[9]) Beim Formulieren von 2.5 könnte man auch mit Funktionen von endlich vielen Variablen auskommen; das würde aber für die weiteren Überlegungen gewisse technische Schwierigkeiten verursachen. Eine andere, aber äquivalente Definition der Menge $\mathfrak{E}(\mathsf{M})$ wurde in Łukasiewicz-Tarski, l. cit., angegeben.

[10]) 2.11 ergibt sich leicht aus dem bekannten Satz, nach dem das System $\mathfrak{ZK}$ vollständig ist. Der erste Vollständigkeitsbeweis für $\mathfrak{ZK}$ stammt bekanntlich von E. Post, Am. Journ. Math. **43** (1921), S. 180 ff.

[11]) Vgl. K. Gödel, Erg. math. Koll. **4** (1933), S. 40.

[12]) Dieses Ergebnis stammt von S. Jaśkowski; vgl. seinen Aufsatz in Act. Congr. Phil. Scient., Actualités Scient. Ind. **393**, Paris 1936, S. 58 ff. (unsere Darstellung weicht nur in unwesentlichen Einzelheiten von der Jaśkowskischen ab: die Operation Γ von Jaśkowski wird durch die in 2.12 definierte Operation * ersetzt, die aber hier dasselbe leistet).

[13]) Ein anderes Entscheidbarkeitskriterium für den intuitionistischen Kalkül wurde von Gentzen in seiner in Anm. 4 zitierten Arbeit gegeben.

[14]) Zum folgenden vgl. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Mat. **3**, Warszawa-Lwów 1931, insbesondere S. 15 ff., 38, 40, 82 f., 95 und 101 ff.

[15]) Ursprünglich hatte ich den Satz für die euklidische Gerade (und ihre insichdichten Teilräume) bewiesen. Den allgemeinen Beweis verdanke ich Herrn S. Eilenberg.

[16]) Der Begriff der Gültigkeit (bzw. der Erfüllbarkeit) einer Aussage gehört zu der sog. Semantik; zum Problem einer exakten Definition dieses Begriffs vgl. meine Arbeit in Stud. Phil. **1** (1936), insbesondere S. 307 ff. und 318 ff.

[17]) Das ergibt sich leicht aus Satz 7.23 meines Berichtes in C. R. Soc. Sc. Vars. **30** (1937), S. 178.

[18]) Zum folgenden vgl. meine Arbeiten in Fund. Math. **24** (1935), S. 177 ff. (Grundlagen der Booleschen Algebra, der Begriff des Atoms, absolut-additive Ringe), Fund. Math. **25** (1935), S. 503 ff. und Ann. Soc. Pol. Math. **15** (1936), S. 186 ff. (die Theorie der deduktiven Systeme, der Idealenkalkül), ferner die umfassenden Arbeiten von M. H. Stone in Trans. Am. Math. Soc. **40** (1936), S. 37 ff. (die Beziehung der Booleschen Algebra zu der allgemeinen abstrakten Algebra und zu der Theorie der Mengenkörper) und in Trans. Am. Math. Soc. **41** (1937), S. 375 ff. (die Beziehung der Booleschen Algebra zu der allgemeinen Topologie).

[19]) In meinem Artikel in Fund. Math. **24** (1935), S. 177 ff. habe ich das Wort „atomistisch" in einem weiteren Sinne gebraucht.

[20]) Vgl. hiezu G. Birkhoff, Proc. Cambr. Phil. Soc. **29** (1933), S. 441 ff.

Remark on weakly convergent cycles

(from a letter to Karol Borsuk).

By

Norman E. Steenrod (Princeton).

In recent papers *) you have introduced and used the notion of a weakly convergent cycle:

A sequence $\{\gamma_i\}$ *of k-dimensional* δ_i*-cycles with integer coefficients* ($\lim \delta_i=0$) *is weakly convergent if* $\gamma_i \underset{\epsilon_i}{\approx} \gamma_{i+1}$, $\lim \epsilon_i=0$.

It seems to me to be possible that you could have used throughout the usual notion of convergent cycle. My reason for this belief is based on the following proposition.

1. *If* $\{\gamma_n\}$ *is a weakly convergent cycle in the compact metric space* K, *there is a subsequence* $\{\gamma'_n\}$ *which is convergent.*

The proof divides into several parts.

2. If $H(\epsilon,\delta)$ ($\epsilon>\delta>0$) is the group of δ-cycles (of dimension p) of K reduced modulo those which are ϵ-homologous to zero, then $H(\epsilon,\delta)$ has a finite basis.

