Eine Verschärfung der Eigenschaft C.

Von

Fritz Rothberger (Wien).

Im Zusammenhange mit dem Problem von Herrn Sierpiński[1]), betreffend die topologische Invarianz der Eigenschaft $\mathbf{C}$, definiere ich im folgenden eine Eigenschaft $\mathbf{C}'$, welche stärker (d. h. genauer: stärker oder gleichwertig) ist als $\mathbf{C}$, und welche gegenüber stetigen Transformationen invariant ist. Das Problem der Invarianz von $\mathbf{C}$ gegenüber stetigen Transformationen führe ich auf die Frage zurück, ob $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}'$ ist.

Sei X ein metrischer Raum, der eine Summe abzählbar vieler totalbeschränkter[2]) Teile ist (insbesondere: eine Menge von reellen Zahlen); sei ferner in X ein System von offenen Mengen $U_n(x)$ ($x \epsilon X$ und $n=1,2,\ldots$) gegeben, das folgenden Bedingungen genügt:

(a) bei festem n gibt es im System nur endlich viele verschiedene $U_n(x)$: $U_n(x'), U_n(x''), \ldots, U_n(x^{(k_n)})$;

(b) $x \epsilon U_n(x)$ für jedes $x \epsilon X$ und $n=1,2,\ldots$,

sodass $X=\sum\limits_x U_n(x)$ für $n=1,2,..$

Definition 1. Wir sagen, X habe die *Eigenschaft* $\mathbf{C}'$, oder $X \epsilon \mathbf{C}'$, wenn sich aus jedem beliebigen System von offenen Mengen, welches (a) und (b) erfüllt, eine Teilfolge (sozusagen eine „Diagonalfolge") $U_n(x_n)$ herausgreifen lässt, sodass

$$(1) \qquad X=\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_n).$$

---

[1]) Fundam. Math. **25**, p. 579. Wegen der Definition von $\mathbf{C}$ vgl. W. Sierpiński, *Hypothèse du Continu*, Monografie Matematyczne IV, Warszawa-Lwów 1934, p. 37. Bei E. Borel, Bull. Soc. Math. de France, **47** (1919), p. 122, heisst diese Eigenschaft: *mesure asymptotique inférieure à toute série donnée à l'avance.*

[2]) Eine Menge heisst *totalbeschränkt*, wenn sie sich für jedes $\varepsilon > 0$ als Summe endlich vieler Mengen von Durchmessern $< \varepsilon$ darstellen lässt.

Ein Raum hat bekanntlich die Eigenschaft $\mathbf{C}$[1]), wenn es zu jeder Folge positiver Zahlen $\{a_n\}$ eine Mengenfolge $\{A_n\}$ gibt, die der Bedingung genügt:

$$(\mathrm{c}) \qquad X=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{ mit Durchmessern } \delta(A_n) \leqslant a_n.$$

Satz 1. *Ist* $X \epsilon \mathbf{C}'$, *so ist* $X \epsilon \mathbf{C}$.

Beweis. 1^0 Sei zunächst $X \epsilon \mathbf{C}'$ totalbeschränkt. Für jede Folge $\{a_n\}$ von positiven Zahlen gibt es dann ein System $U_n(x)$, welches ausser (a) und (b) noch die Bedingung $\delta(U_n(x)) < a_n$ erfüllt. Wenn wir also in (1) $U_n(x_n)=A_n$ setzen, ist (c) erfüllt und somit $X \epsilon \mathbf{C}$.

2^0 Sei nun allgemein $X=\sum X_\nu \epsilon \mathbf{C}'$, wo die X_ν totalbeschränkt sind, also auch deren abgeschlossene Hüllen $\overline{X}_\nu$. Sei, für vorgegebenes ν, $U_n^\nu(x)$ ein System von in $\overline{X}_\nu$ offenen Mengen, welche (a) und (b) bezüglich $\overline{X}_\nu$ erfüllen. Setzen wir:

$$U_n(x)=\begin{cases} U_n^\nu(x)+(X-\overline{X}_\nu) & \text{für} \quad x \epsilon \overline{X}_\nu, \\ X-\overline{X}_\nu & \text{für} \quad x \epsilon (X-\overline{X}_\nu). \end{cases}$$

Für die $U_n(x)$ gilt dann (a), (b) und folglich (1), woraus $\overline{X}_\nu=\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^\nu(x_n)$ folgt. Daher ist $\overline{X}_\nu \epsilon \mathbf{C}'$, somit nach 1^0 $\overline{X}_\nu \epsilon \mathbf{C}$ und (wegen der Additivität von $\mathbf{C}$) $X \epsilon \mathbf{C}$, w. z. b. w.

