Sur un problème concernant les familles d'ensembles parfaits.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

F étant une famille d'ensembles linéaires parfaits et disjoints, le problème se pose si l'on peut toujours choisir un point dans chacun des ensembles de la famille F de façon que l'ensemble de tous les points choisis soit de mesure nulle?

J'ai démontré dans Mathematica **12** (1936), p. 160–163 que la réponse à ce problème est négative si l'on admet l'hypothèse du continu. Le but de la présente Note est de démontrer le même sans faire appel à cette hypothèse.

Soit φ le plus petit nombre ordinal correspondant à la puissance du continu. D'après le théorème de M. Zermelo, il existe une suite transfinie de type φ_0:

$$x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi), \tag{1}$$

formée de tous les nombres réels de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$. La famille de tous les ensembles G_δ plans de mesure <1 situés dans le carré $K[0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1]$ étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe une suite transfinie

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\omega, \Gamma_{\omega+1}, \ldots, \Gamma_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi) \tag{2}$$

formée de tous ces ensembles.

Nous allons définir par l'induction transfinie une suite transfinie de type φ:

$$a_1, a_2, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots, a_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi) \tag{3}$$

de nombres de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ et une suite transfinie de type φ:

$$P_1, P_2, \ldots, P_\omega, P_{\omega+1}, \ldots, P_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi) \tag{4}$$

d'ensembles plans parfaits.

Soit à ce but α un nombre ordinal donné, $1 \leqslant \alpha < \varphi$, et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres a_ξ où $\xi < \alpha$.

L'ensemble Γ_α étant un G_δ de mesure <1 contenu dans le carré K, il existe $2^{\aleph_0}$ nombres réels a de l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$, tels que la droite $x=a$ rencontre $K-\Gamma_\alpha$ en un ensemble de points indénombrable, donc contenant (en tant qu'un F_σ) un sous-ensemble parfait[1]). Or, l'ensemble de tous les nombres a_ξ, où $\xi<\alpha$, étant de puissance $<2^{\aleph_0}$ (puisque $\alpha<\varphi$), il existe des nombres a de la suite (1) $\neq a_\xi$ pour $\xi<\alpha$ et tels que la droite $x=a$ rencontre l'ensemble $K-\Gamma_\alpha$ en un ensemble de points contenant un sous-ensemble parfait. Nous désignerons par a_α le premier de tels termes de la suite (1).

La suite (3) étant ainsi définie, remarquons que la droite $x=a_\alpha$ rencontre $K-\Gamma_\alpha$ en un ensemble contenant un sous-ensemble parfait. Soit P_α un tel sous-ensemble parfait et Φ la famille de tous les ensembles parfaits P_α pour $\alpha<\varphi$. Les ensembles de la famille Φ sont évidemment disjoints (en tant que situés sur des droites différentes, parallèles à l'axe $0Y$).

Soit maintenant $E=\{p_\alpha\}_{\alpha<\varphi}$ une suite transfinie de type φ de points tels que $p_\alpha \epsilon P_\alpha$ pour $\alpha<\varphi$. Supposons que la mesure superficielle extérieure de l'ensemble E, $\mathrm{mes}_e E$, soit <1. Il existerait donc un ensemble G_δ contenu dans K, contenant E et de mesure superficielle <1. Vu la définition de la suite (2), il existerait donc un indice $\alpha<\varphi$ tel que $E \subset \Gamma_\alpha$. Or, c'est impossible, puisque $p_\alpha \epsilon E$, $p_\alpha \epsilon P_\alpha$ et $P_\alpha \Gamma_\alpha = 0$ (d'après la définition de P_α). On a donc nécessairement $\mathrm{mes}_e E=1$.

Or, l'ensemble E, en tant que contenant au plus un point de chaque droite parallèle à l'axe d'ordonnées, est de mesure superficielle intérieure nulle: il résulte donc de $\mathrm{mes}_e E=1$ que l'ensemble E est non mesurable superficiellement.

Nous avons ainsi démontré (à l'aide du théorème de M. Zermelo) qu'il existe une famille Φ d'ensembles plans parfaits et disjoints, situés dans le carré K, telle que si l'on choisit un point dans chacun des ensembles de la famille Φ, on obtient toujours un ensemble de mesure extérieure $=1$, mais non mesurable superficiellement.

[1]) Cf. Fund. Math. **1**, p. 113, Lemme.

Soit $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ la courbe continue de G. Peano, remplissant le carré K. Cette courbe jouit, comme on sait, de la propriété suivante: si l'on désigne, pour tout ensemble plan $E \subset K$, par $f(E)$ l'ensemble linéaire

$$\underset{t}{\mathrm{E}}\,[(\varphi(t),\psi(t)) \epsilon E,\ 0 \leqslant t \leqslant 1],$$

on a pour tout ensemble $E \subset K$:

$$\mathrm{mes}_i E = \mathrm{mes}_i f(E), \qquad \mathrm{mes}_e E = \mathrm{mes}_e f(E),$$

où $\mathrm{mes}_i E$ et $\mathrm{mes}_e E$ désignent les mesures superficielles de E et $\mathrm{mes}_i f(E)$ et $\mathrm{mes}_e f(E)$ les mesures linéaires de $f(E)$.

Posons maintenant, pour $\alpha<\varphi$, $Q_\alpha = f(P_\alpha)$ et considérons la famille F de tous les ensembles Q_α où $\alpha<\varphi$. Les ensembles de la famille F sont fermés, indénombrables, disjoints, contenus dans l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$, et on voit sans peine que si l'on choisit un point de chacun des ensembles de la famille F, on obtient un ensemble de mesure extérieure $=1$ et intérieure $=0$ (la même propriété subsiste, comme on le voit sans peine, lorsqu'on remplace chaque ensemble de la famille F par son noyau parfait).

Nous ne savons pas définir *effectivement* les familles Φ ni F (puisque, dans ce cas, on saurait aussi définir effectivement un ensemble non mesurable). Or, il est à remarquer que nous savons définir effectivement une famille F_0 d'ensembles linéaires parfaits de mesure positive, telle que si l'on choisit (au moins) un point dans chacun des ensembles de la famille F_0, on obtient un ensemble de mesure extérieure $=1$. Telle est p. ex. la famille de tous les sous-ensembles parfaits de l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$ qui sont de mesure positive.