Travaux cités.

[1] G. M. Bawly, *Über einige Verallgemeinerungen der Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Recueil Math. **1** (1938), p. 917—930.

[2] A. Cournot, *Théorie des chances et des probabilités*, Paris 1843.

[3] H. Cramér, *Random variables and probability distributions*, Cambridge Tracts in Math. **36** (1937).

[4] B. Gnedenko, *Über die Konvergenz der Verteilungsgesetze von Summen voneinander unabhängiger Summanden*, Comptes-Rendus Ac. Sc. U. R. S. S. **18** (1938), p. 231—234.

[5] A. Khintchine, *Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze*, Recueil Math. **2** (44) (1937), p. 80—119.

[6] P. Lévy, *Calcul des probabilités*, Paris 1925.

[7] P. Lévy, *Variables aléatoires*, Paris 1937.

[8] J. Marcinkiewicz, *Sur les fonctions indépendantes I*, Fund. Math. **30** (1938), p. 202—214.

[9] — *Sur les fonctions indépendantes II*, ibid., p. 347—364.

[10] J. Marcinkiewicz et A. Zygmund, *Sur les fonctions indépendantes*, Fund. Math. **29** (1937), p. 60—90.

[11] — *Quelques théorèmes sur les fonctions indépendantes*, Stud. Math. **7** (1937), p. 104—120.

[12] G. Pólya, *Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und des Momentenproblem*, Math. Zeitschr. **8** (1920), p. 157-181.

Der Aussagenkalkül und die Topologie.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

In dieser Arbeit möchte ich auf gewisse formale Verknüpfungen zwischen dem Aussagenkalkül und der Topologie (sowie einigen anderen mathematischen Theorien) hinweisen. Es handelt sich in erster Linie um eine topologische Deutung zweier Systeme des Aussagenkalküls, nämlich des üblichen (zweiwertigen) und des intuitionistischen (Brouwer-Heytingschen) Systems: jeder Aussage $\mathfrak{A}$ des Aussagenkalküls wird eine Aussage $\mathfrak{A}_1$ der Topologie in der Weise eineindeutig zugeordnet, daß $\mathfrak{A}$ dann und nur dann im zweiwertigen Kalkül beweisbar ist, wenn $\mathfrak{A}_1$ in jedem topologischen Raum gilt; eine analoge Übersetzungsvorschrift wird auch für den intuitionistischen Kalkül gegeben. Es scheint mir, daß die vorliegenden Betrachtungen nicht nur vom rein formalen Gesichtspunkt aus ein gewisses Interesse bieten, sondern auch die inhaltliche Beziehung zwischen den beiden Systemen des Aussagenkalküls und die ihnen zugrundeliegenden Intuitionen in interessanter Weise beleuchten.

Um etwaige Mißverständnisse zu vermeiden, möchte ich ausdrücklich bemerken, daß ich mich nicht bemüht habe, die verwendeten Schlußweisen den Forderungen der intuitionistischen Logik anzupassen. [1]) [2])

§ 1. Der zweiwertige und der intuitionistische Aussagenkalkül. Als Aussagenkalkül wird bekanntlich der elementarste Teil der mathematischen Logik bezeichnet. In den Ausdrücken des Aussagenkalküls kommt nur eine Art von Variablen vor, nämlich die sog. Aussagenvariablen, die ganze Aussagen vertreten. Als Aussagevariablen verwenden wir die Buchstaben „X“, „Y“, „Z“... Neben den Variablen treten im Aussagenkalkül vier Konstanten auf: das Implikationszeichen „$\rightarrow$“, das Disjunktionszeichen „$\vee$“, das Konjunktionszeichen „$\wedge$“ und das Negationszeichen „$\sim$“ (die fünfte Konstante, das Äquivalenzzeichen „$\leftrightarrow$“, wird hier nicht berücksichtigt).

Beliebige Ausdrücke, die aus den Aussagevariablen, den vier genannten Konstanten und etwa den Klammern zusammengesetzt sind, werden mit den Buchstaben „$\mathfrak{A}$“, „$\mathfrak{B}$“, „$\mathfrak{C}$“,... bezeichnet. Es wird angenommen, daß die Aussagevariablen in eine (unendliche) Folge mit voneinander verschiedenen Gliedern $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n, \ldots$ geordnet sind. Die Symbole „$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$“, „$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$“ und „$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$“ bezeichnen beziehungsweise die Implikation, die Disjunktion und die Konjunktion von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, also die zusammengesetzten Ausdrücke, die dadurch entstehen, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch die entsprechenden Konstanten „$\rightarrow$“, „$\vee$“ oder „$\wedge$“ verbunden werden; ganz analog bezeichnen wir mit „$\sim \mathfrak{A}$“ die Negation von $\mathfrak{A}$[3]).

Neben den soeben aufgezählten Zeichen werden wir uns der üblichen mengentheoretischen Symbolik bedienen.

Alle Ausdrücke des Aussagenkalküls, mit denen wir weiterhin zu tun haben, gehören zu den sog. Aussagen:

Definition 1.1. Ein Ausdruck $\mathfrak{A}$ heißt Aussage (oder Aussagefunktion oder auch sinnvolle Formel), wenn $\mathfrak{A}$ zu jedem System gehört, das

(i) *unter seinen Elementen alle Aussagevariablen enthält,*

(ii) *in Bezug auf die Operationen der Implikations-, Disjunktions-, Konjunktions- und Negationsbildung abgeschlossen ist;*

m. a. W. das System aller Aussagen ist das kleinste System, das die Eigenschaften (i) *und* (ii) *hat.*

Wir wollen nun im System der Aussagen zwei Teilsysteme auszeichnen: die beweisbaren Aussagen des zweiwertigen Kalküls und die des intuitionistischen.

Definition 1.2. Die Aussage $\mathfrak{A}$ wird Axiom des zweiwertigen, bzw. des intuitionistischen, Kalküls genannt, wenn es Aussagen $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ gibt, so daß $\mathfrak{A}$ eine der folgenden Formeln (i) – (x), *bzw.* (i) – (ix) *und* (xi), *erfüllt:*

(i) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \rightarrow (\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B})$,

(ii) $\mathfrak{A} = [\mathfrak{B} \rightarrow (\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D})] \rightarrow [(\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{D})]$,

(iii) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \rightarrow (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$,

(iv) $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \rightarrow (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$,

(v) $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{D}) \rightarrow \{(\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}) \rightarrow [(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \rightarrow \mathfrak{D}]\}$,

(vi) $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}) \rightarrow \mathfrak{B}$,

(vii) $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}) \rightarrow \mathfrak{C}$,

(viii) $\mathfrak{A} = (\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow \{(\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow [\mathfrak{D} \rightarrow (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C})]\}$,

(ix) $\mathfrak{A} = \sim \mathfrak{B} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})$,

(x) $\mathfrak{A} = (\sim \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B}$,

(xi) $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \rightarrow \sim \mathfrak{B}) \rightarrow \sim \mathfrak{B}$[4]).

Definition 1.3. Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ drei Aussagen und ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$, so wird $\mathfrak{C}$ als das Resultat der Abtrennung der Aussage $\mathfrak{B}$ von der Aussage $\mathfrak{A}$ bezeichnet.

Definition 1.4. Das System $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ der im zweiwertigen Kalkül beweisbaren Aussagen, bzw. das System $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$ der im intuitionistischen Kalkül beweisbaren Aussagen, ist das kleinste System von Aussagen, das unter seinen Elementen alle Axiome des zweiwertigen, bzw. des intuitionistischen, Kalküls enthält und in Bezug auf die Operation der Abtrennung abgeschlossen ist[5]).

Aus diesen Definitionen lassen sich bekanntlich folgende zwei Sätze ableiten:

Satz 1.5. $\mathfrak{J}\mathfrak{K} \subset \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ (aber nicht umgekehrt: ist z. B. $\mathfrak{V}$ eine Aussagevariable, so gehören $\mathfrak{V} \vee \sim \mathfrak{V}$ und $\sim \mathfrak{V} \vee \sim\sim \mathfrak{V}$ zu $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$, aber nicht zu $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$).

Satz 1.6. Für jede Aussage $\mathfrak{A}$ sind folgende Bedingungen äquivalent: (i) $\mathfrak{A} \in \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$, (ii) $\sim\sim \mathfrak{A} \in \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$, (iii) $\sim\sim \mathfrak{A} \in \mathfrak{J}\mathfrak{K}$[6]).

Bei einer exakten Begründung dieser (sowie aller weiter unten angegebenen) Sätze muß man sich freilich nicht nur auf die betreffenden Definitionen, sondern auch auf ein geeignetes Axiomensystem des „Meta-aussagenkalküls“ stützen; es wäre jedoch überflüßig, ein derartiges Axiomensystem hier explizite anzuführen[7]).

§ 2. Die Matrizenmethode. Die Definitionen in § 1 liefern kein Kriterium, das in jedem einzelnen Fall zu entscheiden erlauben würde, ob die gegebene Aussage $\mathfrak{A}$ im zweiwertigen bzw. im intuitionistischen Aussagenkalkül beweisbar ist oder nicht. Ein derartiges Kriterium wird uns erst durch die sog. Matrizenmethode zur Verfügung gestellt [8]).

Definition 2.1. Es seien gegeben: ein System $\boldsymbol{W}$ *von beliebigen Dingen, ein Element* $A \in \boldsymbol{W}$, *drei binäre Operationen* $\twoheadrightarrow$, $\curlyvee$ *und* $\curlywedge$ *sowie eine uninäre Operation* $\sim$. *Es wird angenommen, daß* $\boldsymbol{W}$ *in Bezug auf alle diese Operationen abgeschlossen ist und daß dabei folgendes gilt:*

$$\text{ist} \quad Y \in \boldsymbol{W} \quad \text{und} \quad A \twoheadrightarrow Y = A, \quad \text{so} \quad Y = A.$$

Unter diesen Voraussetzungen wird das geordnete Sextupel $\mathsf{M} = [\boldsymbol{W}, A, \twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim]$ *eine (normale logische) Matrix genannt.*

Bemerkung 2.2. Ist $\mathsf{M} = [\boldsymbol{W}, A, \twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim]$ eine Matrix, so werden manchmal $\boldsymbol{W}$ als Wertsystem, A als ausgezeichnetes Element und $\twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim$ als Grundoperationen (erste, zweite usw.) von M bezeichnet.

Definition 2.3. Zwei Matrizen $\mathsf{M}_1 = [\boldsymbol{W}_1, A_1, \twoheadrightarrow_1, \curlyvee_1, \curlywedge_1, \sim_1]$ *und* $\mathsf{M}_2 = [\boldsymbol{W}_2, A_2, \twoheadrightarrow_2, \curlyvee_2, \curlywedge_2, \sim_2]$ *heißen isomorph, wenn es eine Funktion* F *gibt, die* $\boldsymbol{W}_1$ *auf* $\boldsymbol{W}_2$ *eineindeutig abbildet und dabei folgende Formeln erfüllt:* $F(A_1) = A_2$, $F(X \twoheadrightarrow_1 Y) = F(X) \twoheadrightarrow_2 F(Y)$, $F(X \curlyvee_1 Y) = F(X) \curlyvee_2 F(Y)$, $F(X \curlywedge_1 Y) = F(X) \curlywedge_2 F(Y)$ *und* $F(\sim_1 X) = \sim_2 F(X)$ *für beliebige* $X, Y \in \boldsymbol{W}_1$.

Korollar 2.4. Jede Matrix M *ist zu sich selbst isomorph; ist* M_1 *zu* M_2 *isomorph, so auch* M_2 *zu* M_1; *ist* M_1 *zu* M_2 *und* M_2 *zu* M_3 *isomorph, so auch* M_1 *zu* M_3. [Nach 2.3]

Definition 2.5. $\mathsf{M} = [\boldsymbol{W}, A, \twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim]$ *sei eine Matrix und* $\mathfrak{A}$ *eine Aussage. Mittels folgender Formeln wird (durch Rekurrenz) eine Funktion* $F_{\mathfrak{A},\mathsf{M}}$ *definiert, die jeder unendlichen Folge von Elementen* $X_1, \ldots, X_n, \ldots \in \boldsymbol{W}$ *ein Element* $F_{\mathfrak{A},\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) \in \boldsymbol{W}$ *zuordnet:*

(i) $F_{\mathfrak{A},\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = X_p$, *wenn* $\mathfrak{A} = \mathfrak{V}_p$, $(p = 1, 2, \ldots)$;

(ii) $F_{\mathfrak{A},\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = F_{\mathfrak{B},\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) \twoheadrightarrow F_{\mathfrak{C},\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$, *wenn* $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ *(*$\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{C}$ *beliebige Aussagen);*

(iii), (iv) *analog für die Operationen* $\curlyvee$ *und* $\vee$, *bzw.* $\curlywedge$ *und* $\wedge$;

(v) $F_{\mathfrak{A},\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = \sim F_{\mathfrak{B},\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$, *wenn* $\mathfrak{A} = \sim \mathfrak{B}$ *(*$\mathfrak{B}$ *eine beliebige Aussage).*

Wir sagen, die Aussage $\mathfrak{A}$ *erfülle die Matrix* M, *in Zeichen:* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{E}(\mathsf{M})$, *wenn* $F_{\mathfrak{A},\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = A$ *für beliebige* $X_1, \ldots, X_n, \ldots \in \boldsymbol{W}$ [9]).

Bemerkung 2.6. Man sagt manchmal, daß eine Matrix M für das Aussagensystem $\mathfrak{S}$ adäquat ist, wenn $\mathfrak{E}(\mathsf{M}) = \mathfrak{S}$.

