If $\sigma$ is a $\delta$-simplex of $K$, diameter $f(\sigma)<2\nu+\delta<\epsilon$. Hence, for any $\delta$-cycle $\gamma$ of $K$, $f(\gamma)$ is a simplicial map of $\gamma$ into the complex $A$, it is therefore a cycle of $A$. Those cycles of $A$ which are images of $\delta$-cycles of $K$ under $f$ form a subgroup. This group has a finite basis $a_1, a_2, \dots, a_k$. Let $a'_i$ be a $\delta$-cycle of $K$ such that $f(a'_i)=a_i$. Then $a'_1, a'_2, \dots, a'_k$ is a basis for the $\delta$-cycles of $K$ relative to $\epsilon$-homologies.

3. If $\{\gamma_n\}$ is a weakly convergent cycle and a number $\epsilon>0$ is given, there is a subsequence $\{\gamma'_n\}$ such that any two of its terms are $\epsilon$-homologous.

Choose a $\delta$ so that $\epsilon>\delta>0$. Then choose an integer $N$ so that $n, m \geqslant N$ implies that $\gamma_n, \gamma_m$ are $\delta$-cycles and $\gamma_n \underset{\epsilon}{\approx} \gamma_m$. Let $T(\epsilon,\delta)$ be the torsion subgroup of $H(\epsilon,\delta)$. Then $\gamma_n-\gamma_m$ is in $T(\epsilon,\delta)$. Let $T'(\epsilon,\delta)$ be the coset of $T(\epsilon,\delta)$ containing $\gamma_N$. Then each $\gamma_n$ $(n\geqslant N)$ is in $T'(\epsilon,\delta)$. From 2 it follows that $T(\epsilon,\delta)$ is finite; hence also $T'(\epsilon,\delta)$. Therefore some element of $T'(\epsilon,\delta)$ must contain infinitely many of the $\gamma$'s.

To prove 1 we choose a sequence $\epsilon_i\to 0$. Apply 3 to $\{\gamma_n\}$ and $\epsilon_1$ obtaining a subsequence $\{\gamma^1_n\}$. Then apply 3 to $\{\gamma^1_n\}$ and $\epsilon_2$ obtaining $\{\gamma^2_n\}$, and so on. The diagonal sequence $\{\gamma^n_n\}$ is then a a convergent cycle.

It follows from 1 that the homology groups based on weakly convergent cycles with weak homologies are identical with the homology groups based on convergent cycles with weak homologies.

---

# Sur la décomposition des polyèdres en produits cartésiens.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

**1.** On appelle *produit cartésien* $E_1\times E_2\times\dots\times E_n$ des espaces $E_1, E_2, \dots, E_n$ l'ensemble de tous les systèmes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, où $x_i \epsilon E_i$, métrisé par la formule

$$\varrho[(x_1,x_2,\dots,x_n),(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)]=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x'_i)^2};$$

on entend par *i-ème coordonnée* du point

$$p=(x_1,x_2,\dots,x_n)\,\epsilon\, E_1\times E_2\times\dots\times E_n$$

le point $x_i \epsilon E_i$.

Grand nombre de propriétés topologiques se transportent des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$ sur leur produit cartésien $E_1\times E_2\times\dots\times E_n$ et réciproquement. Telles sont p. ex.: compacité, connexité, connexité locale. On en conclut (les espaces péaniens étant compacts, connexes et localement connexes) que la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace $E_1\times E_2\times\dots\times E_n$ soit péanien est que chacun des espaces $E_i$ le soit.

J'appelle un espace $E$ *topologiquement divisible* par l'espace $E'$, lorsqu'il existe un espace $E''$ tel que le produit $E'\times E''$ est homéomorphe à $E$; dans ce cas, l'espace $E'$ est dit *diviseur topologique* de $E$. Tout espace est topologiquement divisible par lui-même (donc aussi par tout espace homéomorphe à lui) ainsi que par tout espace ne contenant qu'un seul point. Tous les autres diviseurs topologiques sont dits *vrais*. Un espace contenant plus qu'un point et n'admettant aucun vrai diviseur topologique sera dit *topologiquement premier*.

Les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ constituent une *décomposition* d'un espace $E$ en *produit cartésien*, lorsque $E$ est homéomorphe à $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Deux décompositions $E_1, E_2, \ldots, E_n$ et $E'_1, E'_2, \ldots, E'_{n'}$ de $E$ sont considérées comme *identiques*, lorsqu'elles ne diffèrent que par l'ordre des facteurs ou par des facteurs se réduisant à un point — plus precisément, lorsqu'il existe deux permutations: $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ des indices $1, 2, \ldots, n$ et $(i'_1, i'_2, \ldots, i'_{n'})$ des indices $1, 2, \ldots, n'$, ainsi qu'un nombre naturel $m \leqslant \mathrm{Min}(n, n')$, tels que $E_{i_\nu}$ est homéomorphe à $E'_{i'_\nu}$ pour tout $\nu = 1, 2, \ldots, m$ et que chacun des ensembles $E_{i_\nu}$ et $E'_{i'_\nu}$ pour $\nu > m$ se réduit à un point.