Choose $\nu>0$ so that $2\nu+\delta<\epsilon$. Let A be a finite subset of K so that each point of K is within a distance ν of A. Let us agree that each subset of A of diameter $<\epsilon$ constitutes a simplex. Then A is an abstract complex. For each point P of K, choose one of the nearest points of A and denote it by $f(P)$.

*) *Quelques relations entre la situation des ensembles et la retraction dans les espaces euclidiens*, Fund. Math. **29** (1937), and with S. Eilenberg, *Über stetige Abbildungen der Teilmengen euklidischer Räume auf die Kreislinie*, Fund. Math. **26** (1936).

If σ is a δ-simplex of K, diameter $f(\sigma)<2\nu+\delta<\epsilon$. Hence, for any δ-cycle γ of K, $f(\gamma)$ is a simplicial map of γ into the complex A, it is therefore a cycle of A. Those cycles of A which are images of δ-cycles of K under f form a subgroup. This group has a finite basis $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Let a_i' be a δ-cycle of K such that $f(a_i')=a_i$. Then $a_1', a_2', \ldots, a_k'$ is a basis for the δ-cycles of K relative to ϵ-homologies.

3. If $\{\gamma_n\}$ is a weakly convergent cycle and a number $\epsilon>0$ is given, there is a subsequence $\{\gamma_n'\}$ such that any two of its terms are ϵ-homologous.

Choose a δ so that $\epsilon>\delta>0$. Then choose an integer N so that $n,m\geqslant N$ implies that γ_n, γ_m are δ-cycles and $\gamma_n \underset{\epsilon}{\approx} \gamma_m$. Let $T(\epsilon,\delta)$ be the torsion subgroup of $H(\epsilon,\delta)$. Then $\gamma_n-\gamma_m$ is in $T(\epsilon,\delta)$. Let $T'(\epsilon,\delta)$ be the coset of $T(\epsilon,\delta)$ containing γ_N. Then each γ_n $(n\geqslant N)$ is in $T'(\epsilon,\delta)$. From 2 it follows that $T(\epsilon,\delta)$ is finite; hence also $T'(\epsilon,\delta)$. Therefore some element of $T'(\epsilon,\delta)$ must contain infinitely many of the γ's.

To prove 1 we choose a sequence $\epsilon_i\to 0$. Apply 3 to $\{\gamma_n\}$ and ϵ_1 obtaining a subsequence $\{\gamma_n^1\}$. Then apply 3 to $\{\gamma_n^1\}$ and ϵ_2 obtaining $\{\gamma_n^2\}$, and so on. The diagonal sequence $\{\gamma_n^n\}$ is then a a convergent cycle.

It follows from 1 that the homology groups based on weakly convergent cycles with weak homologies are identical with the homology groups based on convergent cycles with weak homologies.

Sur la décomposition des polyèdres en produits cartésiens.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

1. On appelle *produit cartésien* $E_1\times E_2\times\ldots\times E_n$ des espaces $E_1, E_2, \ldots, E_n$ l'ensemble de tous les systèmes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où $x_i\in E_i$, métrisé par la formule

$$\varrho[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1', x_2', \ldots, x_n')]=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i')^2};$$

on entend par *i-ème coordonnée* du point

$$p=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E_1\times E_2\times\ldots\times E_n$$

le point $x_i\in E_i$.

Grand nombre de propriétés topologiques se transportent des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sur leur produit cartésien $E_1\times E_2\times\ldots\times E_n$ et réciproquement. Telles sont p. ex.: compacité, connexité, connexité locale. On en conclut (les espaces péaniens étant compacts, connexes et localement connexes) que la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace $E_1\times E_2\times\ldots\times E_n$ soit péanien est que chacun des espaces E_i le soit.

J'appelle un espace E *topologiquement divisible* par l'espace E', lorsqu'il existe un espace E'' tel que le produit $E'\times E''$ est homéomorphe à E; dans ce cas, l'espace E' est dit *diviseur topologique* de E. Tout espace est topologiquement divisible par lui-même (donc aussi par tout espace homéomorphe à lui) ainsi que par tout espace ne contenant qu'un seul point. Tous les autres diviseurs topologiques sont dits *vrais*. Un espace contenant plus qu'un point et n'admettant aucun vrai diviseur topologique sera dit *topologiquement premier*.