Remarque sur le problème de l'invariance topologique de la proprieté (*C*).

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Les deux problèmes suivants, P_1 et P_2, ne sont pas résolus jusqu'à présent, même à l'aide de l'hypothèse du continu [1]):

Problème P_1. *La propriété* (C) [2]) *des ensembles linéaires est-elle invariante par rapport aux transformations homéomorphes?*

Problème P_2. *La propriété* (C) *des ensembles linéaires est-elle invariante par rapport aux transformations continues?*

Le but de cette Note est de démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *les problèmes P_1 et P_2 sont équivalents.*

Démonstration. La réponse affirmative au problème P_2 entraînant évidemment celle au problème P_1, il suffit de montrer que la réponse affirmative au problème P_1 entraîne celle au problème P_2.

Supposons donc que la réponse au problème P_1 est affirmative et soit H un ensemble linéaire qui est une image continue d'un ensemble linéaire E jouissant de la propriété (C). Nous pouvons supposer évidemment que les ensembles H et E sont ponctiformes, donc (en tant que linéaires) de dimension 0, puisque la propriété (C) d'un ensemble se conserve quand on lui ajoute un ensemble dénombrable de points ou en supprime un sous-ensemble quelconque.

[1]) Voir Fund. Math. **25**, p. 579, Problème 67.

[2]) On dit qu'un ensemble E possède la propriété (C), lorsqu'il existe pour chaque suite $\{a_n\}$ de nombres positifs une décomposition $E=E_1+E_2+E_2+\dots$ telle que le diamètre de E_n ne dépasse pas a_n pour $n=1,2,\dots$ Pour la littérature du sujet voir Fund. Math. **29**, p. 91.

Or, comme j'ai démontré ailleurs [1]), si l'ensemble linéaire de dimension 0 est l'image continue d'un ensemble linéaire E de dimension 0, il existe une fonction continue $\psi(x)$ de variable réelle, et un ensemble linéaire T homéomorphe à E, satisfaisant à l'équation $\psi(T)=H$. La réponse au problème P_1 étant par hypothèse affirmative et l'ensemble E jouissant de la propriété (C), l'ensemble T en jouit également. Comme l'a démontré M. E. Szpilrajn [2]), la propriété (C) est un invariant des transformations par fonctions continues de variable réelle: l'ensemble $H=\psi(T)$ jouit donc encore de la propriété (C), c. q. f. d.

Les problèmes P_1 et P_2 sont ainsi équivalents.

Quant à mon théorème cité [1]), il est à remarquer qu'il permet d'établir sans peine (à l'aide de l'hypothèse du continu) *l'existence d'un ensemble linéaire jouissant de la propriété* β [3]), *mais ne jouissant pas de la propriété* (C). En effet, comme nous avons démontré avec M. Szpilrajn [4]), chaque ensemble linéaire de puissance $\aleph_1$ est une projection sur l'axe OX d'un ensemble plan jouissant de la propriété β et dont la projection sur l'axe OY est un ensemble linéaire quelconque jouissant de la propriété β. Par conséquent, si l'hypothèse du continu est vraie, il existe un ensemble plan Q jouissant de la propriété β dont la projection sur l'axe OY est un ensemble de dimension 0 et dont la projection H sur l'axe OX est l'ensemble de tous les nombres irrationnels (donc un ensemble ne jouissant pas de la propriété (C)).

Or, l'ensemble Q est homéomorphe à un ensemble linéaire E de dimension 0, qui jouit ainsi également de la propriété β. L'ensemble H étant une image continue de E et les deux ensembles étant de dimension 0, il existe d'après mon théorème cité un ensemble linéaire T homéomorphe à E et une fonction continue $\psi(x)$ de variable réelle, satisfaisant à l'équation $H=\psi(T)$. Si T jouissait de la propriété (C), l'ensemble H en jouirait également (d'après le théorème cité de M. Szpilrajn), ce qui n'est pas le cas. Donc l'ensemble T (en tant que homéomorphe à E) jouit de la propriété β, sans jouir de la propriété (C), c. q. f. d.