**2.** ***Exemples.*** 1⁰ Les diviseurs topologiques d'un espace ne contenant qu'un nombre fini $m$ de points sont évidemment les espaces finis dont le nombre des points est un diviseur de $m$. Par conséquent, pour qu'un espace fini soit topologiquement premier, il faut et il suffit que le nombre de ses points soit un nombre premier. Ainsi les notions de diviseur topologique, d'espace topologiquement premier, etc. peuvent être considérées comme des généralisations des notions correspondantes de la théorie des nombres.

2⁰ Soit $F_m$ un espace fini constitué par $m$ points. Pour tout espace $A$, le produit $A \times F_m$ est homéomorphe à la somme des $m$ ensembles homéomorphes à $A$, disjoints deux à deux et fermés dans leur somme. Il en résulte que la condition nécessaire est suffisante pour qu'un espace $E$ admettant un nombre fini de composantes soit topologiquement divisible par $F_m$ est que, pour toute composante $C$ de $E$, le nombre des composantes de $E$ homéomorphes à $C$ soit divisible par $m$.

3⁰ *Chaque courbe*[1]) *est un espace topologiquement premier*, car les diviseurs d'une courbe sont aussi des courbes et la dimension du produit de deux continus de dimension 1 est un continu de dimension 2 [2]).

**3.** Le problème d'existence et d'unicité de la décomposition d'un espace donné $E$ en produit cartésien d'espaces topologiquement premiers s'impose d'une façon naturelle. Pour un espace $E$ compact de dimension finie et ne contenant qu'un nombre fini de

[1]) c.à d. un continu (non vide) de dimension $\leqslant 1$.

[2]) W. Hurewicz, *Sur la dimension des produits cartésiens*, Annals of Math. **36** (1935), p. 194.



composantes, l'existence d'une telle décomposition est une conséquence de la compacité des vrais diviseurs topologiques de $E$ et du fait que la somme de la dimension et du nombre des composantes est pour eux plus petite que pour l'espace $E$.

Dans l'hypothèse que le nombre des composantes de l'espace est fini, une décomposition de $E$ en produit cartésien d'espaces topologiquement premiers ne doit pas exister nécessairement. En effet, on constate sans peine que chaque ensemble fini est un diviseur de l'ensemble parfait $C$ de Cantor et que, pour toute décomposition de $C$ en produit de deux ensembles, au moins l'un parmi eux est homéomorphe à $C$.

La question d'unicité d'une décomposition en espaces topologiquement premiers est plus difficile. Elle n'est pas résolue même dans le cas d'un cube euclidien de dimension $>2$.

Le problème d'existence et d'unicité de la décomposition d'un espace $E$ en produit cartésien d'espaces topologiquement premiers peut être posé aussi lorsqu'on admet les produits infinis[3]). Dans ce cas, l'ensemble $C$ de Cantor admet une décomposition en ensembles topologiquement premiers, p. ex. en un produit infini dont chaque terme est composé de deux points; mais cette décomposition n'est pas unique, car $C$ se décompose aussi en produit infini dont chaque terme est composé p. ex. de trois points.

Le problème suivant peut être considéré comme une simplification de celui d'unicité:

*Soit $P$ un diviseur topologiquement premier du produit cartésien $E_1 \times E_2$. Un des espaces $E_1$ et $E_2$ est-il toujours topologiquement divisible par $P$?*

Je me propose de démontrer ici le théorème suivant:

***Théorème.*** *Un polyèdre (de dimension quelconque) n'admet tout au plus qu'une seule décomposition en produit cartésien d'ensembles topologiquement premiers de dimension $\leqslant 1$.*

**4.** Soit $K$ un polyèdre $n$-dimensionnel ou l'ensemble vide. Un point $p \in K$ sera dit *ordinaire*, lorsqu'il existe un entourage $U$ de $p$ (dans $K$) homéomorphe à un sous-ensemble de l'espace euclidien $n$-dimensionnel $R_n$; si un tel entourage n'existe pas, le point sera dit *singulier*. On voit aisément que l'ensemble des points ordinaires est ouvert. Par conséquent, l'ensemble des points singuliers est fermé; nous le désignerons par $K_1$. Envisageons une décomposition simpliciale $\Pi$ de $K$. Les propriétés locales de $K$ étant évidem-

[3]) Pour la notion de *produit cartésien infini*, voir p.ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne **3**, Warszawa—Lwów 1933, p. 7.

ment les mêmes dans deux points intérieurs d'un même simplexe de $\Pi$, on conclut que l'ensemble $K_1$ est un sous-complexe de $\Pi$. De plus, en tenant compte du fait que $K$ est localement homéomorphe à $R_n$ dans chaque point intérieur d'un simplexe $n$-dimensionnel de $\Pi$, on conclut que $K_1$ est contenu dans le polyèdre $(n-1)$-dimensionnel formé de tous les simplexes de dimension $<n$ de $\Pi$.

