphe L la classe de tous les graphes (contenus p.ex. dans l'espace euclidien de dimension 3) homéomorphes à L.

Quelques propriétés caractéristiques de la dimension.

Par

S. Eilenberg et E. Otto (Warszawa).

Théorème auxiliaire. *Soient A et B deux sous-ensembles fermés et disjoints d'un espace métrique separable $\mathcal{Y}$. Pour toute suite $Y_1, Y_2, \dots$ de sous-ensembles fermés de $\mathcal{Y}$ où $\dim Y_i \leqslant n_i$, il existe un ensemble ouvert $G\subset\mathcal{Y}$ tel que*

(i) $A\subset G$ (ii) $B\subset X-\bar{G}$ [1])

(iii) $\dim[Y_i\cdot \mathrm{Fr}(G)]\leqslant n_i-1$ [2]).

Démonstration. Supposons d'abord que $\mathcal{Y}$ est compact. D'après le théorème général de décomposition[3]), il existe une décomposition $\mathcal{Y}=F_1+F_2+\dots+F_m$ en ensembles fermés de diamètre aussi petit que l'on veut et telle que

(iv) $\dim Y_i\cdot F_k\cdot F_l\leqslant n_i-1$ pour $k\neq l$ et $i=1,2,\dots$

On peut donc admettre que $F_k\cdot B\neq 0$ implique $F_k\cdot A=0$. Posons $S=\sum F_k$ où $F_k\cdot B\neq 0$ et soit $G=\mathcal{Y}-S$. On a évidemment (i) et (ii). Comme $G\subset\sum F_l$ où $F_l\cdot B=0$, il vient

$$\mathrm{Fr}\,(G)=\bar{G}\cdot S\subset\sum_{k\neq l} F_k\cdot F_l$$

ce qui donne (iii) en vertu de (iv) et du théorème d'addition[4]).

[1]) $\bar{G}$ désigne la fermeture de G.

[2]) $\mathrm{Fr}(G)=\bar{G}-G$ (pour G ouverts).

[3]) C. Kuratowski, Fund. Math. **18** (1932), p. 290, corollaire.

[4]) Voir p.ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa—Lwów 1933, p. 126.

Si $\mathscr{Y}$ est un espace métrique séparable arbitraire, on peut le plonger [5]) dans un espace métrique compact $\mathscr{Y}^*$ de façon que $\dim \overline{Y}_i = \dim Y_i$ pour $i=1,2,\dots$ et que $\bar{A}\cdot\bar{B}=0$. La démonstration se réduit ainsi au cas de $\mathscr{Y}$ compact.

Théorème 1. *Soient $A_1, A_2, \dots$ et $B_1, B_2, \dots$ deux suites de sous-ensembles fermés d'un espace métrique séparable $\mathscr{X}$, telles que $A_i\cdot B_i=0$ pour $i=1,2,\dots$ Pour toute suite $X_1, X_2, \dots$ de sous-ensembles fermés de $\mathscr{X}$ où $\dim X_i \leqslant n_i$, il existe une suite $G_1, G_2, \dots$ de sous-ensembles ouverts de $\mathscr{X}$ telle que*

$$A_i \subset G_i, \qquad B_i \subset \mathscr{X} - \bar{G}_i,$$

$$\dim [X_i \cdot \mathrm{Fr}(G_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Fr}(G_{i_k})] \leqslant n_i - k,$$

quel que soit le système d'indices $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ où $k \leqslant n_i + 1$.

Démonstration. Supposons les ensembles G_i déjà définis pour $i<m$. Appliquons le théorème auxiliaire, en y posant $\mathscr{Y}=\mathscr{X}$, $A=A_m$, $B=B_m$ et en faisant les ensembles $Y_1, Y_2, \dots$ parcourir tous les ensembles de la forme

$$X_i \cdot \mathrm{Fr}(G_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Fr}(G_{i_k})$$

où $i_1 < i_2 < \ldots < m$. Posons $G_m = G$. La suite $G_1, G_2, \dots$ ainsi définie satisfait évidemment à la thèse du th. 1, c. q. f. d.