[1]) C. R. Soc. Sc. Varsovie **30** (1937), p. 10.

[2]) Fund. Math. **15**, p. 127, Lemme.

[3]) Comme l'a démontré M. E. Szpilrajn (Fund. Math. **1**, Nouvelle Edition 1937, *Annexe*, p. 250), pour qu'un ensemble linéaire E jouisse de la propriété β, il faut et il suffit que tout ensemble linéaire homéomorphe à E soit de mesure lebesguienne nulle.

[4]) Fund. Math. **26**, p. 261.

Quant à la propriété (C), il est à remarquer que la propriété topologique (P) suivante entraîne la propriété (C) et même la propriété (C') de M. Rothberger[1]):

Nous dirons qu'un ensemble linéaire E jouit de la *propriété* (P) s'il existe un sous-ensemble dénombrable D de E tel que, pour tout ensemble Q ouvert dans E et contenant D, l'ensemble $E-Q$ est au plus dénombrable[2]).

Nous ne savons pas (même à l'aide de l'hypothèse du continu) résoudre la question si la propriété (P) est équivalente à la propriété (C). Si c'était le cas, la réponse au problème $\boldsymbol{P}_1$ (donc aussi au problème $\boldsymbol{P}_2$) serait affirmative. Or, comme on voit sans peine, la propriété (P) est incompatible avec la propriété λ [3]). Donc, si les propriétés (P) et (C) sont équivalentes, il n'existe aucun ensemble linéaire jouissant à la fois des propriétés (C) et λ; alors, on pourrait en tirer (à l'aide de l'hypothèse du continu) qu'une somme d'un ensemble linéaire à propriété λ et d'un ensemble dénombrable jouit encore de cette propriété. Aussi, le problème s'il en est toujours ainsi reste ouvert.

[1]) Voir Fund. Math. **30**, p. 50.

[2]) Cf. A. S. Besicovitch, Acta Math. **62** (1934), p. 289.

[3]) On dit qu'un ensemble (métrique) E jouit de la propriété λ, lorsque chaque sous-ensemble dénombrable de E est un G_δ relativement à E. Voir C. Kuratowski, Fund. Math. **21**, p. 127.

Sur un problème concernant les fonctions projectives.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Appelons *projective* toute fonction d'une variable réelle $f(x)$ dont l'image géométrique est un ensemble projectif (ou bien — ce qui revient au même — telle que l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x)>c]$ est un ensemble projectif, quel que soit le nombre réel c).

M. C. Kuratowski a attiré l'attention sur l'intérêt d'étudier la question si, *étant donné un ensemble projectif E de puissance du continu, il existe une fonction projective établissant une correspondance biunivoque entre l'ensemble X de tous les nombres réels et l'ensemble E* [1]).

Je vais démontrer que *la réponse est positive dans l'hypothèse supplémentaire que E contient un ensemble P parfait.*

Soit, en effet, $\varphi(x)$ une fonction de Baire (de classe 1) à valeurs distinctes et telle que $\varphi(X)=P$. Posons $H=X-E$ et

$$Q=H+\varphi(H)+\varphi\varphi(H)+\varphi\varphi\varphi(H)+\dots \tag{1}$$

Soit $f(x)$ la fonction d'une variable réelle définie comme il suit:

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pour } x\in Q\\ x & \text{pour } x\in X-Q.\end{cases} \tag{2}$$

[1]) Il est à remarquer que, si E est un ensemble *borelien* de puissance du continu, il existe une *fonction de Baire* (une homéomorphie généralisée) qui établit la correspondance en question. Voir N. Lusin, *Ensembles analytiques*, Chap. II, C. Kuratowski, Fund. Math. 22 (1934), p. 216 et F. Hausdorff, Fund. Math. 29 (1937), p. 151.