Les composantes de l'ensemble $K-K_1$ seront dites *portions ordinaires* de $K$ et celles de $K_1$ *portions singulières* de $K$. Deux portions de $K$ dont l'une est ordinaire et l'autre singulière seront dites *contigües*, lorsque l'une est contenue dans la frontière de l'autre.

*Exemple.* Dans un graphe[4]), les points singuliers coïncident avec ceux de ramification[5]). Chaque portion singulière d'un graphe contient exactement un point. Si un graphe connexe admet des points singuliers, chacune de ses portions ordinaires est homéomorphe à un segment dépourvu de l'une ou des deux extrémités.

**5.** Soit $K$ un polyèdre connexe de dimension $n$, décomposable en un produit de courbes $L_1, L_2, \dots, L_n$. On peut admettre que $K$ est non seulement homéomorphe, mais identique au produit $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$. Or, les points de $K$ sont de la forme $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_i \in L_i$. D'après **1**, chacune des courbes $L_i$ est un continu péanien. En outre, tous les $L_i$ sont de dimension 1, car la dimension du produit cartésien ne surpasse pas la somme des dimensions des termes[6]).

*Si $x_0$ est un point de ramification de la courbe $L_i$, chaque point $p_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in K$ dont la i-ème coordonnée $x_{i0}$ est égale à $x_0$ est un point singulier de $K$.*

En effet, on peut admettre sans restreindre la généralité que $i=1$. Le point $x_0$ étant un point de ramification de $L_1$, il existe[7]) trois arcs simples $L, L', L'' \subset L_1$ ayant $x_0$ comme l'extrémité commune et tels que $L \cdot L' = L \cdot L'' = L' \cdot L'' = (x_0)$. Envisageons, en outre, dans chacune des courbes $L_j$, avec $j \geqslant 2$, un arc simple $L_j'$ contenant $x_{j0}$. En choisissant les arcs $L, L', L''$ et $L'$ suffisamment petits, on conclut que l'ensemble $T = (L + L' + L'') \times L_2' \times \dots \times L_n'$ est contenu dans l'entourage arbitrairement donné de $p_0$. Or, l'ensemble $T$ n'est homéomorphe à aucun sous-ensemble de $R_n$. Pour nous en convaincre, choisissons dans chacun des arcs $L_j'$ un point intérieur $x_j'$ et posons $p = (x_0, x_2', \dots, x_n')$. Les ensembles $Q = L \times L_2' \times \dots \times L_n'$ et $Q' = (L' + L'') \times L_2' \times \dots \times L_n'$ sont des éléments $n$-dimensionnels[8]) dont les intérieurs sont disjoints. Le point $p$ appartient à $Q$ et à l'intérieur de $Q'$. En tenant compte du théorème bien connu de L. E. J. Brouwer[9]) sur l'invariance des points intérieurs dans les espaces euclidiens, on en conclut que l'ensemble $T = Q + Q'$ n'est homéomorphe à aucune partie de l'espace $R_n$.

**6.** *Chaque terme de la décomposition d'un polyèdre en un produit cartésien d'ensembles de dimension $\leqslant 1$ est un graphe.*

En effet, les composantes d'un produit cartésien étant les produits de composantes des facteurs, il suffit de prouver que ces dernières sont des graphes. Nous pouvons donc nous borner au cas d'un polyèdre $K = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$, où $L_1, L_2, \dots, L_n$ sont des courbes contenant plus d'un point. Le nombre $n$ coïncide alors avec la dimension de $K$. Les courbes $L_i$ étant des continus péaniens, il reste à prouver que chacune d'elles n'a qu'un nombre fini de points de ramification[10]).

En effet, dans le cas contraire, il existerait dans l'une des courbes $L_i$, p. ex. dans $L_1$, une suite $\{x^k\}$ de points de ramification distincts. $L_1$ étant compact, on peut admettre que la suite $\{x^k\}$ converge vers un point $x_0 \in L_1$. En posant $A_k = (x^{(k)}) \times L_2 \times \dots \times L_n$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$, on obtient une suite de continus deux à deux disjoints et qui converge vers $A_0$. D'après **5**, les ensembles $A_1, A_2, \dots$, donc aussi leur limite $A_0$, sont contenus dans l'ensemble $K_1$ des points singuliers de $K$. Or, l'ensemble $K_1$ est, d'après **4**, un polyèdre $(n-1)$-dimensionnel. Par conséquent, le continu $(n-1)$-dimensionnel $A_0$ n'est pas un ensemble frontière dans $K_1$. Comme $A_k \subset K_1 - A_0$ pour tout $k$ suffisamment grand, on est en contradiction avec la convergence de la suite $\{A_k\}$ vers $A_0$.

[4]) c.à d. un polyèdre (non vide) de dimension $\leqslant 1$.