Korollar 2.7. Sind die Matrizen M_1 *und* M_2 *isomorph, so ist* $\mathfrak{E}(\mathsf{M}_1) = \mathfrak{E}(\mathsf{M}_2)$. [Nach 2.1, 2.3, 2.5]

Definition 2.8. Sind $\mathsf{M} = [\boldsymbol{W}, A, \twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim]$ *und* $\mathsf{M}_1 = [\boldsymbol{W}_1, A, \twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim]$ *zwei Matrizen und ist* $\boldsymbol{W}_1 \subset \boldsymbol{W}$, *so heißt* M_1 *eine Submatrix von* M.

Korollar 2.9. Ist M *eine beliebige Matrix und* M_1 *eine Submatrix von* M, *so ist* $\mathfrak{E}(\mathsf{M}) \subset \mathfrak{E}(\mathsf{M}_1)$. [Nach 2.1, 2.5, 2.8]

Definition 2.10. Mit ZK *bezeichnen wir das geordnete Sextupel* $[\boldsymbol{W}, 1, \twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim]$, *wo* $\boldsymbol{W} = \{0, 1\}$, $x \twoheadrightarrow y = 1 - x + x \cdot y$, $x \curlyvee y = x + y - x \cdot y$, $x \curlywedge y = x \cdot y$ *und* $\sim x = 1 - x$ *für beliebige* $x, y \in \boldsymbol{W}$.

Es gilt bekanntlich

Satz 2.11. ZK *ist eine Matrix und* $\mathfrak{E}(\mathsf{ZK}) = \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ [10]).

Im Gegensatz zu $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ gibt es für das System $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$ keine adäquate Matrix mit einem endlichen Wertsystem [11]). Man kann hingegen eine unendliche Folge von Matrizen $\mathsf{IK}_1, \ldots, \mathsf{IK}_n, \ldots$ mit endlichen Wertsystemen angeben, derart daß $\prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}(\mathsf{IK}_n) = \mathfrak{J}\mathfrak{K}$. Wir wollen nun die Konstruktion dieser Folge beschreiben [12]).

Definition 2.12. Es sei $\mathsf{M} = [\boldsymbol{W}, B, \twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim]$ *eine Matrix und* A *ein beliebiges Ding, das nicht zu* $\boldsymbol{W}$ *gehört. Wir setzen:*

(i) $\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{W} + \{A\}$;

(ii) $X \twoheadrightarrow^* Y = X \twoheadrightarrow Y$, *wenn* $X, Y \in \boldsymbol{W}$ *und* $X \twoheadrightarrow Y \neq B$; $X \twoheadrightarrow^* Y = A$, *wenn* $X, Y \in \boldsymbol{W}$ *und* $X \twoheadrightarrow Y = B$; $X \twoheadrightarrow^* A = A$ *für* $X \in \boldsymbol{W}^*$; $A \twoheadrightarrow^* Y = Y$ *für* $A \in \boldsymbol{W}^*$;

(iii) $X \curlyvee^* Y = X \curlyvee Y$ *für* $X, Y \in \boldsymbol{W}$; $Z \curlyvee^* A = A \curlyvee^* Z = A$ *für* $Z \in \boldsymbol{W}^*$;

(iv) $X \curlywedge^* Y = X \curlywedge Y$ *für* $X, Y \in \boldsymbol{W}$; $Z \curlywedge^* A = A \curlywedge^* Z = Z$ *für* $Z \in \boldsymbol{W}^*$;

(v) $\sim^* X = \sim X$, *wenn* $X \in \boldsymbol{W}$ *und* $\sim X \neq B$; $\sim^* X = A$, *wenn* $X \in \boldsymbol{W}$ *und* $\sim X = B$; $\sim^* A = \sim B$.

Das geordnete Sextupel $[\boldsymbol{W}^*, A, \twoheadrightarrow^*, \curlyvee^*, \curlywedge^*, \sim^*]$ *wird mit* M^* *bezeichnet.*

Bemerkung 2.13. Die soeben definierte Operation mit Matrizen ist nicht eindeutig, da ihr Ergebnis von der Wahl des Elements A abhängt; dieser Umstand stört in den weiteren Überlegungen insofern nicht, als alle Matrizen, die aus der gegebenen Matrix M mittels der Operation * gewonnen werden können, zueinander isomorph sind. Man kann übrigens die Mehrdeutigkeit von „M^*" dadurch vermeiden, daß man eine mengentheoretische Funktion F konstruiert, die jedem System $\boldsymbol{W}$ ein Ding $F(\boldsymbol{W})$ *non* $\epsilon\, \boldsymbol{W}$ zuordnet, und dann in 2.12 „A" durch „$F(\boldsymbol{W})$" ersetzt (von gewissen Schwierigkeiten, die dabei im Zusammenhang mit der logischen Typentheorie entstehen können, wird hier abgesehen).

Korollar 2.14. Ist M eine Matrix, so ist auch M^* eine Matrix und es gilt $\mathfrak{E}(\mathsf{M}^*)\subset\mathfrak{E}(\mathsf{M})$; sind die Matrizen M_1 und M_2 isomorph, so sind auch M_1^* und M_2^* isomorph. [Nach 2.1, 2.3, 2.5, 2.12]

Definition 2.15. Es sei n eine natürliche Zahl und $\mathsf{M}=[\boldsymbol{W}, A, \twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim]$ eine Matrix. Wir setzen:

(i) $\boldsymbol{W}^n$ = *dem System der geordneten n-tupel $[X_1,\ldots,X_n]$ mit $X_1,\ldots,X_n\,\epsilon\,\boldsymbol{W}$;*

(ii) $A^n=[X_1,\ldots,X_n]$, *wo* $X_1=\ldots=X_n=A$;

(iii) $[X_1,\ldots,X_n] \twoheadrightarrow^n [Y_1,\ldots,Y_n] = [X_1 \twoheadrightarrow Y_1,\ldots,X_n \twoheadrightarrow Y_n]$ *für* $X_1,\ldots,X_n,\ Y_1,\ldots,Y_n\,\epsilon\,\boldsymbol{W}$;

(iv), (v) *analog für* $\curlyvee$ *und* $\curlywedge$;

(vi) $\sim^n [X_1,\ldots,X_n] = [\sim X_1,\ldots,\sim X_n]$ *für* $X_1,\ldots,X_n\,\epsilon\,\boldsymbol{W}$.
$[\boldsymbol{W}^n, A^n, \twoheadrightarrow^n, \curlyvee^n, \curlywedge^n, \sim^n]$ *wird n-te Potenz der Matrix M genannt und mit M^n bezeichnet.*

Korollar 2.16. Ist n eine natürliche Zahl und M eine Matrix, so ist auch M^n eine Matrix und es gilt $\mathfrak{E}(\mathsf{M}^n)=\mathfrak{E}(\mathsf{M})$; sind die Matrizen M_1 und M_2 isomorph, so sind auch M_1^n und M_2^n isomorph. [Nach 2.1, 2.3, 2.5, 2.15]

Definition 2.17. $\mathsf{IK}_1=\mathsf{ZK}$, $\mathsf{IK}_{n+1}=\left((\mathsf{IK}_n)^n\right)^*$ *für jedes natürliche n.*

Auf Grund dieser Definition kann man folgenden Satz beweisen:

Satz 2.18. Damit $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\mathfrak{J}\mathfrak{K}$, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\mathfrak{E}(\mathsf{IK}_n)$ für jedes natürliche n; m. a. W. $\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{E}(\mathsf{IK}_n)=\mathfrak{J}\mathfrak{K}$ [12].

Bemerkung 2.19. Es ist eine Verschärfung dieses Satzes bekannt: jeder Aussage $\mathfrak{A}$ kann eine bestimmte natürliche Zahl zugeordnet werden (die ausschließlich von der Struktur dieser Aussage abhängt), so daß die Formeln: $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\mathfrak{E}(\mathsf{IK}_n)$ und $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\mathfrak{J}\mathfrak{K}$ äquivalent sind [12].

Das am Anfang dieses Paragraphen erwähnte Entscheidbarkeitskriterium wird durch 2.11 für das System $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ und durch die eben angedeutete Verschärfung von 2.18 für das System $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$ geliefert [13].

§ 3. Topologische Räume [14].

Wir bringen einige bekannte topologische Begriffe in Erinnerung:

Definition 3.1. Eine nicht-leere Menge R heißt topologischer Raum (mit der Grundoperation $^{-}$), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) *ist* $X\subset R$, *so ist* $\overline{\overline{X}}=\overline{X}\subset R$;

(ii) *ist* $X\subset R$ *und besteht X aus höchstens einem Element, so ist* $\overline{X}=X$;

(iii) *ist* $X\subset R$ *und* $Y\subset R$, *so ist* $\overline{X+Y}=\overline{X}+\overline{Y}$.

Bemerkung 3.2. Es sei R ein topologischer Raum und A eine nicht-leere Teilmenge von R. Wir definieren nun eine zu A relative Operation $^{-(A)}$ durch die Formel: $\overline{X}^{(A)}=A\cdot\overline{X}$ für jedes $X\subset A$. Man kann dann leicht auf Grund von 3.1 zeigen, daß A ein topologischer Raum mit der Grundoperation $^{-(A)}$ ist; ein solcher Raum wird Teilraum von R genannt.

Definition 3.3. Ist R ein topologischer Raum, so heißt eine Menge X offen (in R), in Zeichen: $X\,\epsilon\,\boldsymbol{O}(R)$, wenn $X=R-\overline{R-X}$.

Definition 3.4. Eine Teilmenge X eines topologischen Raumes R heißt dicht (in R), wenn $\overline{X}=R$.

Definition 3.5. Der topologische Raum R heißt isoliert, bzw. insichdicht, wenn x non $\epsilon\,\overline{R-\{x\}}$, bzw. $x\,\epsilon\,\overline{R-\{x\}}$, für jedes $x\,\epsilon\,R$.

Korollar 3.6. Ein topologischer Raum R ist dann und nur dann isoliert, wenn $\overline{X}=X$ für jedes $X\subset R$. [Nach 3.1, 3.5]

Definition 3.7. Ein topologischer Raum R heißt normal, wenn es zu zwei beliebigen Mengen $X_1\subset R$ und $X_2\subset R$, für die $\overline{X}_1\cdot\overline{X}_2=0$ ist, zwei disjunkte Mengen $Y_1, Y_2\,\epsilon\,\boldsymbol{O}(R)$ gibt, so daß $\overline{X}_1\subset Y_1$ und $\overline{X}_2\subset Y_2$.

Definition 3.8. Wir sagen, daß der topologische Raum R ein **Raum mit abzählbarer Basis** *ist, wenn es eine unendliche Folge von nicht-leeren Mengen $X_1, \ldots, X_n, \ldots \in \boldsymbol{O}(R)$ gibt, so daß jede nicht-leere Menge $Y \in \boldsymbol{O}(R)$ in der Form: $Y = X_{i_1} + \ldots + X_{i_n} + \ldots$ dargestellt werden kann ($i_1, \ldots, i_n, \ldots$ ist eine Folge von natürlichen Zahlen).*

Für spätere Anwendungen wollen wir noch eine spezielle Klasse von topologischen Räumen auszeichnen:

Definition 3.9. Ein topologischer Raum R wird als **E-Raum** *bezeichnet, wenn er folgende Bedingung erfüllt:*

zu jeder natürlichen Zahl n und jeder nicht-leeren Menge $A \in \boldsymbol{O}(R)$ gibt es nicht-leere paarweise fremde Mengen $B_1, \ldots, B_n \in \boldsymbol{O}(R)$, für die

(i) $B_1 + \ldots + B_n \subset A$ *und* $B_1 + \ldots + B_n \neq A$,

(ii) $\overline{A - (B_1 + \ldots + B_n)} \supset \bar{A} - A$,

(iii) $\bar{B}_1 \ldots \bar{B}_n \supset A - (B_1 + \ldots + B_n)$.

Satz 3.10. Jeder insichdichte normale topologische Raum R mit abzählbarer Basis ist ein E-Raum.

Beweis[15]). Im Einklang mit 3.8 gibt es eine unendliche Folge von Mengen $C_1, \ldots, C_k, \ldots$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) *die Mengen $C_1, \ldots, C_k, \ldots$ sind offen und nicht-leer;*

(2) *jede offene nicht-leere Menge X kann in der Form: $X = C_{i_1} + \ldots + C_{i_k} + \ldots$ dargestellt werden.*

Da der Raum R nach Voraussetzung insichdicht und normal ist, erhält man leicht aus (2) auf Grund von 3.5 und 3.7:

(3) *zu jeder nicht-leeren Menge $X \in \boldsymbol{O}(R)$ gibt es eine Menge C_k, für die $\bar{C}_k \subset X$ und $\bar{C}_k \neq X$.*

Wir betrachten nun eine beliebige natürliche Zahl n und eine Menge A, für welche

(4) $A \in \boldsymbol{O}(R)$ *und* $A \neq 0$;

wir wollen Mengen $B_1, \ldots, B_n$ konstruieren, die folgenden Bedingungen genügen:

(5) *$B_1, \ldots, B_n$ sind offen, nicht-leer und paarweise fremd;*

(6) $B_1 + \ldots + B_n \subset A$ *und* $B_1 + \ldots + B_n \neq A$;

(7) $\overline{A - (B_1 + \ldots + B_n)} \supset \bar{A} - A$;

(8) $\bar{B}_1 \ldots \bar{B}_n \supset A - (B_1 + \ldots + B_n)$.

Wir führen das zunächst für $n=1$ durch: wir werden nämlich eine Menge B angeben, derart daß

(9) $B \in \boldsymbol{O}(R)$, $B \neq 0$, $B \subset A$, $B \neq A$,

(10) $\overline{A - B} \supset \bar{A} - A$ *und* $\bar{B} \supset A - B$.