Théorème 2. *Pour toute suite de sous-ensembles fermés $X_1, X_2, \dots$ d'un espace métrique separable $\mathscr{X}$, tels que $\dim X_i \leqslant n_i$, il existe une base d'ensembles ouverts $G_1, G_2, \dots$ telle que*

$$\dim X_i \cdot \mathrm{Fr}(G_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Fr}(G_{i_k}) \leqslant n_i - k,$$

quel que soit le système d'indices $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ où $k \leqslant n_i + 1$.

Démonstration. Soit $H_1, H_2, \dots$ la base d'ensembles ouverts dans l'espace $\mathscr{X}$. Considérons tous les couples H_{j_l}, H_{k_l} où $\bar{H}_{j_l} \subset H_{k_l}$ et posons $A_i = \bar{H}_{j_i}$ et $B_i = \mathscr{X} - H_{k_i}$. En appliquant le th. 1, on obtient la base cherchée.

En particulier, pour $\mathscr{X} = X_1$ et $n = n_1$, on a les corollaires suivants:

[5]) C. Kuratowski, Fund. Math. **28** (1937), p. 337.

Corollaire 1. *Soient $A_1, A_2, \dots$ et $B_1, B_2, \dots$ deux suites de sous-ensembles fermés d'un espace métrique séparable $\mathscr{X}$ tel que $\dim \mathscr{X} \leqslant n$. Il existe une suite $G_1, G_2, \dots$ de sous-ensembles ouverts de $\mathscr{X}$ telle que*

$$A_i \subset G_i, \qquad B_i \subset \mathscr{X} - \bar{G}_i,$$

$$\dim [\mathrm{Fr}(G_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Fr}(G_{i_k})] \leqslant n - k,$$

quel que soit le système d'indices $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ où $k \leqslant n+1$.

Corollaire 2. *Pour tout espace métrique séparable $\mathscr{X}$ tel que $\dim \mathscr{X} \leqslant n$, il existe une base d'ensembles ouverts $G_1, G_2, \dots$ telle que*

$$\dim [\mathrm{Fr}(G_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Fr}(G_{i_k})] \leqslant n - k,$$

quel que soit le système d'indices $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ où $k \leqslant n+1$.

En particulier, on a alors

$$\dim \mathrm{Fr}(G_i) \leqslant n-1 \qquad \text{pour} \qquad i=1,2,\dots,$$

ce qui prouve que la thèse du cor. 2 (et par conséquent aussi celle du cor. 1) est aussi suffisante pour que $\dim \mathscr{X} \leqslant n$. Dans cette direction, on peut montrer davantage: on a notamment le

Théorème 3. *Soit $\mathscr{X}$ un espace métrique separable. Pour que $\dim \mathscr{X} \leqslant n$, il faut et il suffit que pour tout système d'ensembles fermés $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$, $B_1, B_2, \dots, B_{n+1} \subset \mathscr{X}$ tels que $A_i \cdot B_i = 0$ $(i=1,2,\dots,n+1)$, il existe un système d'ensembles ouverts $G_1, G_2, \dots, G_{n+1} \subset \mathscr{X}$ tel que*

$$(1) \quad A_i \subset G_i, \qquad (2) \quad B_i \subset \mathscr{X} - \bar{G}_i,$$

$$(3) \quad \mathrm{Fr}(G_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Fr}(G_{n+1}) = 0.$$

Démonstration. La nécessité de cette condition étant une conséquence immédiate du cor. 1, il reste à en établir la suffisance.

Soit à ce but Q_{n+1} le cube formé de tous les points

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

de l'espace euclidien $(n+1)$-dimensionnel R_{n+1} pour lesquels

$$-1 \leqslant x_i \leqslant 1 \qquad (i=1,2,\dots,n+1).$$

Désignons par S_n la surface sphérique (topologique) n-dimensionnelle qui est la frontière du cube Q_{n+1}.