[5]) On entend par *point de ramification* un point d'ordre $>2$ au sens de Menger-Urysohn.

[6]) Voir p.ex. K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig-Berlin 1928, p. 246.

[7]) Voir p.ex. K. Menger, *Kurventheorie*, Leipzig-Berlin 1932, p. 214.

[8]) c.à d. des ensembles homéomorphes au cube euclidien de dimension $n$.

[9]) L. E. J. Brouwer, *Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets*, Math. Ann. **72** (1913), p. 55.

[10]) K. Menger, *Kurventheorie*, Leipzig-Berlin 1932, p. 266 et 267.

**7.** Admettons que $K=L_1\times L_2\times\ldots\times L_n$ où $\dim L_i\leqslant 1$ pour $i=1,2,\ldots,n$. Les points de $K$ sont donc de la forme $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ où $x_i\in L_i$. D'après **5**, tout point $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dont l'une au moins des coordonnées est singulière, est singulier. D'autre part, pour tout point ordinaire $x_i$ de $L_i$, il existe un arc simple $L'\subset L_i$ constituant un entourage de $x_i$ dans $L_i$. L'élément $n$-dimensionnel $L'_1\times L'_2\times\ldots\times L'_n$ constitue donc un entourage du point $p=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dans $K$. Il en résulte que l'ensemble $K_1$ des points singuliers de $K$ coïncide avec le sous-ensemble de $K$ formé de tous les points $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dont l'une au moins des coordonnées est singulière. Par conséquent, le polyèdre $K_1$ est de dimension $n-1$ ou vide.

En désignant maintenant par $K_i$ (pour tout $i=0,1,\ldots$) le sous-ensemble de $K$ formé de tous les points $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dont au moins $i$ coordonnées sont singulières, nous allons prouver que

*$K_i$ est un polyèdre $(n-i)$-dimensionnel ou l'ensemble vide, et l'ensemble des points singuliers de $K_i$ coïncide avec $K_{i+1}$.*

L'ensemble $K_i$ est, par définition, la somme d'un nombre fini de sous-polyèdres $(n-i)$-dimensionnels de $K$ qui s'obtiennent en fixant $i$ coordonnées singulières et en faisant les autres parcourir leurs domaines. Par conséquent, $K_i$ est un polyèdre $(n-i)$-dimensionnel ou l'ensemble vide. Reste à prouver que $K_{i+1}=(K_i)_1$.

Soit $p$ un point de $K_i$. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que $p=(x_{10},x_{20},\ldots,x_{i0},x_{i+1},\ldots,x_n)$, où les coordonnées $x_{10},x_{20},\ldots,x_{i0}$ sont singulières.

Si toutes les autres coordonnées $x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_n$ sont ordinaires, il existe des arcs simples $L'_{i+1},L'_{i+2},\ldots,L'_n$ constituant respectivement des entourages des points $x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_n$ dans $L_{i+1},L_{i+2},\ldots,L_n$. En posant $Q=(x_{10},x_{20},\ldots,x_{i0})\times L'_{i+1}\times L'_{i+2}\times\ldots\times L_n$, on obtient un élément $(n-i)$-dimensionnel formant un entourage du point $p$ dans $K_i$. Par conséquent $p$ est un point ordinaire de $K_i$.

Si, par contre, l'une (au moins) des coordonnées $x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_n$ est singulière, le point $p'=(x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_n)$ du polyèdre $(n-i)$-dimensionnel $K'=L_{i+1}\times L_{i+2}\times\ldots\times L_n$ est singulier. Or, on voit aisément, que l'ensemble des points appartenant à un entourage $U$ (dans $K_i$) du point $p$, dont les $i$ premières coordonnées sont $x_{10},x_{20},\ldots,x_{n0}$, est homéomorphe (même isométrique) à un entourage de $p'$ dans $K'$, et par conséquent n'est homéomorphe à aucune partie de l'espace euclidien $(n-i)$-dimensionnel $R_{n-i}$. Ainsi $U$ n'est homéomorphe à aucune partie de $R_{n-i}$, de sorte que $p$ est un point singulier de $K_i$.



**8.** Soit $L_1\times L_2\times\ldots\times L_n$ une décomposition d'un polyèdre $n$-dimensionnel connexe $K$ en un produit cartésien de courbes. Nous allons prouver que *le nombre des $L_i$ qui sont des arcs simples, ainsi que de ceux qui sont des courbes simples fermées, sont des invariants topologiques de $K$.*

Désignons par $Q_i$ le cube $i$-dimensionnel, c. à d. le produit cartésien de $i$ arcs simples, et par $T_i$ le tore $i$-dimensionnel, c. à d. le produit cartésien de $i$ courbes simples fermées; $Q_0$ et $T_0$ désigneront l'ensemble se réduisant à un seul point. Soient $k$, $l$ et $m$ respectivement: le nombre des $L_i$ qui sont des arcs simples, de ceux qui sont des courbes simples fermées et de ceux qui admettent des points de ramification. On a[10]) $k+l+m=n$. On conclut de **7** que $m$ se laisse caractériser topologiquement comme le plus grand des indices $i$ tels que $K_i\neq 0$. Par conséquent, le nombre $k+l=n-m$ est aussi un invariant topologique de $K$. Il ne reste donc qu'à déterminer le nombre $l$ d'une manière invariable. A ce but, remarquons que le polyèdre $K_m$ (de dimension $n-m$) est somme d'un nombre fini de polyèdres disjoints, homéomorphes à $Q_k\times T_l$. Ces derniers étant acycliques en dimensions $>l$[11]) et non acycliques en dimension $l$, le nombre $l$ est un invariant topologique.