Am einfachsten wird eine Menge B von dieser Beschaffenheit in folgender Weise erhalten. Wir betrachten die Mengen $A_k = C_k \cdot (\bar{A} - A)$ und wählen aus jeder solchen Menge (insofern sie nicht leer ist) einen Punkt a_k; es sei $D = \{a_1, \ldots, a_k, \ldots\}$. Es ist, wie leicht ersichtlich, $\bar{D} \supset \bar{A} - A$ (denn sonst gäbe es nach (2) für $X = R - \bar{D}$ eine Menge $C_k \subset R - \bar{D} \subset R - D$, die mit $\bar{A} - A$ gemeinsame Elemente hätte, der Definition von D entgegen). Die Menge D ist höchstens abzählbar und nicht-leer (von dem trivialen Fall: $\bar{A} - A = 0$ abgesehen); wir ordnen die Elemente von D in eine unendliche Folge $d_1, \ldots, d_k, \ldots$ in der Weise an, daß in dieser Folge jedes Element $x \in D$ entweder nur einmal oder unendlich oft vorkommt, je nach dem ob $x \in \overline{D - \{x\}}$ ist oder nicht. Ferner ist R als ein normaler Raum mit abzählbarer Basis **metrisierbar**: man kann je zwei Punkten $x, y \in R$ eine reelle Zahl $|x-y|$, die sog. **Entfernung zwischen** x und y, zuordnen, und zwar in der Weise, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) *die Formeln: $|x-y| = 0$ und $x = y$ sind für beliebige $x, y \in R$ äquivalent;*

(ii) $|x-y| + |x-z| \geqslant |y-z|$ *für* $x, y, z \in R$;

(iii) *ist $X \subset R$, so gilt dann und nur dann $x \in \bar{X}$, wenn es zu jedem $r > 0$ ein Element $y \in X$ mit $|x-y| < r$ gibt.*

Da nun $D \subset \bar{A}$ ist, gibt es nach (iii) zu jedem $x \in D$ Punkte $y \in A$, die beliebig nahe von x liegen. Wir wählen demnach für jedes natürliche k einen Punkt $e_k \in A$ mit $|d_k - e_k| < 1/k$ und setzen: $B = A - \{e_1, \ldots, e_k, \ldots\}$; man zeigt ohne Schwierigkeit, daß B die Formeln (9) und (10) erfüllt (der Umstand, daß R insichdicht ist, spielt dabei eine wesentliche Rolle).

Der Fall: $n=1$ ist dadurch erledigt. Wir gehen nun zu dem allgemeinen Fall über, wobei wir uns der schon definierten Menge B bedienen.

Wir setzen zunächst für jedes $X \subset R$:

(11) $X^{+} = R - \overline{R - \bar{X}}$.

Aus (11), 3.1 und 3.3 ergeben sich leicht folgende Rechnungsregeln für die Operation $^+$:

(12) $(X^+)^+ = X^+ \in \mathbf{O}(R)$ *für jedes* $X \subset R$;

(13) $X \subset X^+$ *und* $\overline{X} = \overline{X^+}$ *für jedes* $X \in \mathbf{O}(R)$;

(14) *ist* $X \in \mathbf{O}(R)$, $Y \subset R$ *und* $X \subset \overline{Y}$, *so ist auch* $X \subset Y^+$;

(15) *ist* $X_1+\ldots+X_n \subset R$ *und sind die Mengen* $\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_n$ *paarweise fremd, so gilt:* $(X_1+\ldots+X_n)^+ = X_1^+ + \ldots + X_n^+$.

Wir definieren ferner durch Rekurrenz eine unendliche Folge von Mengen $G_1,\ldots,G_l,\ldots$:

(16) $G_1 = C_k^+$, *wo* k *die kleinste natürliche Zahl ist, für die* $\overline{C}_k \subset B$ *und* $\overline{C}_k \neq B$;

(17) $G_{l+1} = C_k^+$, *wo* k *die kleinste natürliche Zahl ist, für die* $\overline{C}_k \subset B - \overline{G_1+\ldots+G_l}$ *und* $\overline{C}_k \neq B - \overline{G_1+\ldots+G_l}$.

Auf Grund von (1), (3), (9), (12) und (13) zeigt man zunächst (mit Hilfe eines leichten Induktionsverfahrens), daß durch (16) und (17) jedem natürlichen l eine Menge G_l tatsächlich zugeordnet ist, und ferner, daß diese Mengen G_l folgenden Bedingungen genügen:

(18) G_l *ist offen, nicht-leer und es gilt:* $G_l^+ = G_l \subset \overline{G}_l \subset B$ *für jedes* l;

(19) *die Mengen* $\overline{G}_1,\ldots,\overline{G}_l,\ldots$ *(und umsomehr die Mengen* $G_1,\ldots,G_l,\ldots$*) sind paarweise fremd.*

Es sei $C = B - \overline{G_1+\ldots+G_l+\ldots}$ Wegen (9) ist $C \in \mathbf{O}(R)$. Wäre C nicht leer, so würde es nach (9) eine Zahl k geben, für die $\overline{C}_k \subset C$ und $\overline{C}_k \neq C$; man hätte dann a fortiori $\overline{C}_k \subset B - \overline{G_1+\ldots+G_l}$ und $\overline{C}_k \neq B - \overline{G_1+\ldots+G_l}$ für jedes l, und man könnte daraus auf Grund von (16) und (17) leicht schließen, daß C_k mit einer der Mengen G_l identisch ist, wonach wegen (1) und (13) $\overline{C}_k = \overline{G}_l \subset B - \overline{G}_l$; die Menge G_l müßte also leer sein, im Widerspruch zu (18). Folglich ist $C=0$, d. h. $B \subset \overline{G_1+\ldots+G_l+\ldots}$; hienach mit Rücksicht auf (10) $\overline{A} \subset \overline{A-B} + \overline{B} \subset \overline{B} \subset \overline{G_1+\ldots+G_l+\ldots}$ Da anderseits nach (18) und (9) $G_1+\ldots+G_l+\ldots \subset B \subset A$, so hat man schließlich

(20) $\overline{A} = \overline{G_1+\ldots+G_l+\ldots}$

Wir wollen nun folgendes zeigen:

(21) *ist* $X \in \mathbf{O}(R)$, $X \subset A$ *und* X *non* $\subset \overline{G_1+\ldots+G_l+\ldots}$, *so gibt es unendlich viele Zahlen* l, *für die* $X \cdot G_l \neq 0$.

Zu diesem Zweck betrachten wir eine offene Menge $X \subset A$, die nur mit endlich vielen Mengen G_l gemeinsame Elemente hat. Es gibt also ein l_0, so daß $X \cdot G_l = 0$ für jedes $l > l_0$. Die Menge $Y = X - \overline{G_1+\ldots+G_{l_0}}$ ist demnach zu der ganzen Summe $G_1+\ldots+G_{l_0}+\ldots$ fremd; da hiebei $Y \in \mathbf{O}(R)$, so ist auch $Y \cdot \overline{G_1+\ldots+G_{l_0}+\ldots} = 0$, also wegen (20) $Y \cdot \overline{A} = 0$ und umsomehr $Y \cdot A = 0$. Anderseits ist $Y \subset X \subset A$; folglich ist $Y = 0$, d. h. $X \subset \overline{G_1+\ldots+G_{l_0}}$. Daraus ergibt sich auf Grund von (14), (15) und (19): $X \subset (G_1+\ldots+G_{l_0})^+ = G_1^+ + \ldots + G_{l_0}^+$, wonach wegen (18): $X \subset G_1+\ldots+G_{l_0} \subset G_1+\ldots+G_{l_0}+\ldots$ Somit haben wir bewiesen, daß jede offene Menge $X \subset A$, die nur mit endlich vielen Mengen G_l gemeinsame Elemente hat, in $G_1+\ldots+G_l+\ldots$ enthalten ist; durch Kontraposition erhalten wir hieraus (21).

Es seien

(22) $C_{p_1},\ldots,C_{p_k},\ldots$ *diejenigen Mengen der Folge* $C_1,\ldots,C_k,\ldots$, *welche in* A_1, *aber nicht in* $G_1+\ldots+G_l+\ldots$ *enthalten sind.*

Man kann die Mengen $G_1,\ldots,G_l,\ldots$ derart in n Mengensysteme $\mathbf{M}_1,\ldots,\mathbf{M}_n$ einteilen, daß dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:

(23) $\mathbf{M}_1+\ldots+\mathbf{M}_n = \{G_1,\ldots,G_l,\ldots\}$;

(24) *die Systeme* $\mathbf{M}_1,\ldots,\mathbf{M}_n$ *sind nicht-leer und paarweise fremd;*

(25) *zu jeder Menge* C_{p_k}, $k=1,2,\ldots$, *und zu jeder Zahl* j, $1 \leqslant j \leqslant n$, *gibt es eine Menge* $X \in \mathbf{M}_j$, *für die* $C_{p_k} \cdot X \neq 0$.

Dazu wendet man folgendes Verfahren an. Nach (1), (22) und (21) gibt es sicher n Mengen $G_{l_1},\ldots,G_{l_n}$, die mit C_{p_1} gemeinsame Elemente haben; wir zählen die Menge G_{l_j}, $1 \leqslant j \leqslant n$, zu dem System $\mathbf{M}_j$. Ebenso gibt es n Mengen $G_{l_{n+1}},\ldots,G_{l_{2\cdot n}}$, die von $G_{l_1},\ldots,G_{l_n}$ verschieden sind und mit C_{p_2} gemeinsamen Elemente haben; die Menge $G_{l_{n+j}}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, wird wiederum zu $\mathbf{M}_j$ gezählt. Dieses Verfahren kann offenbar ins Unendliche fortgesetzt werden; die dabei event. übrigbleibenden Mengen G_l werden nachträglich in beliebiger Weise in die Systeme $\mathbf{M}_1,\ldots,\mathbf{M}_n$ eingereiht (z. B. alle in das System $\mathbf{M}_1$).

Wir setzen nun:

(26) $$B_j = \sum_{X \in \mathbf{M}_j} X \quad \textit{für} \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Aus (18), (19), (23), (24) und (26) ersieht man sofort, daß die soeben definierten Mengen $B_1, \ldots, B_n$ der Bedingung (5) genügen. Nach (18), (23) und (26) hat man ferner $B_1+\ldots+B_n = G_1+\ldots+G_l+\ldots \subset B$ und folglich $A-(B_1+\ldots+B_n) \supset A-B$; mit Hilfe von (9) und (10) erhält man hieraus (6) und (7). Nehmen wir schließlich an, daß die Formel: $\bar{B}_j \supset A-(B_1+\ldots+B_n)$ für ein bestimmtes j, $1 \leqslant j \leqslant n$, nicht gilt. Man hat also $A-\bar{B}_j$ *non* $\subset B_1+\ldots+B_n = G_1+\ldots+G_l+\ldots$, wobei wegen (4) $A-\bar{B}_j$ offen ist. Auf Grund von (2) und (22) schießt man hieraus auf die Existenz einer Menge $C^{n}_{p_k}$, die in $A-\bar{B}_j$ enthalten und demnach zu B_j fremd ist; das steht aber im offenbaren Widerspruch zu (25) und (26). Dadurch ist unsere Annahme widerlegt, und es gilt (8).

Wir haben somit (zu jedem natürlichen n und jeder nicht-leeren offenen Menge A) Mengen $B_1, \ldots, B_n$ konstruiert, die den Bedingungen (5)–(8) genügen. Laut 3.9 ist also R ein E-Raum, w. z. b. w.

Bemerkung 3.11. Aus 3.10 erhellt, daß zu den E-Räumen insbesondere die euklidischen Räume (von einer beliebigen Dimensionszahl) gehören. Auch jeder insichdichte Teilraum eines Euklidischen Raumes ist ein E-Raum.

§ 4. Topologische Deutung des zweiwertigen und des intuitionistischen Aussagenkalküls.

Wir definieren jetzt für Teilmengen eines beliebigen topologischen Raumes vier Operationen, die wir mit denselben Symbolen bezeichnen wie die Operationen mit Aussagen, von denen am Anfang von §1 die Rede war.

Definition 4.1. Ist R ein topologischer Raum, so setzen wir für beliebige Mengen $X \subset R$ und $Y \subset R$:

(i) $X \rightarrow Y = R - \overline{\bar{X} - Y}$,

(ii) $X \vee Y = X + Y$ *(die übliche mengentheoretische Summe)*,

(iii) $X \wedge Y = X \cdot Y$ *(der übliche mengentheoretische Durchschnitt)*,

(iv) $\sim X = X \rightarrow 0 (= R - \bar{X})$.

Korollar 4.2. (i) *Ist R ein topologischer Raum, $X \subset R$ und $Y \subset R$, so ist $X \rightarrow Y$, $\sim X \in \boldsymbol{O}(R)$, und zwar ist $X \rightarrow Y$ die größte offene Menge Z, für die $X \cdot Z \subset Y$ ist, und $\sim X$ die größte offene Menge, die zu X fremd ist.*

(ii) *Wenn dabei $X, Y \in \boldsymbol{O}(R)$, so ist auch $X \vee Y$, $X \wedge Y \in \boldsymbol{O}(R)$, und zwar ist $X \vee Y$ die kleinste offene Menge, die X und Y umfaßt, und $X \wedge Y$ die größte offene Menge, die in X und Y enthalten ist.*

[Nach 3.1, 3.3, 4.1]

Korollar 4.3. Ist R ein topologischer Raum, $X \subset R$ und $Y \subset R$, so gilt dann und nur dann $X \rightarrow Y = R$, wenn $X \subset Y$; insbesondere gilt dann und nur dann $R \rightarrow Y = R$, wenn $Y = R$. [Nach 3.1, 4.1 (i)]

Korollar 4.4. Ist R ein topologischer Raum und $X \subset R$, so ist X dann und nur dann in R dicht, wenn $\sim\sim X = R$.

