Erweiterung einer stetigen Abbildung.

Von

F. Hausdorff (Bonn).

Der metrische Raum E werde durch $\bar{u}=f(u)$ stetig auf den metrischen Raum $\bar{E}$ abgebildet. Es sei uv die Entfernung zweier Punkte u, v in E und $\overline{uv}$ die Entfernung ihrer Bilder $\bar{u}$, $\bar{v}$ in $\bar{E}$; bei gegebener Abbildung ist $\overline{uv}$ eine gegebene Funktion von u, v mit den Eigenschaften:

(α) $\overline{uv}=\overline{vu}\geqslant 0, \qquad \overline{uu}=0;$

(β) $\overline{uv}+\overline{vw}\geqslant\overline{uw};$

(γ) $\overline{uv}\to 0$, falls $v\to u$ (d. h. $uv\to 0$ bei festem u).

Wenn umgekehrt für die Punktpaare u, v von E eine Funktion $\overline{uv}$ mit diesen Eigenschaften gegeben ist, so bestimmt sie eine stetige Abbildung von E auf einen (bis auf Isometrie bestimmten) metrischen Raum $\bar{E}$, mit $\overline{uv}$ als Entfernung der Bildpunkte von u, v. Denn da die Relation $\overline{uv}=0$ nach (α, β) reflexiv, symmetrisch und transitiv, also vom Charakter einer Gleichheitsbeziehung ist, so kann man in abstracto jedem u ein Element $\bar{u}=f(u)$ mit der Vorschrift

$$[\bar{u}=\bar{v}]=[\overline{uv}=0]$$

zuordnen und in der Menge $\bar{E}$ dieser Elemente $\overline{uv}$ als Entfernung von $\bar{u}, \bar{v}$ definieren. Man kann speziell den Raum E auf Grund der Relation $\overline{uv}=0$ in disjunkte Klassen (Schichten, tranches) spalten und unter $\bar{u}=f(u)$ die den Punkt u enthaltende Klasse verstehen.

Ist $F\subset E$ und eine stetige Abbildung von F auf den metrischen Raum $\bar{F}$ gegeben, also für $u, v\,\epsilon\, F$ eine den Bedingungen (α, β, γ) genügende Funktion $\overline{uv}$ erklärt, so erhält man eine *Erweiterung*

dieser Abbildung zu einer stetigen Abbildung von E auf einen geeigneten metrischen Raum $\bar{E}\supset\bar{F}$, wenn man für die Punktpaare von E eine den Bedingungen (α, β, γ) genügende Funktion $\overline{uv}$ finden kann, die für die Punktpaare von F mit der vorgegebenen übereinstimmt. Es ist klar, was dabei unter $\bar{E}\supset\bar{F}$ zu verstehen ist: bei der abstrakten Definition von $\bar{E}$ sind die schon vorhandenen Elemente von $\bar{F}$ beizubehalten, und wenn man speziell die Schichten von E als Elemente von $\bar{E}$ benutzt, so bilden die Schichten, welche Punkte von F enthalten, einen mit $\bar{F}$ isometrischen Raum $\subset\bar{E}$.

Nach diesen einfachen Vorbemerkungen wollen wir die Sätze beweisen:

I. *Eine stetige Abbildung der im metrischen Raum E abgeschlossenen Menge F auf den metrischen Raum $\bar{F}$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung f von E auf einen geeigneten metrischen Raum $\bar{E}\supset\bar{F}$ erweitern.*

II. *Diese Erweiterung ist insbesondere so möglich, dass $\bar{F}$ in $\bar{E}$ abgeschlossen ist und $E-F$ topologisch auf $\bar{E}-\bar{F}$ abgebildet wird.*

III. *Eine topologische Abbildung von F lässt sich zu einer topologischen Abbildung von E erweitern*[1]).

Beim Beweise mögen bedeuten:

a, b, c, p, q	Punkte von F,
x, y	Punkte von $E-F=G$,
u, v, w	Punkte von E.