**9.** *Tout graphe connexe $L$ est déterminé topologiquement par les propriétés topologiques du polyèdre $K=L\times Q_k\times T_l$,* où $k$ et $l$ désignent deux entiers non négatifs donnés d'avance.

On conclut de **5** que dans le cas où tous les points de $K$ sont ordinaires, le graphe $L$ ne contient aucun point de ramification. Par conséquent[10]), le graph $L$ est soit une courbe simple fermée, soit un arc simple, soit enfin se réduit à un seul point. Pour distinguer les deux premières éventualités de la troisième, il suffit de remarquer que la dimension de $K$ est $k+l+1$ lorsque $L$ est une courbe simple fermée ou un arc simple, tandis qu'elle n'est que $k+l$ lorsque $L$ se réduit à un seul point. Pour distinguer la première éventualité de la deuxième, il suffit de remarquer que $K$ est acyclique en dimension $l+1$ ou non, suivant que $L$ est un arc simple ou une courbe simple fermée.

---

[11]) Un polyèdre $A$ est dit *acyclique en dimension $r$*, lorsque chaque cycle $r$-dimensionnel de $A$ est homologue à 0 dans $A$. Le fait (facile à démontrer aussi d'une manière élémentaire) que le polyèdre $Q_k\times T_l$ est acyclique en toutes les dimensions $>l$ et non acyclique en dimension $l$, est une conséquence immédiate du théorème de Künneth sur les groupes de Betti d'un produit cartésien. Voir p. ex. P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie*, Berlin 1935, p. 308.

Dans le cas où $K$ admet des points singuliers, leur ensemble se décompose en portions singulières de $K$, qui sont de la forme $(x_0)\times Q_k\times T_l$ où $x_0$ est un point singulier de $L$. Les portions ordinaires de $K$ coïncident avec les produits cartésiens formés des portions ordinaires de $L$ et de l'ensemble $Q_k\times T_l$, et leurs fermetures coïncident avec les produits cartésiens formés des fermetures de portions ordinaires de $L$ et de l'ensemble $Q_k\times T_l$. La fermeture d'une portion ordinaire de $L$ est un arc simple ou une courbe simple fermée; dans le premier cas la fermeture de la portion correspondante de $K$ est homéomorphe à $Q_{k+1}\times T_l$ et, dans le second, à $Q_k\times T_{l+1}$. Les ensembles $Q_{k+1}\times T_l$ et $Q_k\times T_{l+1}$ n'étant pas homéomorphes (seul le premier étant acyclique en dimension $l+1$), on en conclut que les fermetures des portions ordinaires de $L$ sont topologiquement déterminées par celles des portions correspondantes de $K$. En outre, pour qu'un point singulier $x_0$ de $L$ appartienne à la frontière d'une portion ordinaire $H$ de $L$, il faut et il suffit que la portion singulière de $K$ correspondant à $x_0$ soit contenue dans la frontière de la portion ordinaire de $K$ correspondant à $H$.

Pour achever la démonstration, il ne reste donc qu'à prouver que deux graphes $L$ et $L'$ sont homéomorphes lorsqu'il existe entre leurs portions une correspondance biunivoque satisfaisant aux conditions:

1⁰ Les fermetures des portions correspondantes sont homéomorphes;

2⁰ Si deux portions de $L$ sont contigües (c. à d. qu'une d'elles est contenue dans la frontière de l'autre), les portions correspondantes de $L'$ sont aussi contigües.

En effet, la correspondance en question fait correspondre, en vertu de 1⁰, à tout point de ramification $x_0$ de $L$ (c. à d. à toute portion singulière de $L$) un point de ramification $x_0'$ de $L'$. En posant $\varphi(x_0)=\varphi(x_0')$, on obtient, d'après 2⁰, une fonction transformant d'une manière biunivoque la frontière (relative à $L$) de chaque portion ordinaire de $L$ en frontière (relative à $L'$) de la portion correspondante de $L'$. Si l'on prolonge cette fonction sur chaque portion ordinaire $H$ de $L$ de manière que la fonction prolongée transforme la fermeture de $H$ par homéomorphie en fermeture de la portion correspondante $H'$, le graphe $L$ se trouvera transformé par homéomorphie en $L'$, c. q. f. d.