[Nach 3.1, 3.4, 4.1 (iv)]

Definition 4.5. Das geordnete Sextupel $[\boldsymbol{O}(R), R, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim]$, wo R ein topologischer Raum ist, wird mit $\mathbf{O}(R)$ bezeichnet.

Satz 4.6. Für jeden topologischen Raum R ist $\mathbf{O}(R)$ eine Matrix. [Nach 2.1, 3.1, 3.3, 4.2, 4.3, 4.5]

Durch $\mathbf{O}(R)$, wie durch jede andere Matrix, wird ein System von Aussagen, nämlich $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$, eindeutig bestimmt. Wir wollen die Beziehung dieses Systems zu den Systemen $\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{J}\mathfrak{R}$ näher untersuchen.

Hilfssatz 4.7. Ist R ein topologischer Raum und $\boldsymbol{S} = \{R, 0\}$, so ist $\mathbf{M} = [\boldsymbol{S}, R, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim]$ eine zu der Matrix $\mathbf{ZK}$ isomorphe Submatrix von $\mathbf{O}(R)$.

Der Beweis (nach 2.1, 2.3, 2.8, 2.10, 3.1, 3.3 und 4.1) bietet keine Schwierigkeiten.

Satz 4.8. Für jeden topologischen Raum R gilt $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R)) \subset \mathfrak{Z}\mathfrak{R}$.

[Nach 2.7, 2.9, 2.11, 4.7]

Hilfssatz 4.9. Ist R ein beliebiger topologischer Raum und $\mathfrak{A}$ ein Axiom des intuitionistischen Aussagenkalküls, so ist $\mathfrak{A} \in \mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$.

Beweis. Im Einklang mit 1.2 muß man beim Beweis zehn Fälle unterscheiden, je nach der Gestalt des Axioms $\mathfrak{A}$. Da aber die Schlußweise in allen Fällen nahezu dieselbe ist, wollen wir hier nur einen Fall näher betrachten, sagen wir 1.2 (ix).

Es sei also

$$\mathfrak{A} = \sim\mathfrak{B} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}), \tag{1}$$

wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ beliebige Aussagen sind. Wir konstruieren gemäß 2.3 (und mit Rücksicht auf 4.5, 4.6) die Funktionen $F_{\mathfrak{A}, \mathbf{O}(R)}$, $F_{\mathfrak{B}, \mathbf{O}(R)}$, $F_{\mathfrak{C}, \mathbf{O}(R)}$. Wir betrachten ferner eine beliebige unendliche Folge von Mengen $X_1, \ldots, X_n, \ldots \in \boldsymbol{O}(R)$ und setzen:

$$F_{\mathfrak{A}, \mathbf{O}(R)}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = X, \qquad F_{\mathfrak{B}, \mathbf{O}(R)}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = Y, \\ F_{\mathfrak{C}, \mathbf{O}(R)}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = Z. \tag{2}$$

Nach 2.5 (ii), (v) erhalten wir aus (1) und (2): $X=\sim Y\to(Y\to Z)$, wonach auf Grund von 4.1 (i), (iv):

(3) $$X=(R-\overline{Y})\to(Y\to Z)=R-\overline{(R-\overline{Y})-(R-\overline{Y-Z})}.$$

Da wegen 3.1 (iii) $\overline{Y-Z}\subset\overline{Y}$ und folglich $R-\overline{Y}\subset R-\overline{Y-Z}$, so ergibt sich aus (3) und 3.1 (ii): $X=R$. Nach (2) gilt also

$$F_{\mathfrak{A},\mathbf{O}(R)}(X_1,\ldots,X_n)=R \quad \textit{für beliebige} \quad X_1,\ldots,X_n,\ldots\,\epsilon\,\mathbf{O}(R);$$

hieraus, laut 2.5, $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$, w. z. b. w.

Hilfssatz 4.10. Es sei R ein beliebiger topologischer Raum und $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}$ drei Aussagen, derart daß $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$. Ist dann $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\,\epsilon\,\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$, so ist auch $\mathfrak{C}\,\epsilon\,\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$; m. a. W. das System $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$ ist in Bezug auf die Operation der Abtrennung abgeschlossen.

Beweis. Im Einklang mit 2.5 (und mit Rücksicht auf 4.5, 4.6) konstruieren wir die Funktionen $F_{\mathfrak{A},\mathbf{O}(R)}$, $F_{\mathfrak{B},\mathbf{O}(R)}$ und $F_{\mathfrak{C},\mathbf{O}(R)}$; wir haben dann für beliebige Mengen $X_1,\ldots,X_n,\ldots\,\epsilon\,\mathbf{O}(R)$

(1) $$F_{\mathfrak{A},\mathbf{O}(R)}(X_1,\ldots,X_n,\ldots)= =F_{\mathfrak{B},\mathbf{O}(R)}(X_1,\ldots,X_n,\ldots)\to F_{\mathfrak{C},\mathbf{O}(R)}(X_1,\ldots,X_n,\ldots),$$

wobei, da $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\,\epsilon\,\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$,

(2) $$F_{\mathfrak{A},\mathbf{O}(R)}(X_1,\ldots,X_n,\ldots)=R=F_{\mathfrak{B},\mathbf{O}(R)}(X_1,\ldots,X_n,\ldots).$$

Die Formeln (1) und (2) ergeben auf Grund von 4.3:

$$F_{\mathfrak{C},\mathbf{O}(R)}(X_1,\ldots,X_n,\ldots)=R \quad \textit{für beliebige} \quad X_1,\ldots,X_n,\ldots\,\epsilon\,\mathbf{O}(R),$$

wonach, laut 2.5, $\mathfrak{C}\,\epsilon\,\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$. Das System $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$ ist also in Bezug auf die Operation der Abtrennung abgeschlossen (vgl. 1.3), w. z. b. w.

Satz 4.11. Für jeden topologischen Raum R gilt $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}\subset\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$. [Nach 1.4, 4.9, 4.10]

Satz 4.12. Für jeden topologischen Raum R und jede Aussage $\mathfrak{A}$ sind die Bedingungen: $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ und $\sim\sim\mathfrak{A}\,\epsilon\,\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$ äquivalent. [Nach 1.6, 4.8, 4.11]

Den Sätzen 4.8 und 4.11 gemäß, besteht für jeden topologischen Raum R die doppelte Inklusion: $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}\subset\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))\subset\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$. Wir werden nun zeigen, daß es sowohl solche Räume R gibt, für die $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))=\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$, als auch solche, für die $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))=\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ ist. Und zwar besteht die erste Gleichung dann und nur dann, wenn R ein isolierter (also sozusagen ein degenerierter) Raum ist; die zweite gilt jedenfalls für alle E-Räume, also insbesondere für alle insichdichten normalen Räume mit abzählbarer Basis (vgl. 3.9–3.11).

Hilfssatz 4.13. Es sei R ein topologischer Raum. Damit jede Aussage $\mathfrak{A}$ von der Form: $\mathfrak{A}=(\sim\mathfrak{B}\to\mathfrak{B})\to\mathfrak{B}$ (wo $\mathfrak{B}$ eine beliebige Aussage ist) zu $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$ gehört, ist notwendig und hinreichend, daß R isoliert ist.

Beweis. Ist R ein isolierter Raum, so erhalten wir leicht aus 3.6 und 4.1 (i), (iv) die Formel: $(\sim X\to X)\to X=R$ für jedes $X\subset R$ und hieraus schließen wir auf Grund von 2.5, 4.5 und 4.6 (genau so wie im Bewies von 4.9), daß jede Aussage $\mathfrak{A}=(\sim\mathfrak{B}\to\mathfrak{B})\to\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$ gehört.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, daß $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$ alle Aussagen $\mathfrak{A}=(\sim\mathfrak{B}\to\mathfrak{B})\to\mathfrak{B}$ enthält. Mit Rücksicht auf 1.1 kann man insbesondere annehmen, daß $\mathfrak{B}$ eine Aussagevariable ist, sagen wir $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1$. Im Einklang mit 2.5 und wegen 4.5, 4.6 gilt dann für jede Folge von offenen Mengen $X_1,\ldots,X_n,\ldots$:

$$F_{\mathfrak{B},\mathbf{O}(R)}(X_1,\ldots,X_n,\ldots)=X_1 \quad \textit{und} \quad F_{\mathfrak{A},\mathbf{O}(R)}(X_1,\ldots,X_n,\ldots)= =(\sim X_1\to X_1)\to X_1.$$

Da hiebei $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$, so erhält man $(\sim X_1\to X_1)\to X_1=R$, woraus wegen 4.3 $(\sim X_1\to X_1)\subset X_1$ und ferner, auf Grund von 3.1 und 4.1, $R-\overline{R-\overline{X}_1}\subset X_1$ für jedes $X_1\,\epsilon\,\mathbf{O}(R)$. Ist insbesondere x ein Element von R, so schließt man aus 3.1 und 3.3, daß $R-\overline{\{x\}}\,\epsilon\,\mathbf{O}(R)$, folglich $R-\overline{R-\overline{R-\{x\}}}\subset R-\{x\}$ und demnach $R-\overline{R-\{x\}}\supset\{x\}$; hieraus ersieht man sofort, daß $\overline{R-\{x\}}\neq R$ und $\overline{R-\{x\}}=R-\{x\}$. Man hat somit x non $\epsilon\,\overline{R-\{x\}}$ für jedes $x\,\epsilon\,R$; das bedeutet aber, daß der Raum R isoliert ist (vgl. 3.5). Hilfssatz 4.13 gilt also in beiden Richtungen.

Satz 4.14. Es sei R ein topologischer Raum. Damit $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))=\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß R isoliert ist.

Beweis. Der Raum R sei isoliert. Nach 1.2, 4.9 und 4.13 enthält dann $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$ alle Axiome des zweiwertigen Aussagenkalküls und ist gemäß 4.10 in Bezug auf die Operation der Abtrennung abgeschlossen; laut 1.4 gilt folglich $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}\subset\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$, wonach wegen 4.8 $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))=\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$. Ist, umgekehrt, die letztere Gleichung erfüllt, so enthält das System $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$ insbesondere alle Aussagen $\mathfrak{A}$ von der Form $\mathfrak{A}=(\sim\mathfrak{B}\to\mathfrak{B})\to\mathfrak{B}$ (vgl. 1.2 (x) und 1.4); nach 4.13 ist also der Raum R isoliert, w. z. b. w.

Um weiter zu gehen, wollen wir zunächst die Operationen $\to$ und $\sim$ einer Relativierung unterwerfen (vgl. 3.2).

Hilfsdefinition 4.15. *Ist R ein topologischer Raum und $A \subset R$, so setzen wir für beliebige Mengen $X \subset R$ und $Y \subset R$:*

(i) $X \underset{A}{\rightarrow} Y = A - \overline{X - Y}$,

(ii) $\underset{A}{\sim} X = X \underset{A}{\rightarrow} 0 \, (= A - \overline{X})$.

Korollar 4.16. *Ist R ein topologischer Raum, $A \subset R$, $X \subset R$ und $Y \subset R$, so ist $X \underset{A}{\rightarrow} Y \subset A$ und $\underset{A}{\sim} X \subset A$; ist dabei $A \in \boldsymbol{O}(R)$, so ist $X \underset{A}{\rightarrow} Y$, $\underset{A}{\sim} X \in \boldsymbol{O}(R)$.* [Nach 3.1, 3.3, 4.15]

Korollar 4.17. *Es sei R ein topologischer Raum und $A \subset R$.*

(i) *Ist $X \subset A$ und $Y \subset R$, so gilt dann und nur dann $X \underset{A}{\rightarrow} Y = A$, wenn $X \subset Y$.*

(ii) *Ist $Y \subset A$, so gilt dann und nur dann $A \underset{A}{\rightarrow} Y = A$, wenn $Y = A$.*

(iii) $X \underset{A}{\rightarrow} A = A$ *für jedes* $X \subset A$.

(iv) $A \underset{A}{\rightarrow} Y = Y$ *für jedes offene* $Y \subset A$.

(v) $\underset{A}{\sim} A = A \underset{A}{\rightarrow} 0 = 0$ *und* $\underset{A}{\sim} 0 = 0 \underset{A}{\rightarrow} 0 = A$. [Nach 3.1, 3.3, 4.15]

Korollar 4.18. *Ist R ein topologischer Raum, so gilt $X \underset{R}{\rightarrow} Y = X \rightarrow Y$ und $\underset{R}{\sim} X = \sim X$ für beliebige Mengen $X \subset R$ und $Y \subset R$.* [Nach 4.1 (i), (iv), 4.15]

Folgender Hilfssatz stellt eine Verallgemeinerung von 4.7 dar:

Hilfssatz 4.19. *Ist R ein topologischer Raum, $A \subset R$, $A \neq 0$ und $\boldsymbol{T} = \{A, 0\}$, so ist $\mathsf{N} = [\boldsymbol{T}, A, \underset{A}{\rightarrow}, \vee, \wedge, \underset{A}{\sim}]$ eine zu ZK isomorphe Matrix.* [Nach 2.1, 2.3, 2.10, 3.1, 4.1 (ii), (iii), 4.17 (iii), (v)].