Hilfssatz. *Ist X eine Menge von reellen Zahlen, dann entsteht* $\mathbf{C}$ *aus* $\mathbf{C}'$, *wenn man in Def.* 1 *die* $U_n(x)$ *noch der weiteren Forderung unterwirft:*

$$(\mathrm{d}) \qquad U_n(x)=X \cdot I_n(x),$$

wo die $I_n(x)$ offene Intervalle sind.

Beweis. Einerseits zeigt man, wie für Satz 1, dass wenn X die veränderte Definition befriedigt, $X \epsilon \mathbf{C}$ ist. Sei andererseits $X \epsilon \mathbf{C}$ und sei $U_n(x)$ ein (a), (b) und (d) erfüllendes System. Setzen wir in (c)

$$a_n=\min_{\nu \leqslant 2n,\, x \epsilon X} \delta(U_\nu(x)),$$

so gibt es zu jedem A_n zwei Intervalle $I_{2n-1}(x'_{2n-1})$ und $I_{2n}(x'_{2n})$, sodass

$$(2) \qquad A_n \subset I_{2n-1}(x'_{2n-1})+I_{2n}(x'_{2n}).$$

Dies folgert man aus dem einleuchtenden Satz:

Gegeben sei eine Menge reeller Zahlen A und drei Intervalle I^k ($k=1,2,3$), deren Länge $\delta(I^k) \geqslant \delta(A)$ ist. Dann gilt mindestens eine der sechs Inklusionen: $A \cdot I^k \subset I^l$ ($k,l=1,2,3$; $k \neq l$).

Denn wegen (b) und (d) ist $A_n = \sum_{x \in X} A_n I_\nu(x)$, $\nu \leqslant 2n$, wobei wegen (a) die Summe rechts endlich ist. Durch wiederholte Anwendung obiges Satzes erhält man hieraus eine Summe von höchstens zwei Summanden:

$$A_n = A_n \cdot I_\nu(x'_\nu) + A_n \cdot I_\nu(x''_\nu) \qquad (\nu \leqslant 2n).$$

Fassen wir hier insbesondere die Fälle $\nu = 2n - 1$ und $\nu = 2n$ ins Auge, so erhalten wir leicht (2).

Hieraus folgt wegen (c) $X \subset \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x'_n)$ und somit die Existenz einer (1) erfüllenden Diagonalfolge.

Satz 2. *Die Eigenschaft* $\mathbf{C}'$ *ist eine Invariante gegenüber stetigen Transformationen.*

Beweis. Es sei wieder $X \epsilon \mathbf{C}'$, sei ferner $y = f(x)$ eine auf X definierte stetige Funktion und $Y = f(X)$. Ausserdem sei ein System von offenen Mengen $V_n(y)$ gegeben, welches die zu (a) und (b) analogen Bedingungen für $y \epsilon Y$ erfüllt.

Wir haben nur zu zeigen, dass es eine Folge $V_n(y_n)$ gibt, sodass

$$Y = \sum_n V_n(y_n). \tag{3}$$

Wir setzen $f^{-1}(V_n(f(x))) = U_n(x)$. Wegen der Stetigkeit von $f(x)$ sind die $U_n(x)$ offene, (a) und (b) erfüllende Mengen. Es gibt also eine „Diagonalfolge" (1). Daher ist

$$Y = f(X) = f(\sum_n U_n(x_n)) = \sum_n f(U_n(x_n)) = \sum_n V_n(f(x_n)).$$

Hieraus folgt (3), wenn wir $f(x_n) = y_n$ setzen, w. z. b. w.

Satz 3. *Folgende zwei Aussagen sind äquivalent:*

I. *Die Eigenschaften* $\mathbf{C}$ *und* $\mathbf{C}'$ *sind gleichwertig.*

II. $\mathbf{C}$ *ist eine Invariante gegenüber stetigen Transformationen.*

Beweis. Aus I und Satz 2 folgt II unmittelbar; wir haben daher nur zu zeigen, dass aus *non* I, umgekehrt, *non* II folgt. Zu diesem Zwecke genügt es, für einen beliebig vorgegebenen Raum X *non* $\epsilon\, \mathbf{C}'$ die Existenz einer stetigen Funktion $f(x)$ nachzuweisen, welche X in eine Menge $f(X)$ *non* $\epsilon\, \mathbf{C}$ überführt.