**10.** ***Démonstration du théorème dans le cas d'un polyèdre connexe.*** Soit $K=L_1\times L_2\times\ldots\times L_n$ où $L_1,L_2,\ldots,L_n$ sont des graphes connexes. En omettant les graphes se réduisant à un seul point, on peut admettre que tout $L_i$ est de dimension 1. Le nombre des arcs simples et celui des courbes simples fermées étant, d'après **8**, un invariant topologique de $K$, il s'agit de montrer que les graphes contenant des points de ramification sont topologiquement détérminés par le polyèdre $K$.

Or on peut admettre que $K=L_1\times L_2\times\ldots\times L_m\times Q_k\times T_l$, où chacun des graphes $L_1,L_2,\ldots,L_m$ contient des points de ramification. Les résultats de **8** et **9** nous permettent de nous borner au cas $m>1$. D'après **7**, l'ensemble $K_m$ n'est pas vide. Soit $p_0=(x_{10},x_{20},\ldots,x_{n0})\in K_m$. Le point $x_{i0}$ est, pour $i=1,2,\ldots,m$, un point de ramification de $L_i$ et l'ensemble

$$C_0=\underset{p}{E}[p=(x_{10},x_{20},\ldots,x_{m0},x_{m+1},\ldots,x_n)\in K] \tag{1}$$

est une composante de l'ensemble $K_m$, c. à d. une portion singulière de l'ensemble $K_{m-1}$, et on a $p_0\in C_0$. Pour tout $i=1,2,\ldots,m$, l'ensemble

$$A_i=\underset{p}{E}[p=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in K \text{ où } x_j=x_{j0} \text{ pour } i\neq j\leqslant m] \tag{2}$$

est homéomorphe à l'ensemble $L_i\times Q_k\times T_l$. En tenant compte de **9**, on en conclut qu'il suffit de déterminer le système des ensembles $A_1,A_2,\ldots,A_m$ à l'aide des propriétés topologiques de $K$, pour que le système des graphes $L_1,L_2,\ldots,L_m$ soit topologiquement déterminé.

A ce but, remarquons que chaque ensemble $A_i$ est somme de certaines portions singulières et ordinaires de $K_{m-1}$, à savoir qui coïncident avec les ensembles des points $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, où $x_j=x_{j0}$ pour $i\neq j\leqslant m$, les coordonnées $x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n$ parcourant respectivement les graphes $L_{m+1},L_{m+2},\ldots,L_n$ et $x_i$ parcourant une des portions ordinaires du graphe $L_i$.

L'ensemble $A_1+A_2+\ldots+A_m$ renferme toutes les portions ordinaires de $K_{m-1}$ qui contiennent $p_0$ à leur frontière. En effet, si $\Gamma$ est une de ces portions, il existe un indice $i$ $(0\leqslant i\leqslant m)$ tel que $\Gamma$ coïncide avec l'ensemble des points $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ où $x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n$ parcourent respectivement $L_{m+1},L_{m+2},\ldots,L_n$. La coordonnée $x_i$ parcourt une portion ordinaire de $L_i$ et toutes les autres coordonnées sont singulières et fixes. Le point $p_0=(x_{10},x_{20},\ldots,x_{n0})$ appartenant, par l'hypothèse, à la frontière de $\Gamma$, ces dernières coordonnées coïncident respectivement avec celles de $p_0$, de sorte que $\Gamma\subset A_i$.

Ceci établi, remarquons que si $\Gamma$ et $\Gamma'$ sont deux portions ordinaires de $K_{m-1}$ contenues dans $A_i$, il existe dans $A_i$ une suite finie $\Gamma=\Gamma_0$, $\Gamma_1$, ..., $\Gamma_s=\Gamma'$ de portions ordinaires de $K_{m-1}$ telle que, pour tout $r=0,1,\dots,s-1$, une au moins des portions singulières de $K_{m-1}$ est contigüe simultanément à $\Gamma_r$ et $\Gamma_{r+1}$. Pour s'en convaincre, il suffit de noter, que:

1° La propriété analogue a lieu pour les portions d'un graphe connexe arbitrairement donné;

2° Les portions de $K_{m-1}$ contenues dans $A_i$ correspondent aux portions de $L_i$ de manière que les portions contigües se correspondent mutuellement.

Pour déterminer l'ensemble $A_i$ tout entier, il suffit donc d'indiquer une portion ordinaire $\Gamma$ de $K_{m-1}$ contenue dans $A_i$ et de trouver une loi permettant d'indiquer, parmi toutes les portions ordinaires de $K_{m-1}$ qui sont contigües à une portion singulière de $K_{m-1}$ située à la frontière de $\Gamma$, celles qui sont contenues dans $A_i$.