Hilfssatz 4.20. *Voraussetzungen:*

(α) *R ist ein topologischer Raum;*

(β) $A, B \in \boldsymbol{O}(R)$, $B \subset A$, $B \neq A$, $\overline{A - B} \supset \overline{A} - A$ *und* $\overline{B} \supset A - B$;

(γ) *$\boldsymbol{S}$ ist ein System von offenen Mengen $X \subset B$;*

(δ) *ist $X, Y \in \boldsymbol{S}$ und $X - Y \neq 0$, so ist $\overline{X - Y} \supset \overline{B} - B$;*

(ε) $\mathsf{M} = [\boldsymbol{S}, B, \underset{B}{\rightarrow}, \vee, \wedge, \underset{B}{\sim}]$ *ist eine Matrix;*

(ζ) $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} + \{A\}$ *und* $\mathsf{N} = [\boldsymbol{T}, A, \underset{A}{\rightarrow}, \vee, \wedge, \underset{A}{\sim}]$.

Behauptungen:

(i) *$\boldsymbol{T}$ ist ein System von offenen Mengen $X \subset A$;*

(ii) *ist $X, Y \in \boldsymbol{T}$ und $X - Y \neq 0$, so ist $\overline{X - Y} \supset \overline{A} - A$;*

(iii) *N ist eine Matrix und $\mathsf{N} = \mathsf{M}^*$.*

Beweis. Nach den Voraussetzungen (α), (β) und mit Rücksicht auf 3.1 hat man $\overline{B} \supset B$ und $\overline{B} \supset A - B$, woraus $\overline{B} \supset A$; da hiebei $A \supset B$, so gilt

(1) $\overline{A} = \overline{B}$ *und* $\overline{A} - A \subset \overline{B} - B$.

Aus (γ) und (ζ) ergibt sich sofort die Behauptung (i):

(2) *$\boldsymbol{T}$ ist ein System von offenen Mengen $X \subset A$.*

Wir wollen nun die Behauptung (ii) beweisen:

(3) *ist $X, Y \in \boldsymbol{T}$ und $X - Y \neq 0$, so $\overline{X - Y} \supset \overline{A} - A$.*

Wenn nämlich $X - Y \neq 0$, so ist nach (2) $Y \neq A$, also wegen (ζ) $Y \in \boldsymbol{S}$. Ist auch $X \in \boldsymbol{S}$, so folgt aus (δ) und (1), daß $\overline{X - Y} \supset \overline{B} - B \supset \overline{A} - A$. Ist aber $X \text{ non} \in \boldsymbol{S}$, folglich $X = A$, und ist dabei $Y \neq B$, so hat man nach (γ) $B - Y \neq 0$ und man gewinnt hieraus mit Rücksicht auf (δ) und (1): $\overline{X - Y} \supset \overline{B - Y} \supset \overline{B} - B \supset \overline{A} - A$ (da $B \in \boldsymbol{S}$ wegen (ε) und 2.1). Für $X = A$ und $Y = B$ ergibt sich schließlich die Formel: $\overline{X - Y} \supset \overline{A} - A$ direkt aus (β). (3) gilt also in jedem Fall.

Die Operation $\underset{A}{\rightarrow}$ hat folgende Eigenschaften:

(4) *ist $X, Y \in \boldsymbol{S}$, so ist entweder $X \underset{A}{\rightarrow} Y = A$ oder $= X \underset{B}{\rightarrow} Y$, je nachdem ob $X \underset{B}{\rightarrow} Y = B$ oder $\neq B$;*

(5) $X \underset{A}{\rightarrow} A = A$ *für jedes* $X \in \boldsymbol{T}$;

(6) $A \underset{A}{\rightarrow} Y = Y$ *für jedes* $Y \in \boldsymbol{T}$.

Wenn, in der Tat, $X, Y \in \boldsymbol{S}$ und $X \underset{B}{\rightarrow} Y = B$, so hat man nach 4.17 (i) $X \subset Y$ und $X \underset{A}{\rightarrow} Y = A$ (da wegen (β) und (γ): $X \subset B \subset A$). Wenn aber $X \underset{B}{\rightarrow} Y = B - \overline{X - Y} \neq B$, so folgt aus ($\delta$): $\overline{X - Y} \supset \overline{B} - B$, also mit Rücksicht auf (1): $A - \overline{X - Y} \subset A - (\overline{B} - B) = (A - \overline{B}) + B = B$ und hienach: $A - \overline{X - Y} \subset B - \overline{X - Y}$; da anderseits $A \supset B$ und folglich $A - \overline{X - Y} \supset B - \overline{X - Y}$, hat man schließlich $A - \overline{X - Y} = B - \overline{X - Y}$, d. i. $X \underset{A}{\rightarrow} Y = X \underset{B}{\rightarrow} Y$. Somit ist (4) bewiesen. (5) und (6) ergeben sich unmittelbar aus 4.17 (iii), (iv) und (2).

Im Einklang mit 4.1 (ii), (iii) erhält man ferner aus (2):

(7) $Z\vee A=A\vee Z=A$ *und* $Z\wedge A=A\wedge Z=Z$ *für jedes* $Z\in\boldsymbol{T}$.

Die Operation $\underset{A}{\sim}$ genügt folgenden Bedingungen:

(8) $\underset{A}{\sim}A=\underset{B}{\sim}B=0$;

(9) *ist* $X\in\boldsymbol{S}$, *so ist* $\underset{A}{\sim}X=A$ *oder* $=\underset{B}{\sim}X$, *je nachdem ob* $\underset{B}{\sim}X=B$ *oder* $\neq B$.

(8) folgt direkt aus 4.17 (v). Mit Hilfe von 2.1 und (ε) schließen wir aus (8), daß $0\in\boldsymbol{S}$; mit Rücksicht darauf setzen wir in (4) $Y=0$ und auf Grund von 4.15 (ii) gewinnen unmittelbar (9).

Wenn wir nun die Voraussetzungen (ε), (ζ) und die Formeln (4)–(9) mit 2.12 (i)–(v) vergleichen, so ersehen wir sofort, daß

(10) $\mathsf{N}=\mathsf{M}^*$;

gemäß 2.14 ergibt sich hieraus:

(11) N *ist eine Matrix.*

Wegen (3), (10) und (11) ist der Beweis zu Ende geführt.

Hilfssatz 4.21. Voraussetzungen:

(α) *R ist ein topologischer Raum,*

(β) *$B_1,\dots,B_n\in\boldsymbol{O}(R)$, $B_1,\dots,B_n$ sind nicht-leere, paarweise fremde Mengen, $B_1+\dots+B_n=B$ und $\overline{B}_1\dots\overline{B}_n\supset\overline{B}-B$,*

(γ) *für $p=1,2,\dots,n$ ist $\boldsymbol{S}_p$ ein System von offenen Mengen $X\subset B_p$;*

(δ) *ist $X,Y\in\boldsymbol{S}_p$ ($p=1,2,\dots,n$) und $X-Y\neq 0$, so ist $\overline{X-Y}\supset\overline{B}_p-B_p$;*

(ε) *$\mathsf{M}=[\boldsymbol{W},A,\twoheadrightarrow,\curlyvee,\curlywedge,\sim]$ ist eine Matrix;*

(ζ) *für $p=1,2,\dots,n$ ist $\mathsf{M}_p=[\boldsymbol{S}_p,B_p,\underset{B_p}{\rightarrow},\vee,\wedge,\underset{B_p}{\sim}]$ eine zu M isomorphe Matrix;*

(η) *$\boldsymbol{S}$ ist das System der Mengen $X=X_1+\dots+X_n$, wo $X_1\in\boldsymbol{S}_1,\dots,X_n\in\boldsymbol{S}_n$, und $\mathsf{P}=[\boldsymbol{S},B,\underset{B}{\rightarrow},\vee,\wedge,\underset{B}{\sim}]$.*

Behauptungen:

(i) *$\boldsymbol{S}$ ist ein System von offenen Mengen $X\subset B$;*

(ii) *ist $X,Y\in\boldsymbol{S}$ und $X-Y\neq 0$, so ist $\overline{X-Y}\supset\overline{B}-B$;*

(iii) *P ist eine zu M^n isomorphe Matrix.*

Beweis. Aus (β), (γ) und (η) ergibt sich leicht die Behauptung (i):

(1) *$\boldsymbol{S}$ ist ein System von offenen Mengen $X\subset A$,*

da auf Grund von 3.1 und 3.3 jede Summe offener Mengen selbst offen ist.

Um (ii) zu beweisen, betrachten wir zwei beliebige Mengen $X,Y\in\boldsymbol{S}$, für die $X-Y\neq 0$. Nach (η) ist $X=X_1+\dots+X_n$ und $Y=Y_1+\dots+Y_n$, wo $X_p,Y_p\in\boldsymbol{S}_p$ für $p=1,2,\dots,n$. Da wegen (γ) und (β) $X_p\subset B_p$, $Y_p\subset B_p$ und die Mengen $B_1,\dots,B_n$ paarweise fremd sind, so hat man offenbar

$$X-Y=(X_1+\dots+X_n)-(Y_1+\dots+Y_n)=(X_1-Y_1)+\dots+(X_n-Y_n);$$

ist also $X-Y\neq 0$, so muß es ein p, $1\leqslant p\leqslant n$, geben, für welches $X_p-Y_p\neq 0$. Hienach, mit Rücksicht auf (δ), $\overline{X_p-Y_p}\supset\overline{B}_p-B_p$ und umsomehr $\overline{X-Y}\supset\overline{B}_p-B_p$, da auf Grund von ($\alpha$) und 3.1 (iii):

$$\overline{X-Y}=\overline{X_1-Y_1}+\dots+\overline{X_n-Y_n}.$$

Nach (β) ist aber $\overline{B}_p-B_p\supset(\overline{B}-B)-B_p=\overline{B}-(B+B_p)=\overline{B}-B$, so daß schließlich $\overline{X-Y}\supset\overline{B}-B$. Es gilt also:

(2) *ist $X,Y\in\boldsymbol{S}$ und $X-Y\neq 0$, so $\overline{X-Y}\supset\overline{B}-B$.*

Wir gehen nun zu (iii) über und konstruieren im Einklang mit 2.15 (und mit Rücksicht auf 2.16 und (ε)) die Matrix $\mathsf{M}^n=[\boldsymbol{W}^n,A^n,\twoheadrightarrow^n,\curlyvee^n,\curlywedge^n,\sim^n]$. Da nach ($\zeta$) (und 2.4) M zu $\mathsf{M}_1,\dots,\mathsf{M}_n$ isomorph ist, so gibt es laut 2.3 Funktionen $F_1,\dots,F_n$, die diese Isomorphie herstellen und die insbesondere $\boldsymbol{W}$ auf $\boldsymbol{S}_1,\dots,\boldsymbol{S}_n$ eineindeutig abbilden. Wir setzen nun:

(3) $F(U)=F_1(U_1)+\dots+F_n(U_n)$ *für* $U=[U_1,\dots,U_n]\in\boldsymbol{W}^n$.

Da hier $F_p(U_p)\in\boldsymbol{S}_p$ ($p=1,2,\dots,n$), folglich wegen (iii) $F_p(U_p)\subset B_p$ und die Mengen $B_1,\dots,B_n$ paarweise fremd sind, so gilt mit Rücksicht auf (η):

(4) *durch die Funktion F wird $\boldsymbol{W}^n$ auf $\boldsymbol{S}$ eineindeutig abgebildet.*

Mit Hilfe von 2.3, 2.15 und (β) gewinnt man:

(5) $F(A^n)=F_1(A)+\dots+F_n(A)=B_1+\dots+B_n=B$.

Es sei ferner

(6) $U=[U_1,\dots,U_n]\in\boldsymbol{W}^n$ *und* $V=[V_1,\dots,V_n]\in\boldsymbol{W}^n$.

Nach 2.15, (6), (3), 2.3, (ζ) und 4.15 (i) hat man

(7) $F(U \twoheadrightarrow^n V) = F([U_1 \twoheadrightarrow V_1, \ldots, U_n \twoheadrightarrow V_n]) = F_1(U_1 \twoheadrightarrow V_1) + \ldots + F_n(U_n \twoheadrightarrow V_n) = (F_1(U_1) \underset{B_1}{\rightarrow} F_1(V_1)) + \ldots + (F_n(U_n) \underset{B_n}{\rightarrow} F_n(V_n)) = (B_1 - \overline{F_1(U_1) - F_1(V_1)}) + \ldots + (B_n - \overline{F_n(U_n) - F_n(V_n)})$.

Für $p, q = 1, \ldots, n$ und $p \neq q$ ist $F_p(U_p) \epsilon \boldsymbol{S}_p$, $F_q(V_q) \epsilon \boldsymbol{S}_q$, also nach (iii) und (ii): $F_p(U_p) \subset B_p$, $F_q(V_q) \subset B_q$, $F_p(U_p) \cdot B_q = F_p(U_p) \cdot F_q(V_q) = 0$; da hiebei $B_q \epsilon \boldsymbol{O}(R)$, so ist auch $\overline{F_p(U_p) - F_p(V_p)} \cdot B_q = 0$. Mit Rücksicht darauf erhält man aus (7) und 3.1 (iii):

(8) $F(U \twoheadrightarrow^n V) = (B_1 + \ldots + B_n) - (\overline{F_1(U_1) - F_1(V_1)} + \ldots + \overline{F_n(U_n) - F_n(V_n)}) = B - \overline{(F_1(U_1) - F_1(V_1)) + \ldots + (F_n(U_n) - F_n(V_n))} = B - \overline{(F_1(U_1) + \ldots + F_n(U_n)) - (F_1(V_1) + \ldots + F_n(V_n))}$;

die Formeln (3), (6) und (8) ergeben auf Grund von 4.15 (i):

(9) $F(U \twoheadrightarrow^n V) = B - \overline{F(U) - F(V)} = F(U) \underset{B}{\rightarrow} F(V)$ *für beliebige* $U, V \epsilon \boldsymbol{W}^n$.