Soit X un sous-ensemble fermé quelconque de $\mathcal{X}$ et $f \epsilon S_n^X$ une transformation continue de X en S_n. Soit $f_i(x)$ la i-ème coordonnée du point $f(x)$:

$$f(x)=[f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n+1}(x)]. \tag{4}$$

Posons pour $i=1,2,\dots,n+1$:

$$A_i=f_i^{-1}(-1), \qquad B_i=f_i^{-1}(1). \tag{5}$$

On a $A_i \cdot B_i=0$ et

$$X=A_1+A_2+\dots+A_{n+1}+B_1+B_2+\dots+B_{n+1}. \tag{6}$$

La condition étant nécessaire, il existe un système d'ensembles ouverts $G_1, G_2, \dots, G_{n+1} \subset \mathcal{X}$ assujettis aux relations (1)–(3).

Soit g_i une fonction continue à valeurs réelles définie sur $\mathcal{X}$ et telle que

$$\left\{\begin{array}{lll} g_i(x)=-1 & \text{pour} & x \epsilon A_i, \\ -1 \leqslant g_i(x)<0 & \text{pour} & x \epsilon G_i, \\ g_i(x)=0 & \text{pour} & x \epsilon \mathrm{Fr}(G), \\ 0<g_i(x) \leqslant 1 & \text{pour} & x \epsilon \mathcal{X}-\overline{G}_i, \\ g_i(x)=1 & \text{pour} & x \epsilon B_i. \end{array}\right. \tag{7}$$

Posons

$$g(x)=[g_1(x), g_2(x), \dots, g_{n+1}(x)]. \tag{8}$$

On a $g \epsilon Q_{n+1}^{\mathcal{X}}$. Comme $\mathrm{Fr}(G)=g_i^{-1}(0)$, il vient en vertu de (3)

$$x_0 \text{ non } \epsilon\, g(\mathcal{X}),$$

où x_0 désigne l'origine (le centre de Q_{n+1}). Il existe donc une fonction $p \epsilon S_n^{\mathcal{X}}$ telle que $p(x)=g(x)$ si $g(x) \epsilon S_n$, à savoir la projection centrale de l'ensemble $g(\mathcal{X})$ sur S_n du point x_0 comme centre. En particulier, on a donc en vertu de (6) et de (7)

$$p(x)=g(x) \quad \text{pour} \quad x \epsilon X. \tag{9}$$

Il résulte de (4)–(9) que, pour tout $x \epsilon X$, le segment $\overline{f(x), p(x)}$ est situé sur S_n. Soit λ la longueur de ce segment. En désignant par $\varphi_t(x)$, où $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $x \epsilon X$, le point situé sur le segment $\overline{f(x)\, p(x)}$ à la distance λt de $f(x)$ et $\lambda(1-t)$ de $p(x)$, les fonctions $\varphi_t(x)$ forment dans l'espace S_n^X un arc continu unissant les fonctions f et p.

Les transformations f et p de X en S_n appartiennent donc à la même composante de l'espace S_n^X. Or, $p \epsilon S_n^{\mathcal{X}}$ est un prolongement de $p \epsilon S_n^X$. Il en résulte [6]) que f admet un prolongement $f \epsilon S_n^{\mathcal{X}}$, ce qui implique que $\dim \mathcal{X} \leqslant n$ [7]).

---

[6]) K. Borsuk, Monatshefte für Math. u. Phys. **38** (1931), p. 383.

[7]) Pour X compact, voir P. Alexandroff, Math. Ann. **106** (1932), p. 170; W. Hurewicz, Fund. Math. **24** (1935), p. 144. Pour le cas général, la démonstration paraîtra dans le livre *Topologie II* de M. C. Kuratowski (collection „Monografie Matematyczne").