Or, il a été établi que toutes les portions ordinaires de $K_{m-1}$ contenant $p_0$ à la frontière sont contenues dans la somme $A_1+A_2+\dots+A_m$. En outre, on déduit de (2) que chaque ensemble $A_i$ contient une portion ordinaire de $K_{m-1}$ contenant $p_0$ à la frontière. Par conséquent, la classe des portions ordinaires de $K_{m-1}$ contenant $p_0$ à la frontière renferme au moins une portion ordinaire de chaque ensemble $A_i$ et ne renferme aucune portion ordinaire de $K_{m-1}$ qui ne soit contenue dans la somme $A_1+A_2+\dots+A_m$.

Soit $\Gamma$ une portion ordinaire de l'ensemble $K_{m-1}$ contenue dans $A_i$. Il s'agit donc de caractériser, parmi toutes les portions ordinaires $\Gamma'\neq\Gamma$ de $K_{m-1}$ contigües à une portion singulière $\Lambda$ de $K_{m-1}$ contigüe à $\Gamma$, celles qui sont contenues dans $A_i$. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que $i=1$. On a donc

$$\Lambda=\underset{p}{E}[p=(x'_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, x_{m+1}, \dots, x_n)\in K], \tag{3}$$

où $x'_{10}$ est un point de ramification de $L_1$.

Nous allons prouver que la condition nécessaire et suffisante pour que $\Gamma'\subset A_1$ est que tout arc simple contenu dans $K_{m-2}$ dont l'une des extrémités, $p$, appartient à $\Gamma$ et l'autre, $p'$, à $\Gamma'$, contienne des points intérieurs appartenant à $K_{m-1}$.

En effet, admettons d'abord que $\Gamma'$ est contenu dans $A_1$. Or, les points $p$ et $p'$ sont de la forme: $p=(x_1, x_{20}, \dots, x_{m0}, x_{m+1}, \dots, x_n)$ et $p'=(x'_1, x_{20}, \dots, x_{m0}, x'_{m+1}, \dots, x'_n)$. Soit $p(t)=(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ une homéomorphie transformant l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$ en un arc simple $L\subset K_{m-2}$ de manière que $p(0)=p$ et $p(1)=p'$. Les portions $\Gamma$ et $\Gamma'$ étant différentes, il existe des points singuliers de $L$ coupant $L_1$ entre $x_1$ et $x'_1$. Or, il existe un $t_0$ $(0<t_0<1)$ tel que $x_1(t_0)$ est un point singulier de $L_1$, tandis que le point $x_1(t)$ est ordinaire pour tout $0\leqslant t<t_0$. Il en résulte que pour tout $0\leqslant t<t_0$, donc aussi pour $t=t_0$, il y a parmi les coordonnées $x_2(t), x_3(t), \dots, x_m(t)$ au moins $(m-2)$ qui sont singulières. Par conséquent, pour $t=t_0$, il y a parmi les coordonnées $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ au moins $(m-1)$ coordonnées singulières, de sorte que $p(t_0)\in K_{m-1}$.



Admettons ensuite que $\Gamma'$ n'est pas contenu dans $A_1$. Rien n'empêche d'admettre que c'est le cas $\Gamma'\subset A_2$ qui se présente. Il s'agit de montrer qu'il existe des points $p\in\Gamma$, $p'\in\Gamma'$ et un arc simple contenu dans $K_{m-2}$ qui contient ces points et dont l'intérieur est disjoint avec $K_{m-1}$. A ce but, choisissons les points $p$ et $p'$ de manière que leurs $n-m$ dernières coordonnées soient respectivement les mêmes. Or, parmi les $m$ premières coordonnées des points appartenant à $\Gamma'$, les $m-1$, c. à d. toutes sauf la deuxième, sont singulières et fixes. La portion singulière $\Lambda$ étant, par hypothèse, contenue dans la frontière de $\Gamma'$, on en conclut d'après (3) que le point $p'\in\Gamma'$ est de la forme $(x'_{10}, x'_2, x_{30}, \dots, x_{m0}, x_{m+1}, \dots, x_n)$ où $x'_2$ appartient à une portion ordinaire de $L_2$ contigüe au point $x_{20}$. Or, il existe un arc simple $L'\subset L_2$ aux extrémités $x'_2$ et $x_{20}$ dont tous les points intérieurs sont des points ordinaires de $L_2$. D'une façon analogue, le point $p\in\Gamma$ est de la forme $(x_1, x_{20}, \dots, x_{m0}, x_{m+1}, \dots, x_n)$, où $x_1$ appartient à une portion ordinaire de $L_1$ contigüe au point $x_{10}$, et il existe dans $L_1$ un arc simple $L$ aux extrémités $x_1$ et $x'_{10}$ dont l'intérieur ne contient aucun point singulier de $L_1$.