$\delta(u)=\inf\limits_{a} au$ sei die untere Entfernung des Punktes u von F.

Überzeugen wir uns zunächst, dass zur Richtigkeit von I die Existenz einer reellen Funktion $\varphi(a, u)$ (die also in dem Produktraum (F, E) definiert ist) mit den Eigenschaften

$$(1) \qquad \varphi(a, b)=\overline{ab}$$

$$(2) \qquad \psi(u, v)=\sup_{a}|\varphi(a, u)-\varphi(a, v)|<\infty$$

$$(3) \qquad \psi(u, v)\to 0 \quad \text{für} \quad v\to u$$

notwendig und hinreichend ist.

[1]) Vgl. meine Arbeit: *Erweiterung einer Homöomorphie*, Fund. Math. **16** (1930), p. 353-360, von der die gegenwärtige eine Vereinfachung und Verallgemeinerung ist.

Notwendig: wenn eine Erweiterung von $\overline{ab}$ zu $\overline{uv}$ vorhanden ist, so ist $\varphi(a,u)=\overline{au}$ eine Funktion, die (1,2,3) erfüllt; in der Tat haben wir dann $\psi(u,v)=\sup\limits_a|\overline{au}-\overline{av}|\leqslant\overline{uv}$ und (3) ist Folge von (γ).

Hinreichend: wenn $\varphi(a,u)$ eine den Bedingungen (1, 2, 3) genügende Funktion ist, so ist $\psi(u,v)$ eine Funktion, die, für $\overline{uv}$ gesetzt, die Bedingungen (α,β,γ) erfüllt und auf Grund von (1), (2)

(4) $$\psi(b,c)=\sup_a|\overline{ab}-\overline{ac}|=\overline{bc}$$

liefert, sodass $\overline{uv}=\psi(u,v)$ einen zulässigen Raum $\bar{E}$ definiert und damit I bewiesen ist.

Aber auch zum Beweise von II ist die Existenz einer solchen Funktion $\varphi(a,u)$ hinreichend. Hierzu betrachten wir die Funktion

(5) $$\delta(u,v)=\min[uv,\ \delta(u)+\delta(v)],$$

die (für $\overline{uv}$ gesetzt) die Bedingungen (α,β,γ) erfüllt [1]) und übrigens die einfache Bedeutung hat, F auf einen einzigen Punkt und $G=E-F$ topologisch abzubilden, wie man aus dem Folgenden (im speziellen Fall $\varphi(a,u)=0$) sofort entnimmt. Nun erfüllt

(6) $$\overline{uv}=\max[\psi(u,v),\ \delta(u,v)]$$

die Bedingungen (α,β,γ) und wegen (4) und $\delta(b,c)=0$ stimmt $\overline{uv}$ in F mit der gegebenen Funktion $\overline{bc}$ überein. Diese Erweiterung hat aber die in II verlangten Eigenschaften. Denn es ist

$$\overline{ax}\geqslant\delta(a,x)=\min[ax,\delta(x)]=\delta(x)>0,$$

sodass $\bar{x}=f(x)$ von $\bar{F}=f(F)$ positiven Abstand hat, d.h. $\bar{F}$ abgeschlossen ist. Weiter ist $\overline{xy}\geqslant\delta(x,y)>0$ für $x\neq y$, die Abbildung ist in G schlicht; sie ist überdies topologisch, denn wenn (bei festem x) $\overline{xy}\to0$, so auch $\delta(x,y)\to0$ und, da $\delta(x)+\delta(y)>\delta(x)$ nicht nach 0 konvergiert, muss $xy\to0$ sein.