Es sei daher $X \epsilon \mathbf{C}$, aber X *non* $\epsilon\, \mathbf{C}'$. Aus der ersteren dieser Relationen folgt nach einem Satze von Herrn Szpilrajn [3]), dass X 0-dimensional ist; aus der letzteren folgt die Existenz eines Systems von offenen Mengen $U_n(x)$, welches (a) und (b) erfüllt, für das es aber keine Diagonalfolge gibt, welche (1) erfüllt. D. h.:

$$\sum_n U_n(x_n) \neq X \quad \text{für beliebige} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{4}$$

Nach einem Satze über Zerlegungen 0-dimensionaler Räume [4]) können die $U_n(x)$ durch offene Teilmengen $U'_n(x)$ ersetzt werden, die denselben Bedingungen genügen, aber für gleiches n paarweise disjunkt sind. Nun setzen wir $U''_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} U'_\nu(x)$. Für die $U''_n(x)$ gilt gleichfalls (a), (b) und (4), ferner haben wir für $n \geqslant m$:

$$\textit{entweder} \quad U''_n(x') \subset U''_m(x''), \qquad \textit{oder} \quad U''_n(x') \cdot U''_m(x'') = 0.$$

Es existiert daher, wie leicht ersichtlich, eine stetige Funktion $y = f(x)$, welche X auf eine beschränkte Menge von reellen Zahlen, Y, überführt, und zwar derart, dass disjunkte $U''_n(x)$ auf Teilmengen disjunkter reeller Intervalle $I_n(y)$ abgebildet werden. $f(x)$ genügt also, genauer gesagt, folgenden Bedingungen: $f(U''_n(x)) \subset I_n(f(x))$, $I_n(f(x')) = I_n(f(x''))$ für $U''_n(x') = U''_n(x'')$, und schliesslich:

$$f^{-1}(Y \cdot I_n(f(x))) = U''_n(x). \tag{5}$$

$f(x)$ ist nun die gesuchte Funktion, für welche $f(X)$ *non* $\epsilon\, \mathbf{C}$. Denn das System der $I_n(y)$ genügt den Bedingungen (a), (b) und (d) bezüglich $f(X)$; wäre nun $f(X) \epsilon \mathbf{C}$, so gäbe es (vgl. Hilfssatz) eine „Diagonalfolge" $I_n(f(x_n))$, für welche

$$f(X) \subset \sum_n I_n(f(x_n))$$

und wir hätten nach (5):

$$X \subset \sum_n U''_n(x_n) \subset \sum_n U_n(x_n),$$

im Widerspruch mit (4), w. z. b. w.

Unter Zugrundelegung der Kontinuumhypothese folgt die Existenz einer nicht abzählbaren Menge reeller Zahlen mit der Eigenschaft $\mathbf{C}'$ aus folgendem

Satz 4 [5]). *Jede Menge mit der Eigenschaft* ($\mathbf{v}$) (*und a fortiori jede mit der Eigenschaft* $\mathbf{L}$) *hat die Eigenschaft* $\mathbf{C}'$.

---

[3]) E. Szpilrajn, Fundam. Math. **28**, p. 85.

[4]) Siehe etwa C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne III, p. 122, Théorème III.

[5]) Vgl. hiezu W. Sierpiński, loc. cit., p. 39, Théorème I.

Eine Punktmenge hat bekanntlich die *Eigenschaft* (**v**), wenn jede auf ihr nirgendsdichte Teilmenge abzählbar ist. (Wenn die Menge ausserdem „überall von zweiter Kategorie" ist, hat sie die *Eigenschaft* **L** [6])).

Beweis. Sei $X\epsilon(\mathbf{v})$; ferner sei $U_n(x)$ ein System von offenen Mengen wie oben, welches (b) erfüllt, und sei schliesslich $\{x_{2n}\}$ eine Folge von Punkten von X, die eine in X dichte Menge bilden. Dann ist $X-\sum_n U_{2n}(x_{2n})$ eine höchstens abzählbare Menge, die wir in eine Folge $\{x_{2n-1}\}$ (deren Elemente nicht alle voneinander verschieden sein müssen) schreiben können. Daher ist

$$X=\sum_n U_n(x_n), \tag{1}$$

woraus $X\epsilon\mathbf{C}'$ folgt, w. z. b. w.