In ganz analoger (aber einfacherer) Weise gewinnt man die Formeln:

(10) $F(U \dot{\vee}^n V) = F(U) \vee F(V)$ *und* $F(U \dot{\wedge}^n V) = F(U) \wedge F(V)$ *für* $U, V \epsilon \boldsymbol{W}^n$;

(11) $F(\sim^n U) = \underset{B}{\sim} F(U)$ *für* $U \epsilon \boldsymbol{W}^n$.

Aus (4), (5), (9)–(11) schließt man mit Hilfe von 2.1, 2.15 und 2.16, daß $B \epsilon \boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{S}$ in Bezug auf $\underset{B}{\rightarrow}, \vee, \wedge, \underset{B}{\sim}$ abgeschlossen ist; mit Rücksicht auf (η), (1) und 4.17 (ii) ist also P eine Matrix. Man ersieht ferner — wiederum aus (4), (5), (9), (10), (11) —, daß die Matrizen P und M^n den Bedingungen der Definition 2.3 genügen; man hat folglich:

(12) P ist *ist eine zu* M^n *isomorphe Matrix.*

Nach (1), (11) und (12) sind die Behauptungen des betrachteten Hilfssatzes erfüllt.

Hilfssatz 4.22. Voraussetzungen:

(α) *R ist ein E-Raum;*

(β) *M ist eine Matrix;*

(γ) *zu jeder nicht-leeren Menge $B \epsilon \boldsymbol{O}(R)$ gibt es ein System $\boldsymbol{S}$ von offenen Mengen $X \subset A$ mit folgenden Eigenschaften:*

(γ_1) *ist $X, Y \epsilon \boldsymbol{S}$ und $X - Y \neq 0$, so ist $\overline{X - Y} \supset \bar{B} - B$;*

(γ_2) $\mathsf{M}' = [\boldsymbol{S}, B, \underset{B}{\rightarrow}, \vee, \wedge, \underset{B}{\sim}]$ *ist eine zu* M *isomorphe Matrix.*

Behauptung: zu jeder natürlichen Zahl n und jeder nicht-leeren Menge $A \epsilon \boldsymbol{O}(R)$ gibt es ein System $\boldsymbol{T}$ von offenen Mengen $X \subset A$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) *ist $X, Y \epsilon \boldsymbol{T}$ und $X - Y \neq 0$, so ist $\overline{X - Y} \supset \bar{A} - A$;*

(ii) $\mathsf{N} = [\boldsymbol{T}, A, \underset{B}{\rightarrow}, \vee, \wedge, \underset{B}{\sim}]$ *ist eine zu* $(\mathsf{M}^n)^*$ *isomorphe Matrix.*

Beweis. Es sei n eine natürliche Zahl und A eine nicht-leere offene Menge. Laut 3.9 und wegen (α) gibt es dann Mengen $B_1, \ldots, B_n$, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) *$B_1, \ldots, B_n$ sind nicht-leere paarweise fremde offene Mengen;*

(2) *$B_1 + \ldots + B_n = B \subset A$ und $B \neq A$;*

(3) $\overline{A - B} \supset \bar{A} - A$;

(4) $\bar{B}_1 \ldots \bar{B}_n \supset A - B$.

Aus (2)–(4) gewinnt man leicht

(5) $\bar{B}_1 \ldots \bar{B}_n \supset (\bar{A} - A) + (A - B) = \bar{A} - B \supset \bar{B} - B$.

Gemäß (β) und (γ) gibt es Mengensysteme $\boldsymbol{S}_1, \ldots, \boldsymbol{S}_n$ von folgender Beschaffenheit:

(6) *für $p = 1, 2, \ldots, n$ ist $\boldsymbol{S}_p$ ein System von offenen Mengen $X \subset B_p$;*

(7) *ist $X, Y \epsilon \boldsymbol{S}_p$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ und $X - Y \neq 0$, so ist $\overline{X - Y} \supset \bar{B}_p - B_p$;*

(8) *für $p = 1, 2, \ldots, n$ ist* $\mathsf{M}_p = [\boldsymbol{S}_p, B_p, \underset{B_p}{\rightarrow}, \vee, \wedge, \underset{B_p}{\sim}]$ *eine zu* M *isomorphe Matrix.*

Wir setzen nun:

(9) $\boldsymbol{S} = \{$*System der Mengen* $X = X_1 + \ldots + X_n$, *wo* $X_1 \epsilon \boldsymbol{S}_1, \ldots, X_n \epsilon \boldsymbol{S}_n\}$;
$\mathsf{P} = [\boldsymbol{S}, B, \underset{B}{\rightarrow}, \vee, \wedge, \underset{B}{\sim}]$.

Nach (α), (β), (1), (2) und (5)–(9) sind die Voraussetzungen von 4.21 erfüllt. Es gilt demnach:

(10) $\boldsymbol{S}$ *ist ein System von offenen Mengen* $X\subset A$*:*
(11) *ist* $X,Y\,\epsilon\,\boldsymbol{S}$ *und* $X-Y\neq 0$*, so ist* $\overline{X-Y}\supset\overline{B}-B$*;*
(12) P *ist eine zu* M^n *isomorphe Matrix.*

Es sei

(13) $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}+\{A\}$ *und* $\mathsf{N}=[\boldsymbol{T},A,\underset{A}{\rightarrow},\vee,\wedge,\underset{A}{\sim}]$.

Nach (α), (1)–(4) und (9)–(13) gelten die Voraussetzungen von 4.20. Man hat folglich:

(14) $\boldsymbol{T}$ *ist ein System von offenen Mengen* $X\subset A$*;*
(15) *ist* $X,Y\,\epsilon\,\boldsymbol{T}$ *und* $X-Y\neq 0$*, so ist* $\overline{X-Y}\supset\overline{A}-A$*;*
(16) N *ist eine Matrix und* $\mathsf{N}=\mathsf{P}^*$.

Aus (12) und (16) ergibt sich auf Grund von 2.14:

(17) N *ist eine zu* $(\mathsf{M}^n)^*$ *isomorphe Matrix.*

Mit Rücksicht auf (14), (15) und (17) ist Hilfssatz 4.22 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 4.23. Ist R ein E-Raum, so enthält die Matrix $\mathbf{O}(R)$ für jede natürliche Zahl n eine zu IK_n isomorphe Submatrix.

Beweis. Wir wollen mit Hilfe eines Induktionsverfahrens eine logisch schärfere Behauptung begründen, und zwar:

(1) *zu jeder nicht-leeren Menge $A\,\epsilon\,\mathbf{O}(R)$ gibt es ein System $\boldsymbol{T}$ von offenen Mengen $X\subset A$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *ist* $X,Y\,\epsilon\,\boldsymbol{T}$ *und* $X-Y\neq 0$*, so ist* $\overline{X-Y}\supset\overline{A}-A$*;*

(ii) $\mathsf{N}=[\boldsymbol{T},A,\underset{A}{\rightarrow},\vee,\wedge,\underset{A}{\sim}]$ *ist eine zu* IK_n *isomorphe Matrix.*

Nach 2.17 und 4.19 gilt in der Tat (1) für $n=1$. Vorausgesetzt, daß (1) für irgend ein natürliches n erfüllt ist, wenden wir 4.23 an $(\mathsf{M}=\mathsf{IK}_n)$ und ersehen leicht mit Hilfe von 2.17, daß (1) auch für $n+1$ gilt.

Setzt man nun in (1) $A=R$, so gewinnt man sofort auf Grund von 2.8, 3.1, 3.2, 4.5 und 4.18 die Behauptung des Hilfssatzes.

Satz 4.24. Ist R ein E-Raum, so ist $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))=\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$.

Beweis. Nach 4.23 gibt es für jedes natürliche n eine zu IK_n isomorphe Submatrix N_n. Ist nun $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$, so hat man nach 2.9 und 2.7: $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\mathfrak{E}(\mathsf{N}_n)=\mathfrak{E}(\mathsf{IK}_n)$ für $n=1,2,\ldots$ und folglich nach 2.18: $\mathfrak{A}\,\epsilon\,\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$. Demnach ist $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))\subset\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$; mit Rücksicht auf 4.9 erhält man hieraus sofort: $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))=\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$, w. z. b. w.

Bemerkung 4.25. Man kann leicht folgenden Satz aufstellen:

Es sei R ein topologischer Raum, A eine nicht-leere offene Menge $\subset R$, $\boldsymbol{T}$ das System der offenen Mengen $X\subset A$ und $\mathsf{N}=[\boldsymbol{T},A,\underset{A}{\rightarrow},\vee,\wedge,\underset{A}{\sim}]$. Dann ist N eine Matrix und es gilt $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))\subset\mathfrak{E}(\mathsf{N})$; ist insbesondere $\mathfrak{E}(\mathsf{N})=\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$, so ist auch $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))=\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$.

Hieraus ersieht man, daß sich Satz 4.24 nicht umkehren läßt: die Formel $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))=\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$ gilt z. B. für alle normalen Räume mit abzählbarer Basis, die eine nicht-leere offene insichdichte Menge umfassen, und allgemeiner für jeden Raum R, der einen offenen E-Teilraum enthält (vgl. 3.2), unabhängig davon, ob R selbst ein E-Raum ist.

Anderseits gibt es auch solche Räume R, deren Matrix $\mathbf{O}(R)$ weder für das Aussagensystem $\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$ noch für $\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$, sondern für ein „Zwischensystem" adäquat ist; Beispiele hiefür kann man sowohl unter normalen Räumen mit abzählbarer Basis finden als auch unter solchen, die keine abzählbare Basis haben. Es sind z. B. insichdichte normale Räume bekannt, die folgender Bedingung genügen:

$$\textit{ist}\quad X\,\epsilon\,\mathbf{O}(R),\quad \textit{so ist auch}\quad \overline{X}\,\epsilon\,\mathbf{O}(R).$$

Nach 4.14 ist für jeden solchen Raum R das System $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$ von $\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$ verschieden; dabei enthält aber dieses System, wie leicht zu zeigen, alle Aussagen $\mathfrak{A}$ von der Form: $\mathfrak{A}=\sim\mathfrak{B}\vee\sim\sim\mathfrak{B}$ und kann sich demzufolge nicht mit $\mathfrak{Z}\mathfrak{R}$ decken (vgl. 1.5). — Das Problem, eine genaue Zuordnung zwischen den topologischen Eigenschaften eines Raumes R und den logischen (oder eher metalogischen) Eigenschaften des entsprechenden Aussagensystems $\mathfrak{E}(\mathbf{O}(R))$ herzustellen, ist noch keineswegs in erschöpfender Weise gelöst.

Wir wollen noch einige der gewonnen Ergebnisse in eine anschaulichere und durchsichtigere Gestalt kleiden.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine Aussagefunktion des Aussagenkalküls, in der neben den Konstanten „$\rightarrow$", „$\vee$" usw. die Aussagevariablen „X", „Y", „Z"... vorkommen; wir geben dem Ausdruck $\mathfrak{A}$ folgende schematische Form:

$$\mathfrak{A}=„\varphi(X,Y,Z,\ldots)“.$$

Nehmen wir nun an, daß die Variablen „X", „Y", „Z" ... nicht Aussagen vertreten, sondern Punktmengen eines topologischen Raumes R bezeichnen; den Konstanten „$\rightarrow$", „$\vee$" usw. schreiben wir den in 4.1 erklärten Sinn zu. Bei dieser Deutung ist $\mathfrak{A}$ keine Aussagefunktion mehr, sondern eine Bezeichnungsfunktion, die (genau so wie „X", „Y",...) eine Menge des Raumes R bezeichnet. Mit Rücksicht hierauf können wir folgende Aussagen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ bilden:

$\mathfrak{A}_1 =$ „*Für beliebige offene Mengen* $X, Y, Z, \ldots$ *des Raumes* R *ist die Menge* $\varphi(X, Y, Z, \ldots)$ *in* R *dicht*".

$\mathfrak{A}_2 =$ „*Für beliebige offene Mengen* $X, Y, Z, \ldots$ *des Raumes* R *ist* $\varphi(X, Y, Z, \ldots) = R$".

[Genau genommen sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ keine Aussagen, sondern Aussagefunktionen, da in ihnen freie Variablen vorkommen, z. B. „R"].

Betrachten wir nun zwei Wendungen: „$\mathfrak{A}_1$ *gilt* (bzw. *ist erfüllt*) *im Raum* R" und „$\mathfrak{A}_2$ *gilt* (bzw. *ist erfüllt*) *im Raum* R". Der inhaltliche Sinn dieser Wendungen scheint völlig klar zu sein. Nichtsdestoweniger stößt man an gewisse Schwierigkeiten, wenn man ihren Sinn in einer streng formalen Weise zu präzisieren versucht [16]. Am einfachsten ist es, in Anknüpfung an 2.5 die zweite Wendung als gleichbedeutend mit dem Ausdruck: „$\mathfrak{A}$ *erfüllt die Matrix* $\mathbf{O}(R)$" zu erklären. Um eine Definition für die erstere Wendung zu bilden, bemerken wir, daß die Aussage $\mathfrak{A}_1$ wegen 4.4 folgende äquivalente Umformung zuläßt:

„*Für beliebige offene Mengen* $X, Y, Z, \ldots$ *des Raumes* R *ist* $\sim\sim\varphi(X, Y, Z, \ldots) = R$".

Mit Rücksicht darauf können wir sagen, daß der Ausdruck „$\mathfrak{A}_1$ *gilt im Raum* R" soviel bedeutet wie „$\sim\sim\mathfrak{A}$ *erfüllt die Matrix* $\mathbf{O}(R)$".