Envisageons dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$ deux fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ transformant cet intervalle par homéomorphie en $L$ et $L'$ respectivement et satisfaisant aux conditions:

$$x_1(0)=x_1, \qquad x_1(1)=x'_{10};$$
$$x_2(0)=x_{20}, \qquad x_2(1)=x'_2.$$

La fonction $p(t)=(x_1(t), x_2(t), x_{30}, \dots, x_{m0}, x_{m+1}, \dots, x_n)$ est donc une homéomorphie transformant l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$ en un arc simple $L''$ contenu dans $K_{m-2}$ et dont les extrémités sont:

$$p(0)=(x_1, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{m0}, x_{m+1}, \dots, x_n)=p,$$
$$p(1)=(x'_{10}, x'_2, x_{30}, \dots, x_{m0}, x_{m+1}, \dots, x_n)=p'.$$

Les coordonnées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ étant ordinaires pour tout $0<t<1$, l'intérieur de l'arc $L''$ est contenu dans $K_{m-2}-K_{m-1}$, ce qui achève la démonstration.

**11.** ***Démonstration du théorème dans le cas général.*** Faisons correspondre à tout type topologique[12]) d'un graphe connexe de dimension 1 la variable réelle $y$ munie d'un indice convenable, et au type topologique des graphes se réduisant à un seul élément — le nombre 1.

Soit $K$ un polyèdre dont toute composante $C$ admet une décomposition en produit cartésien des graphes $L_1, L_2, \dots, L_m$. D'après **10**, les types topologiques des $L_i$ qui ne se réduisent pas à un seul élément sont déterminés d'une manière univoque. Soit $y_i$ la variable correspondant au type topologique de $L_i$. Le produit $P(C) = y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$ est alors déterminé par le type topologique de $C$ et réciproquement. Par addition de tous les produits $P(C)$ correspondant aux composantes $C$ de $K$, on parvient à un polynôme $P(K)$ aux coefficients entiers non négatifs. Le polynôme $P(K)$ sera dit *polynôme caractéristique du polyèdre* $K$.

Le degré du polynôme caractéristique $P(K)$ coïncide évidemment avec la dimension de $K$. En particulier, le polynôme caractéristique d'un polyèdre formé de $m$ points se réduit au nombre $m$. On voit, en outre, que le polynôme caractéristique de la somme de deux polyèdres disjoints est la somme de leurs polynômes caractéristiques et que le polynôme caractéristique du produit cartésien de deux polyèdres est le produit de leurs polynômes caractéristiques. Il en résulte sans peine que, pour tout polynôme

$$P = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} a_{i_1 i_2 \dots i_k} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_k^{i_k} \neq 0$$

aux coefficients $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ entiers non négatifs, il existe un polyèdre dont le polynôme caractéristique coïncide avec $P$.

On en conclut que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polyèdre $K$ soit décomposable en un produit cartésien des graphes topologiquement premiers est que son polynôme caractéristique $P(K)$ soit décomposable en un produit de facteurs linéaires et premiers (dont les coefficients sont des entiers réels). Cette dernière décomposition étant unique d'après le théorème bien connu de l'algèbre, il en est de même de la décomposition de $K$. L'unicité de cette décomposition est ainsi établie.

[12]) On entend par *type topologique* d'un graphe $L$ la classe de tous les graphes (contenus p.ex. dans l'espace euclidien de dimension 3) homéomorphes à $L$.

# Quelques propriétés caractéristiques de la dimension.

Par

S. Eilenberg et E. Otto (Warszawa).

***Théorème auxiliaire.*** *Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles fermés et disjoints d'un espace métrique separable $\mathcal{Y}$. Pour toute suite $Y_1, Y_2, \dots$ de sous-ensembles fermés de $\mathcal{Y}$ où* $\dim Y_i \leqslant n_i$, *il existe un ensemble ouvert $G \subset \mathcal{Y}$ tel que*

(i) $A \subset G$ (ii) $B \subset X - \bar{G}$ [1])

(iii) $\dim[Y_i \cdot \mathrm{Fr}(G)] \leqslant n_i - 1$ [2]).

Démonstration. Supposons d'abord que $\mathcal{Y}$ est compact. D'après le théorème général de décomposition[3]), il existe une décomposition $\mathcal{Y} = F_1 + F_2 + \dots + F_m$ en ensembles fermés de diamètre aussi petit que l'on veut et telle que

(iv) $\dim Y_i \cdot F_k \cdot F_l \leqslant n_i - 1$ pour $k \neq l$ et $i = 1, 2, \dots$

On peut donc admettre que $F_k \cdot B \neq 0$ implique $F_k \cdot A = 0$. Posons $S = \sum F_k$ où $F_k \cdot B \neq 0$ et soit $G = \mathcal{Y} - S$. On a évidemment (i) et (ii). Comme $G \subset \sum F_l$ où $F_l \cdot B = 0$, il vient

$$\mathrm{Fr}(G) = \bar{G} \cdot S \subset \sum_{k \neq l} F_k \cdot F_l$$

ce qui donne (iii) en vertu de (iv) et du théorème d'addition[4]).

[1]) $\bar{G}$ désigne la fermeture de $G$.

[2]) $\mathrm{Fr}(G) = \bar{G} - G$ (pour $G$ ouverts).

[3]) C. Kuratowski, Fund. Math. **18** (1932), p. 290, corollaire.

[4]) Voir p.ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa—Lwów 1933, p. 126.