Remarques sur les transformations continues des espaces métriques.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

(Extrait d'une lettre adressée à M. F. Hausdorff).

Voici quelques remarques concernant les résultats contenus dans votre Note „*Erweiterung einer stetigen Abbildung*“, parue dans ce volume.

1. *Soit f une transformation continue d'un espace métrique $\mathcal{X}$ en un espace métrique $\mathcal{Y}$. Désignons par $\mathcal{L}$ un espace linéaire (vectoriel normé) contenant topologiquement $\mathcal{X}$ (p. ex. l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur $\mathcal{X}$* [1]*) et par $\mathcal{E}$ l'espace des nombres réels. A chaque sous-ensemble fermé F de $\mathcal{X}$ correspond alors une transformation continue g de $\mathcal{X}$ en un sous-ensemble du produit cartésien $\mathcal{Y}\times\mathcal{E}\times\mathcal{L}$ qui coïncide avec f sur F et qui est une homéomorphie sur $\mathcal{X}-F$.*

A savoir, g est la fonction définie pour chaque $x\in\mathcal{X}$ par l'égalité

$$g(x)=[f(x),\, \delta(x), x\cdot\delta(x)],$$

$\delta(x)$ désignant la distance du point x à l'ensemble F, $\mathcal{Y}$ étant identifié avec l'„axe“ $\mathcal{Y}\times 0\times 0$ et $\mathcal{X}$ étant considéré comme sous-ensemble de $\mathcal{L}$.

Démonstration. On a d'abord, pour $x\in F$, l'égalité $\delta(x)=0$, d'où $g(x)=[f(x),0,0]$. Puis, la fonction g est biunivoque sur $\mathcal{X}-F$, car la condition $g(x)=g(x')$ entraîne les égalités $\delta(x)=\delta(x')$ et $x\cdot\delta(x)=x'\cdot\delta(x')$ et, comme $\delta(x)\neq 0$ pour $x\in\mathcal{X}-F$, il vient $x=x'$.

[1]) Voir ma note des Fund. Math. 25 (1935), p. 543.

Enfin, la fonction g est une homéomorphie sur $\mathcal{X}-F$. En effet, la condition $\lim g(x_n)=g(x)$ entraîne

$$\lim\delta(x_n)=\delta(x) \qquad \text{et} \qquad \lim x_n\cdot\delta(x_n)=x\cdot\delta(x).$$

En supposant que $g(x)\in g(\mathcal{X}-F)$, on a $\delta(x)\neq 0$, d'où $\delta(x_n)\neq 0$ pour n suffisamment grand et par conséquent

$$\lim x_n=\lim\frac{x_n\cdot\delta(x_n)}{\delta(x_n)}=\frac{\lim x_n\cdot\delta(x_n)}{\lim\delta(x_n)}=x.$$

2. De là résulte facilement un cas particulier de votre théorème, à savoir:

Soit f_0 une transformation continue d'un sous-ensemble fermé F de l'espace métrique $\mathcal{X}$ en l'espace métrique séparable $\mathcal{S}=f_0(F)$. $\mathcal{Y}$ désignant l'espace de Hilbert, il existe une transformation continue de l'espace $\mathcal{X}$ tout entier en un sous-ensemble du produit cartésien $\mathcal{Y}\times\mathcal{E}\times\mathcal{L}$ qui coïncide avec f_0 sur F et qui est une homéomorphie sur $\mathcal{X}-F$.

En effet, en considérant $\mathcal{S}$ comme sous-ensemble de $\mathcal{Y}$ et en désignant par f une extension continue de la fonction f_0 (telle que $f(\mathcal{X})\subset\mathcal{Y}$), on définit g comme auparavant.

Bien entendu, au lieu de supposer que l'espace $\mathcal{S}$ est séparable, on peut admettre qu'il en est ainsi de l'espace $\mathcal{X}$, puisqu'une image continue d'un espace métrique séparable est toujours séparable.

3. Le cas particulier où la fonction f_0 est constante sur F se prête à des applications fréquentes. Il signifie que, *étant donné dans un espace $\mathcal{X}$ un sous-ensemble fermé F, on peut réduire F en un seul point par une transformation continue qui est une homéomorphie sur $\mathcal{X}-F$.* En supposant l'espace $\mathcal{X}$ séparable, on obtient directement ce théorème par la méthode des décompositions semi-continues: $\mathcal{X}$ étant supposé immergé dans l'espace compact $\mathcal{Y}$ de Hilbert, la décomposition de $\mathcal{Y}$ en points individuels de $\mathcal{Y}-\overline{F}$ et en $\overline{F}$ (où $\overline{F}$ désigne la fermeture de F dans $\mathcal{Y}$) est semi-continue; il existe par conséquent une fonction continue g définie sur $\mathcal{Y}$, constante sur $\overline{F}$ et biunivoque sur $\mathcal{Y}-\overline{F}$; comme $\overline{F}\cdot\mathcal{X}=F$, la fonction g transforme $\mathcal{X}$ de la façon demandée.