Auf Grund dieser Vereinbarungen gewinnt man aus 4.12 und 4.11, 4.24 folgende Formulierungen:

Erster Hauptsatz. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine Aussage des Aussagenkalküls und* R *ein beliebiger topologischer Raum. Folgende Bedingungen sind dann äquivalent:*

(i) $\mathfrak{A}$ *ist im zweiwertigen Kalkül beweisbar;*

(ii) $\mathfrak{A}_1$ *gilt im Raum* R*;*

(iii) $\mathfrak{A}_1$ *gilt in jedem topologischen Raum.*

Zweiter Hauptsatz. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine Aussage des Aussagenkalküls und* R *ein beliebiger* E*-Raum. Folgende Bedingungen sind dann äquivalent:*

(i) $\mathfrak{A}$ *ist im intuitionistischen Kalkül beweisbar;*

(ii) $\mathfrak{A}_2$ *gilt im Raum* R*;*

(iii) $\mathfrak{A}_2$ *gilt in jedem topologischen Raum.*

In eine analoge Form können auch Sätze 4.8 und 4.14 gebracht werden.

Im Zusammenhang mit dem zweiten Hauptsatz lohnt es sich daran zu errinnern, daß zu den E-Räumen insbesondere alle euklidischen Räume gehören (vgl. 3.11).

Auf Grund der zuletzt angegeben Sätze können nun die Entscheidbarkeitskriteria, von denen in § 2 die Rede war (vgl. 2.19), auf topologische Aussagen von der Form $\mathfrak{A}_1$ oder $\mathfrak{A}_2$ (und sogar auf eine etwas umfassendere Klasse von topologischen Aussagen) angewendet werden: man ist imstande, in jedem einzelnen Fall zu entscheiden, ob eine Aussage von dieser Form in der Topologie allgemeingültig ist oder nicht.

Zum Schluß sei bemerkt, daß der Aussagenkalkül auf verschiedene Weisen in der Topologie gedeutet werden kann: die oben betrachtete Deutung ist offenbar nicht die einzig mögliche. Wenn es sich z. B. um den zweiwertigen Kalkül handelt, so ergibt sich eine ganz triviale, und zwar eine allgemein-mengentheoretische (nicht speziell topologische) Deutung aus 4.14: jede Menge R kann man ja zu einem isolierten topologischen Raum dadurch machen, daß man $\overline{X} = X$ für jedes $X \subset R$ setzt (vgl. 3.6). Eine weniger triviale Deutung dieses Kalküls wird in folgender Weise gewonnen. Wir betrachten die sog. offenenen Gebiete X eines topologischen Raumes R, d. h. Mengen $X \subset R$, für die $X = R - \overline{R - \overline{X}}$; $\boldsymbol{O}'(R)$ sei das System dieser Mengen. Wir definieren für die Mengen $X, Y \in \boldsymbol{O}'(R)$ die Operationen $\rightarrow$, $\wedge$ und $\sim$ genau wie in 4.1, wir setzen aber: $X \vee' Y = R - \overline{R - \overline{X} - \overline{Y}}$ ($X \vee' Y$ ist also das kleinste offene Gebiet, das X und Y umfaßt). Man kann dann zeigen, daß die Matrix $\mathbf{O}'(R) = [\boldsymbol{O}'(R), R, \rightarrow, \vee', \wedge, \sim]$ für das System $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ adäquat ist [17]. Mit Rücksicht darauf ordnen wir der Aussage

$$\mathfrak{A} = „\varphi(X, Y, Z, \ldots)"$$

folgende Aussage zu:

$\mathfrak{A}'_1 =$ „*Für beliebige offene Gebiete* $X, Y, Z, \ldots$ *des Raumes* R *ist* $\varphi'(X, Y, Z, \ldots) = R$",

wobei „$\varphi'(X, Y, Z, \ldots)$" aus „$\varphi(X, Y, Z, \ldots)$" durch Einsetzung des Zeichens „$\vee'$" an Stelle von „$\vee$" gewonnen wird; es stellt sich nun heraus, daß der erste Hauptsatz gültig bleibt, wenn man in ihm „$\mathfrak{A}_1$" durch „$\mathfrak{A}'_1$" ersetzt.

§ 5. Deutung des Aussagenkalküls in der Booleschen Algebra und in verwandten mathematischen Theorien[18]. Die (verallgemeinerte) Boolesche Algebra wird hier als ein Teil der abstrakten Algebra, nämlich als die Theorie der sog. Booleschen Ringe gefaßt:

Definition 5.1. Eine Menge R von mindestens zwei Elementen wird als ein Boolescher Ring (mit den Grundoperationen $+$ und $\cdot$) bezeichnet, wenn für beliebige Elemente $x,y,z \in R$ folgende Formeln gelten:

(i) $x+y,\ x\cdot y \in R$,

(ii) $x+y=y+x$,

(iii) $x+(y+z)=(x+y)+z$,

(iv) $x=y+(x+y)$,

(v) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$,

(vi) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$.

Bemerkung 5.2. Man ersieht hieraus, daß ein Ring R (im Sinne der abstrakten Algebra) dann und nur dann ein Boolescher Ring ist, wenn $x+y=x-y$ für beliebige $x,y\in R$. Diese Bedingung ist folgender Forderung äquivalent: $x\cdot x=x$ für jedes $x\in R$. Jeder Boolesche Ring ist bekanntlich kommutativ.

Definition 5.3. Es sei R ein Boolescher Ring.

(i) *Wir wollen sagen, daß x durch y teilbar ist, oder auch, daß y Teiler von x ist, in Zeichen: $x\subset y$, wenn $x,y\in R$ und wenn es ein $z\in R$ gibt, für welches $x=y\cdot z$.*

(ii) *Mit 0 bezeichnen wir dasjenige Element $x\in R$, welches durch jedes $y\in R$ teilbar ist.*

Man kann die beiden Symbole „$\subset$“ und „0“ noch auf verschiedene andere (äquivalente) Weisen definieren.

Definition 5.4. Der Boolesche Ring R heißt atomistisch, bzw. atomfrei, wenn es für jedes von 0 verschiedenes Element $y\in R$ endlich, bzw. unendlich, viele Elemente x gibt, die durch y teilbar sind.

Bemerkung 5.5. Als Atom eines Booleschen Ringes R wird jedes Element y von R bezeichnet, für das es genau zwei Elemente x gibt, die durch y teilbar sind (und zwar $x=0$ und $x=y$). Ein Ring R ist dann und nur dann atomistisch, wenn jedes Element $y\neq 0$ von R als eine Summe von endlich vielen Atomen dargestellt werden kann[19]; R ist dann und nur dann atomfrei, wenn es keine Atome in R gibt.

Definition 5.6. Ist R ein Boolescher Ring, so wird eine nicht-leere Menge $I\subset R$ Ideal (in R) genannt, in Zeichen $I\in\boldsymbol{I}(R)$, wenn I mit zwei beliebigen Elementen x und y zugleich ihre Summe $x+y$ und mit jedem Element y zugleich jedes $x\subset y$ als Element enthält.

Definition 5.7. Ist R ein Boolescher Ring, so setzen wir für beliebige $I,J\in\boldsymbol{I}(R)$:

(i) $I\to J \;=\; \sum\limits_{X\in\boldsymbol{I}(R),\ I\cdot X\subset J} X;$

(ii) $I\vee J \;=\; \prod\limits_{X\in\boldsymbol{I}(R),\ I+J\subset X} X;$

(iii) $I\wedge J=I\cdot J$ *(der übliche mengentheoretische Durchschnitt);*

(iv) $\sim I=I\to\{0\}\ \Big(=\sum\limits_{X\in\boldsymbol{I}(R),\ I\cdot X=\{0\}} X\Big).$

Aus 5.1, 5.6 und 5.7 ergibt sich leicht

Korollar 5.8. Für jeden Booleschen Ring R gilt:

(i) *$\{0\},R\in\boldsymbol{I}(R)$, und zwar ist $\{0\}$ das kleinste und R das größte Ideal in R;*

(ii) *ist $I,J\in\boldsymbol{I}(R)$, so sind auch $I\to J$, $I\vee J$, $I\wedge J$, $\sim I$ Ideale in R, und zwar ist $I\to J$, bzw. $\sim I$, das größte Ideal X, für das $I\cdot X\subset J$, bzw. $I\cdot X=\{0\}$, ferner ist $I\vee J$ das kleinste Ideal, das I und J umfaßt, schließlich ist $I\wedge J$ das größte Ideal, das in I und J enthalten ist.*

Definition 5.9. Das geordnete Sextupel $[\boldsymbol{I}(R),R,\to,\vee,\wedge,\sim]$, wobei R ein Boolescher Ring ist, wird mit $\mathsf{I}(R)$ bezeichnet.

Durch folgenden bekannten Satz wird der enge formale Zusammenhang zwischen der Booleschen Algebra und der Topologie klargestellt[18]:

Satz 5.10. Jedem Booleschen Ring R kann ein normaler topologischer Raum $R^{\times}$ zugeordnet werden, der folgende Bedingungen erfüllt:

(i) *es gibt eine Funktion F, die des System $\boldsymbol{I}(R)$ auf das System $\boldsymbol{O}(R^{\times})$ in der Weise abbildet, daß die Formeln: $I \subset J$ und $F(I) \subset F(J)$ für beliebige $I, J \in \boldsymbol{I}(R)$ äquivalent sind (und daß insbesondere $F(\{0\}) = 0$ und $F(R) = R^{\times}$):*

(ii) *$R^{\times}$ ist dann und nur dann isoliert, wenn R atomistisch ist;*

(iii) *$R^{\times}$ ist dann und nur dann insichdicht, wenn R atomfrei ist;*

(iv) *$R^{\times}$ ist dann und nur dann ein Raum mit abzählbarer Basis, wenn R abzählbar ist.*

Satz 5.11. Für jeden Booleschen Ring R ist $\mathsf{I}(R)$ eine Matrix; ist $R^{\times}$ der dem Ring R gemäß 5.10 zugeordnete topologische Raum, so sind die Matrizen $\mathsf{I}(R)$ und $\mathsf{O}(R^{\times})$ isomorph.

Beweis. Man zeigt zunächst auf Grund von 4.2 und 5.8, daß die Funktion F, die nach 5.10 (i) das System $\boldsymbol{I}(R)$ auf $\boldsymbol{O}(R^{\times})$ eineindeutig abbildet, folgende Formeln erfüllt: $F(I \rightarrow J) = F(I) \rightarrow F(J)$, $F(I \vee J) = F(I) \vee F(J)$, $F(I \wedge J) = F(I) \wedge F(J)$ und $F(\sim I) = \sim F(I)$ für beliebige $I, J \in \boldsymbol{I}(R)$ (wobei die Zeichen „$\rightarrow$", „$\vee$" usw. auf der linken Seite jeder Formel im Sinne der Booleschen Algebra und auf der rechten im topologischen Sinne zu deuten sind). Hieraus schließt man leicht mit Hilfe von 2.1, 2.3, 4.5, 4.6 und 5.9, daß $\mathsf{I}(R)$ eine Matrix, und zwar eine zu $\mathsf{O}(R)$ isomorphe Matrix ist, w. z. b. w.

Mit Hilfe der beiden letzten Sätze können alle Ergebnisse von § 4 auf den Boden der Booleschen Algebra übertragen werden:

Satz 5.12. Für jeden Booleschen Ring R gilt $\mathfrak{J}\mathfrak{K} \subset \mathfrak{E}(\mathsf{I}(R)) \subset \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$.
[Nach 2.7, 4.8, 4.11, 5.11]

Satz 5.13. Für jeden Booleschen Ring R und jede Aussage $\mathfrak{A}$ sind die Bedingungen: $\mathfrak{A} \in \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ und $\sim\sim\mathfrak{A} \in \mathfrak{E}(\mathsf{I}(R))$ äquivalent.
[Nach 2.7, 4.12, 5.11 oder 1.6, 5.12]

Satz 5.14. Es sei R ein Boolescher Ring. Damit $\mathfrak{E}(\mathsf{I}(R)) = \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß R atomistisch ist.
[Nach 2.7, 4.14, 5.10 (ii), 5.11]

Satz 5.15. Ist R ein atomfreier abzählbarer Boolescher Ring, so ist $\mathfrak{E}(\mathsf{I}(R)) = \mathfrak{J}\mathfrak{K}$. [Nach 2.7, 3.10, 4.24, 5.10 (iii), (iv), 5.11]

Bemerkung 5.16. Auf Satz 5.15 kann mutatis mutandis die Bemerkung 4.25 bezogen werden. Satz 5.15 ist nicht umkehrbar: die Formel $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) = \mathfrak{J}\mathfrak{K}$ gilt z. B. für jeden abzählbaren Booleschen Ring R, der zwar selbst nicht atomfrei ist, aber einen atomfreien Teilring (d. h. einen atomfreien Ring $R_1 \subset R$ mit denselben Grundoperationen wie R) enthält. Anderseits kann man zahlreiche Beispiele von Booleschen Ringen angeben, für die weder $\mathfrak{E}(\mathsf{I}(R)) = \mathfrak{J}\mathfrak{K}$ noch $\mathfrak{E}(\mathsf{I}(R)) = \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ gilt. Zu solchen Ringen gehören insbesondere alle unendlichen absolut-additiven Ringe, d. h. Boolesche Ringe R, die folgender Bedingung genügen:

zu jedem System $X \subset R$ gibt es den größten gemeinsamen Teiler aller Elemente $x \in X$ (d. h. ein Element y, das gemeinsamer Teiler aller $x \in X$ ist und durch jeden anderen gemeinsamen Teiler dieser Elemente teilbar ist).