Demnach ist zum Beweise von I, II nur eine Funktion $\varphi(a,u)$ gemäss (1,2,3) zu konstruieren. Bezüglich der u,v in (2) und (3) ist der Fall, dass beide zu F gehören, bereits durch (4) erledigt, sodass wir nur noch Punktpaare aus (G,G) oder (F,G) zu betrachten haben. D.h. es ist, indem wir (1) festhalten, nur noch eine (in (F,G) definierte) Funktion $\varphi(a,x)$ zu konstruieren mit den Eigenschaften:

[1]) Bezüglich der Dreiecksungleichung (β) vgl. Fund. Math. **16**, p. 354.

$$A\begin{cases}(2)\quad \psi(x,y)=\sup\limits_a|\varphi(a,x)-\varphi(a,y)|<\infty,\\ (3)\quad \psi(x,y)\to0 \quad\text{für}\quad y\to x,\end{cases}$$

$$B\begin{cases}(2)\quad \psi(b,x)=\sup\limits_a|\varphi(a,x)-\varphi(a,b)|<\infty,\\ (3)\quad \psi(b,x)\to0 \quad\text{für}\quad x\to b\end{cases}$$

($b\to x$ kommt wegen der Abgeschlossenheit von F nicht in Frage). Wir können, indem wir E durch einen homöomorphen Raum ersetzen, E als beschränkt annehmen; der Durchmesser von E sei $\frac{1}{2}$.

Erweiterung einer reellen stetigen Funktion $\Phi(p)$. $\Phi(p)$ sei in F definiert, stetig, reell und *nach unten beschränkt*; setzen wir dann

(7) $$\Phi(x)=\inf_p\left[\Phi(p)+\frac{px}{\delta(x)}-1\right],$$

so ist $\Phi(u)$ eine in E definierte, stetige Erweiterung von $\Phi(p)$.

In der Tat: da

$$px\cdot\delta(y)-py\cdot\delta(x)=[px-py]\,\delta(y)+py\,[\delta(y)-\delta(x)]$$

absolut $\leqslant xy\cdot[\delta(y)+py]\leqslant xy$ ist, folgt $\left|\frac{px}{\delta(x)}-\frac{p(y)}{\delta(y)}\right|\leqslant\frac{xy}{\delta(x)\,\delta(y)}$, also

(8) $$|\Phi(x)-\Phi(y)|\leqslant\frac{xy}{\delta(x)\,\delta(y)};$$

für $y\to x$ ist $\delta(y)\to\delta(x)>0$, $\Phi(y)\to\Phi(x)$. Sodann ist, für $x\to b$, $\Phi(x)\to\Phi(b)$ zu beweisen. Wählen wir erstens einen (von x abhängigen) Punkt p mit $px<\delta(x)+\delta(x)^2$, so ist

$$\Phi(x)<\Phi(p)+\delta(x);$$

für $x\to b$ ist $\delta(x)\to0$, $px\to0$, also $pb\to0$, $\Phi(p)\to\Phi(b)$,

$$\overline{\lim}\,\Phi(x)\leqslant\Phi(b).$$

Zweitens wählen wir einen (wieder von x abhängigen) Punkt q mit

(9) $$\Phi(x)+\delta(x)>\Phi(q)+\frac{qx}{\delta(x)}-1.$$

Da gleichzeitig

$$\Phi(x)\leqslant\Phi(b)+\frac{bx}{\delta(x)}-1,$$

wird

$$\frac{qx}{\delta(x)}<\frac{bx}{\delta(x)}+[\Phi(b)-\Phi(q)]+\delta(x).$$

Während x und q variieren (b ist fest), ist $\Phi(q)$ nach unten beschränkt, sodass wir $\Phi(b)-\Phi(q)\leqslant C$ schreiben können mit festem C. Aus

$$qx < bx + C\delta(x) + \delta(x)^2$$

folgt dann für $x\to b$: $\delta(x)\to 0$, $qx\to 0$, $q\to b$ und aus (9), wo die rechte Seite $\geqslant \Phi(q)$ ist,

$$\underline{\lim}\, \Phi(x)\geqslant \Phi(b).$$

Hiermit ist die Stetigkeit der Erweiterungsfunktion $\Phi(u)$ gezeigt.