Da jede Baire'sche Funktion auf einer Menge mit der Eigenschaft (**v**) bei Vernachlässigung von abzählbar vielen Punkten stetig ist, folgt aus Satz 2 und 4, dass *jede Baire'sche Funktion jede Menge mit der Eigenschaft* (**v**) *in eine solche mit der Eigenschaft* **C'** *transformiert* [5]).

Die Frage bleibt jedoch offen, ob im allgemeinen die Eigenschaft **C'** gegenüber Transformationen vermöge Baire'scher Funktionen invariant ist.

Satz 5. *Die Eigenschaft* **C'** *ist absolut-additiv, d. h.: wenn* (für jedes n) $X_n\epsilon\mathbf{C}'$, *dann* $\sum_{n=1}^{\infty}X_n\epsilon\mathbf{C}'$.

Dies folgt direkt aus der Definition 1, analog wie für **C**, übrigens auch aus der Invarianz gegenüber stetigen Transformationen (Satz 2).

Die Frage, ob **C'** *erblich* ist (d. h. ob $A\epsilon\mathbf{C}'$ aus $A\subset B$ und $B\epsilon\mathbf{C}'$ folgt), bleibt offen.

Wenn man in der Definition 1 für die $U_n(x)$ die Bedingung (a) weglässt, erhält man daraus die Definition einer *Eigenschaft* **C''**, welche offenbar entweder stärker als **C'** oder mit **C'** gleichwertig ist.

Da sich die Beweise der Sätze 2, 4 und 5 fast wörtlich auf **C''** übertragen lassen, gelten hiefür auch die entsprechenden Sätze. Diese kann man folgendermassen zusammenfassen:

Satz 6. *Die Eigenschaft* **C''** *ist eine Invariante gegenüber stetigen Transformationen, daher auch absolut-additiv, und genügt (als Mengenklasse betrachtet) der folgenden Inklusion:*

$$\mathbf{L}\subset(\mathbf{v})\subset\mathbf{C}''\subset\mathbf{C}'\subset\mathbf{C}.$$

[6]) Dies kann als Definition von **L** dienen. Vgl. in diesem Zusammenhange: W. Sierpiński, loc. cit., p. 37, und C. Kuratowski et W. Sierpiński, Fundam. Math. **26**, p. 137, wo sich auch die Definition von (**v**) befindet.

Definition 2 [7]). Wir sagen, ein separabler metrischer Raum habe die *Eigenschaft* **M'**, wenn es zu jeder Folge reeller Zahlen $\{a_k\}$ und zu jedem System von Umgebungen $U_n(x)$, das den Bedingungen genügt:

$$x\epsilon U_n(x) \quad \text{für} \quad n=1,2,\ldots \quad \text{und jedes} \quad x\epsilon X,$$

und

$$\lim_{n=\infty} U_n(x)=\{x\}, \tag{6}$$

eine Teilfolge $U_{n_k}(x_k)$ gibt (die n_k brauchen hier nicht voneinander verschieden zu sein), sodass:

$$\delta(U_{n_k}(x_k))<a_k \quad \text{und} \quad X=\sum_k U_{n_k}(x_k). \tag{7}$$

Wie leicht ersichtlich, ist **M'** eine Verschärfung der Eigenschaft **M** von K. Menger [8]). Es gilt der

Satz 7. *Ist* $X\epsilon\mathbf{C}''$, *so ist* $X\epsilon\mathbf{M}'$.

Denn wegen (6) gibt es für jedes x eine Umgebung $U_{k_n}(x)$, sodass $\delta(U_{k_n}(x))<a_n$, und wegen $X\epsilon\mathbf{C}''$ enthält das System der $U_{k_n}(x)$ eine „Diagonalfolge" $U_{k_n}(x_n)$, welche der Bedingung (7) genügt.

Das Problem der Umkehrung dieses Satzes bleibt auch offen, ebenso wie das der Beziehung zwischen **C'** und **M'**.

[7]) Diese Definition verdanke ich Herrn W. Sierpiński.
[8]) Wegen der Definition von **M** siehe W. Sierpiński, loc. cit., p. 48.

Warschau, im Dezember 1937.