Für die absolut-additiven Ringe R ist folgende Eigenschaft charakteristisch: es gilt $\sim I \vee \sim\sim I = R$ für jedes $I \in \boldsymbol{I}(R)$; m. a. W. das System $\mathfrak{E}(\mathsf{I}(R))$ enthält alle Aussagen $\mathfrak{A}$ von der Form $\mathfrak{A} = \sim\mathfrak{B} \vee \sim\sim\mathfrak{B}$ und kann deshalb nicht mit $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$ identisch sein (vgl. 1.5). Dabei ist, wie leicht zu zeigen, kein unendlicher absolut-additiver Ring R atomistisch, wonach mit Rücksicht auf 5.14 $\mathfrak{E}(\mathsf{I}(R)) \neq \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$.

Sätze 5.12 – 5.15 können in eine analoge Form gekleidet werden wie die beiden Hauptsätze aus § 4. Man kann also insbesondere jeder Aussage $\mathfrak{A}$ des Aussagenkalküls zwei Aussagen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ der Booleschen Algebra in der Weise zuordnen, daß $\mathfrak{A}$ dann und nur dann im zweiwertigen, bzw. intuitionistischen, Kalkül beweisbar ist, wenn $\mathfrak{A}_1$, bzw. $\mathfrak{A}_2$, für jeden Booleschen Ring gilt; hieraus gewinnt man ein Entscheidbarkeitskriterium für die Aussagen von der Form $\mathfrak{A}_1$ oder $\mathfrak{A}_2$.

Auch die Bemerkungen am Ende von § 4 betreffend andere Deutungsmöglichkeiten des Aussagenkalküls lassen sich auf die Boolesche Algebra anwenden; die offenen Gebiete sind dabei durch die Ideale I zu ersetzen, die der Formel: $\sim\sim\mathsf{I} = \mathsf{I}$ genügen.

Alle diese Ergebnisse gelten offenbar nicht nur für das formale System der Booleschen Algebra, sondern auch für jede Realisierung dieses Systems. Die bekannteste dieser Realisierungen ist wohl die Theorie der Mengenkörper, d. h. der Mengensysteme, die in Bezug auf die Operationen der Addition und der Subtraktion abgeschlossen sind; jeder Mengenkörper, der mindestens zwei Elemente enthält, ist, wie leicht ersichtlich, ein Boolescher Ring mit der sog. symmetrischen Subtraktion: $X \ominus Y = (X - Y) + (Y - X)$ und der üblichen Durchschnittsbildung als Grundoperationen. Die einfachsten Beispiele spezieller Boolescher Ringe, von denen in 5.14–5.16 die Rede war, können gerade aus der Theorie der Mengenkörper geschöpft werden. So bildet z.B. jeder Mengenkörper, der aus allen endlichen Teilmengen einer gegebenen (endlichen oder unendlichen) Menge besteht, ein Beispiel eines atomistischen Ringes. Um einen abzählbaren atomfreien Ring zu gewinnen, betrachtet man die Menge X der positiven rationalen Zahlen $x \leqslant 1$ und bildet den Mengenkörper, der aus allen Summen von endlich vielen Intervallen $\subset X$ besteht (der rechte Endpunkt wird immer zum Intervall gezählt, der linke nicht). Als Beispiele von absolut-additiven Ringen (im Sinne von 5.16) können die Mengenkörper dienen, die aus allen Teilmengen einer gegebenen Menge bestehen.

Eine andere wichtige Realisierung der Booleschen Algebra ist die allgemeine Metamathematik, d. i. die Theorie der deduktiven Systeme.

Man kann schließlich manche der gewonnenen Ergebnisse auf eine allgemeinere Theorie ausdehnen, nämlich auf die Theorie der sog. „lattices“[20]). Es kommen hier nämlich die sog. distributiven „lattices“ mit einer unendlichen Addition S und einer endlichen Multiplikation in Betracht; als Beispiel solch eines „lattice“ kann das System der offenen Mengen eines topologischen Raumes oder das System der Ideale eines Booleschen Ringes dienen. Es sei L eine distributive „lattice“ mit mindestens zwei verschiedenen Elementen; wir setzen:

$$1 = \underset{z \epsilon L}{\mathsf{S}} z, \qquad 0 = \underset{z \epsilon 0}{\mathsf{S}} z \qquad (0 \text{ — die leere Menge}),$$

$$x \vee y = \underset{z \epsilon \{x,y\}}{\mathsf{S}} z, \qquad x \wedge y = x \cdot y, \qquad x \rightarrow y = \underset{(x \wedge z) \vee y = y}{\mathsf{S}} z, \qquad \sim x = x \rightarrow 0$$

für beliebige $x, y \epsilon L$. Es stellt sich nun heraus, daß $\mathbf{M}(L) = [L, 1, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim]$ eine Matrix ist und daß Sätze 5.12 und 5.13 gültig bleiben, wenn man in ihnen „$\mathbf{I}(R)$“ durch „$\mathbf{M}(L)$“ ersetzt; auch Sätze 5.14 und 5.15 lassen sich auf die Theorie der „lattices“ übertragen. Somit wird eine Deutung des zweiwertigen und des intuitionistischen Kalküls in der Theorie der „lattices“ gewonnen.

Anmerkungen.

[1]) Über die vorliegende Arbeit habe ich am 30. IX. 1937 auf dem III. Polnischen Mathematischen Kongress berichtet; vgl. Ann. Soc. Pol. Math. **16** (1937), S. 192. Die Ergebnisse stammen größtenteils aus dem Jahre 1935. Der Zusammenhang zwischen dem intuitionistischen Kalkül und der Booleschen Algebra (bzw. der Theorie der deduktiven Systeme, s. § 5) wurde aber von mir noch früher, nämlich 1931, entdeckt; einige diesbezügliche Bemerkungen sind in meinen Aufsätzen in Fund. Math. **25** (1935), S. 514, und Ann. Soc. Pol. Math. **15** (1936), S. 187, zu finden. — Erst nach Fertigstellung dieser Arbeit habe ich die neulich erschienene Arbeit von M. H. Stone in Časopis Mat. Fys. 67 (1937), S. 1 ff. kennen gelernt. Trotz einer völlig verschiedenen Auffassung der Brouwerschen Logik besteht sicherlich ein gewisser Zusammenhang zwischen einzelnen Ergebnissen der beiden Arbeiten, wie man aus einem Vergleich von Stones Theorem 7, S. 22, und meinem Satz 4.11 leicht ersehen kann: ihren mathematischen Gehalte nach sind diese zwei Sätze nahe verwandt. Das betrifft aber keineswegs die beiden Arbeiten in ihrer Gesamtheit; insbesondere liegt Satz 4.24, in dem ich den Schwerpunkt meiner Arbeit erblicke, auf einer ganz anderen Linie als die Stoneschen Betrachtungen.

[2]) Für die wertvolle Hilfe bei der Fertigstellung dieser Arbeit bin ich Herrn A. Mostowski zu Dank verpflichtet.

[3]) Im Prinzip gebrauchen wir somit die Zeichen „$\rightarrow$“, „$\vee$“, „$\wedge$“ und „$\sim$“ in zwei Bedeutungen: in der logischen und der metalogischen; praktisch kommt nur die zweite in Betracht. In §§ 4 und 5 wird übrigens den genannten Zeichen noch ein ganz anderer Sinn zugeschrieben.

[4]) Vgl. ähnliche Axiomensysteme: für den zweiwertigen Kalkül bei D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Berlin 1934, S. 60 ff., und für den intuitionistischen Kalkül bei G. Gentzen, Math. Zeitschr. **39** (1934), S. 419. Zum ersten Mal wurde ein Axiomensystem für den intuitionistischen Kalkül von A. Heyting, S. B. Preuß. Ak. Wiss. 1930, S. 45 ff., aufgestellt. Auf das Problem der gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome (oder, genauer, Axiomenschemata) von 1.2 wird hier nicht eingegangen.

[5]) Die sog. Operation der Einsetzung braucht in 1.4 nicht berücksichtigt werden, da bereits das in 1.2 definierte Axiomensystem in Bezug auf diese Operation abgeschlossen ist.

[6]) Der erste Teil von Satz 1.5 ergibt sich leicht aus 1.2—1.4 (es genügt zu zeigen, daß jede Aussage $\mathfrak{A}$ von der Form 1.2 (xi) zu $\mathfrak{IR}$ gehört); zum zweiten Teil vgl. A. Heyting, op. cit., S. 56. Satz 1.6 wurde von T. Glivenko in Bull. Acad. Sc. Belg. 1929, S. 183 ff., angegeben.

[7]) Vgl. hiezu meine Arbeiten in Monatsh. Math. Phys. **40** (1933), S. 100, und Stud. Phil. **1** (1936), S. 289.

[8]) Vgl. J. Łukasiewicz und A. Tarski, C. R. Soc. Sc. Vars. **23** (1930), S. 33 f. Der Begriff der Matrix wird dort etwas weiter gefaßt als hier, da auch Matrizen mit mehr als einem ausgezeichneten Element betrachtet werden (vgl. 2.1, 2.2).

9) Beim Formulieren von 2.5 könnte man auch mit Funktionen von endlich vielen Variablen auskommen; das würde aber für die weiteren Überlegungen gewisse technische Schwierigkeiten verursachen. Eine andere, aber äquivalente Definition der Menge $\mathfrak{C}(\mathsf{M})$ wurde in Łukasiewicz-Tarski, l. cit., angegeben.

10) 2.11 ergibt sich leicht aus dem bekannten Satz, nach dem das System $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ vollständig ist. Der erste Vollständigkeitsbeweis für $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ stammt bekanntlich von E. Post, Am. Journ. Math. **43** (1921), S. 180 ff.

11) Vgl. K. Gödel, Erg. math. Koll. **4** (1933), S. 40.

12) Dieses Ergebnis stammt von S. Jaśkowski; vgl. seinen Aufsatz in Act. Congr. Phil. Scient., Actualités Scient. Ind. **393**, Paris 1936, S. 58 ff. (unsere Darstellung weicht nur in unwesentlichen Einzelheiten von der Jaśkowskischen ab: die Operation Γ von Jaśkowski wird durch die in 2.12 definierte Operation * ersetzt, die aber hier dasselbe leistet).

13) Ein anderes Entscheidbarkeitskriterium für den intuitionistischen Kalkül wurde von Gentzen in seiner in Anm. 4 zitierten Arbeit gegeben.

14) Zum folgenden vgl. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Mat. **3**, Warszawa-Lwów 1931, insbesondere S. 15 ff., 38, 40, 82 f., 95 und 101 ff.

15) Ursprünglich hatte ich den Satz für die euklidische Gerade (und ihre insichdichten Teilräume) bewiesen. Den allgemeinen Beweis verdanke ich Herrn S. Eilenberg.

16) Der Begriff der Gültigkeit (bzw. der Erfüllbarkeit) einer Aussage gehört zu der sog. Semantik; zum Problem einer exakten Definition dieses Begriffs vgl. meine Arbeit in Stud. Phil. **1** (1936), insbesondere S. 307 ff. und 318 ff.

17) Das ergibt sich leicht aus Satz 7.23 meines Berichtes in C. R. Soc. Sc. Vars. **30** (1937), S. 178.

18) Zum folgenden vgl. meine Arbeiten in Fund. Math. **24** (1935), S. 177 ff. (Grundlagen der Booleschen Algebra, der Begriff des Atoms, absolut-additive Ringe), Fund. Math. **25** (1935), S. 503 ff. und Ann. Soc. Pol. Math. **15** (1936), S. 186 ff. (die Theorie der deduktiven Systeme, der Idealenkalkül), ferner die umfassenden Arbeiten von M. H. Stone in Trans. Am. Math. Soc. **40** (1936), S. 37 ff. (die Beziehung der Booleschen Algebra zu der allgemeinen abstrakten Algebra und zu der Theorie der Mengenkörper) und in Trans. Am. Math. Soc. **41** (1937), S. 375 ff. (die Beziehung der Booleschen Algebra zu der allgemeinen Topologie).

19) In meinem Artikel in Fund. Math. **24** (1935), S. 177 ff. habe ich das Wort „atomistisch“ in einem weiteren Sinne gebraucht.

20) Vgl. hiezu G. Birkhoff, Proc. Cambr. Phil. Soc. **29** (1933), S. 441 ff.

Remark on weakly convergent cycles

(from a letter to Karol Borsuk).

By

Norman E. Steenrod (Princeton).

In recent papers *) you have introduced and used the notion of a weakly convergent cycle:

A sequence $\{\gamma_i\}$ *of k-dimensional* δ_i*-cycles with integer coefficients* ($\lim \delta_i = 0$) *is weakly convergent if* $\gamma_i \underset{\epsilon_i}{\approx} \gamma_{i+1}$, $\lim \epsilon_i = 0$.

It seems to me to be possible that you could have used throughout the usual notion of convergent cycle. My reason for this belief is based on the following proposition.

1. *If* $\{\gamma_n\}$ *is a weakly convergent cycle in the compact metric space* K, *there is a subsequence* $\{\gamma'_n\}$ *which is convergent.*

The proof divides into several parts.

2. If $H(\epsilon, \delta)$ $(\epsilon > \delta > 0)$ is the group of δ-cycles (of dimension p) of K reduced modulo those which are ϵ-homologous to zero, then $H(\epsilon, \delta)$ has a finite basis.

Choose $\nu > 0$ so that $2\nu + \delta < \epsilon$. Let A be a finite subset of K so that each point of K is within a distance ν of A. Let us agree that each subset of A of diameter $< \epsilon$ constitutes a simplex. Then A is an abstract complex. For each point P of K, choose one of the nearest points of A and denote it by $f(P)$.

*) *Quelques relations entre la situation des ensembles et la retraction dans les espaces euclidiens*, Fund. Math. **29** (1937), and with S. Eilenberg, *Über stetige Abbildungen der Teilmengen euklidischer Räume auf die Kreislinie*, Fund. Math. **26** (1936).