Spezialisierung von $\Phi(p)$. Über der Menge F bilden wir den linearen Raum L, bestehend aus den formalen Summen

$$s=\sum_a \lambda_a a \tag{10}$$

endlich vieler Punkte mit reellen Koeffizienten; λ_a ist eine reelle Funktion von a, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschieden ist. Ist ebenso

$$t=\sum_a \mu_a a,$$

so wird natürlich

$$s+t=\sum_a (\lambda_a+\mu_a)\, a$$

erklärt; L ist eine Abelsche Gruppe, additiv geschrieben. Für s sei $\lambda=\sum_a \lambda_a$ die „Koeffizientensumme", $\sigma=\sum_a |\lambda_a|$ die „absolute Koeffizientensumme". Wir bilden nun

$$\Phi(s,p)=\sum_a \lambda_a\, \overline{ap}; \tag{11}$$

diese Funktion von p ist bei beschränktem $\overline{F}$ beschränkt; bei unbeschränktem $\overline{F}$ ist sie dann und nur dann nach unten beschränkt, wenn $\lambda\geqslant 0$, denn $\Phi(s,p)-\lambda\overline{bp}=\sum_a \lambda_a(\overline{ap}-\overline{bp})$ ist beschränkt (absolut $\leqslant\sum_a |\lambda_a|\,\overline{ab}$). Als Funktion von s ist $\Phi(s,p)$ linear:

$$\Phi(s+t,p)=\Phi(s,p)+\Phi(t,p).$$

Ist $\Phi(s,p)$ nach unten beschränkt, so erweitern wir sie durch

$$\Phi(s,x)=\inf_p\left[\Phi(s,p)+\frac{px}{\delta(x)}-1\right] \tag{12}$$

zu einer stetigen Funktion $\Phi(s,u)$. Da

$$\Phi(s,p)-\Phi(s,b)=\sum_a \lambda_a(\overline{ap}-\overline{ab})$$

absolut $\leqslant\sigma\overline{bp}=\Phi(\sigma b,p)$ ist, haben wir

$$\Phi(-\sigma b,p)\leqslant\Phi(s,p)-\Phi(s,b)\leqslant\Phi(\sigma b,p);$$

von diesen beiden Ungleichungen enthält aber die linke eine Funktion $\Phi(-\sigma b,p)$, die nicht nach unten beschränkt zu sein braucht. Diese (nur für unbeschränktes $\overline{F}$ auftretende[1]) Schwierigkeit umgehen wir so: $t=\sum_a \mu_a a$ sei ein festes Hilfselement εL mit positivem $\mu=\sum_a \mu_a$ und s werde der Beschränkung $\sigma\leqslant\mu$ unterworfen ($\lambda\geqslant 0$ ist nun entbehrlich). Zu den letzten Ungleichungen oder

$$\Phi(-\mu b,p)\leqslant\Phi(s,p)-\Phi(s,b)\leqslant\Phi(\mu b,p)$$

addieren wir $\Phi(t,p)$, machen den Übergang von p zu x und subtrahieren dann wieder $\Phi(t,x)$. Also:

$$\Phi(t-\mu b,p)\leqslant\Phi(s+t,p)-\Phi(s,b)\leqslant\Phi(t+\mu b,p);$$

jetzt sind alle drei Funktionen von p nach unten beschränkt, also nach (12)

$$\Phi(t-\mu b,x)\leqslant\Phi(s+t,x)-\Phi(s,b)\leqslant\Phi(t+\mu b,x) \tag{13}$$

und wenn wir (ohne die Abhängigkeit von dem festen t auszudrücken)

$$\varphi(s,x)=\Phi(s+t,x)-\Phi(t,x) \tag{14}$$

setzen, was mit

$$\varphi(s,b)=\Phi(s+t,b)-\Phi(t,b)=\Phi(s,b)$$

zusammen eine stetige Funktion $\varphi(s,u)$ liefert:

$$\varphi(-\mu b,x)\leqslant\varphi(s,x)-\varphi(s,b)\leqslant\varphi(\mu b,x), \tag{15}$$

die beiden äusseren Glieder hängen von S (dessen absolute Koeffizientensumme aber $\leqslant\mu$ sein muss) nicht ab und konvergieren für $x\to b$ nach 0. Da überdies nach (8)

$$|\varphi(s,x)-\varphi(s,y)|\leqslant 2\,\frac{xy}{\delta(x)\,\delta(y)} \tag{16}$$

ist, so erfüllt $\varphi(s,x)$ die Bedingungen, die aus A,B entstehen, wenn man darin a durch s ersetzt und zu $\sup_s$ die Einschränkung $\sigma\leqslant\mu$

[1]) Für beschränktes $\overline{F}$ genügt $\varphi(a,x)=\Phi(a,x)$ zum Beweise von I, II.

hinzufügt. Ist insbesondere $s=a$ und $t=c$ ein fester Hilfspunkt von F, also:

$$\varphi(a,x)=\Phi(a+c,x)-\Phi(c,x), \qquad \varphi(a,b)=\overline{ab},$$

so erfüllt $\varphi(a,x)$ die Bedingungen A, B, womit I, II bewiesen sind.

Zum Beweise von III ist die Funktion (6) noch der *Ergänzungsbedingung* zu unterwerfen:

Wenn $\overline{ax}\to 0$ (bei festem a), ist auch $ax\to 0$.

Vermöge dieser wird die in F und G einzeln topologische Abbildung auch im ganzen Raum E topologisch. Da nach $B(2)$, S. 43, $\psi(b,x)\geqslant|\varphi(b,x)|$, also $\overline{ax}=\max[\psi(ax),\delta(a,x)]\geqslant\max[\varphi(a,x),\delta(x)]$ ist, wird die Ergänzungsbedingung sicher erfüllt, falls aus $\varphi(a,x)\to 0$ und $\delta(x)\to 0$ auch $ax\to 0$ folgt. Um dies zu erzielen, ändern wir das bisherige Verfahren nur dahin ab, dass wir von (13) (wie bisher $\sigma\leqslant\mu$ vorausgesetzt) nicht $\Phi(t,x)$, sondern

$$\frac{1}{2}\Phi(2t,x)=\inf_p\left[\Phi(t,p)+\frac{1}{2}\frac{px}{\delta(x)}-\frac{1}{2}\right]$$

subtrahieren, also

$$(14)^* \qquad \varphi(s,x)=\Phi(s+t,x)-\tfrac{1}{2}\Phi(2t,x)$$

setzen; (15), (16) und $\varphi(s,b)=\Phi(s,b)$ bleiben auch jetzt richtig. Wie in (9) gibt es einen von x (und s,t) abhängigen Punkt q mit

$$\Phi(s+t,x)+\delta(x)>\Phi(s+t,q)+\frac{qx}{\delta(x)}-1,$$

zugleich ist

$$\frac{1}{2}\Phi(2t,x)\leqslant\Phi(t,q)+\frac{1}{2}\frac{qx}{\delta(x)}-\frac{1}{2},$$

also

$$\varphi(s,x)+\delta(x)>\Phi(s,q)+\frac{1}{2}\frac{qx}{\delta(x)}-\frac{1}{2}.$$

Nehmen wir wieder $s=a$ und $t=c$, so ist

$$\varphi(a,x)+\delta(x)>\overline{aq}+\frac{1}{2}\frac{qx}{\delta(x)}-\frac{1}{2}.$$

Wenn bei festem a zugleich $\varphi(a,x)\to 0$ und $\delta(x)\to 0$, so folgt hieraus $\overline{aq}\to 0$, also $aq\to 0$ (wegen der Homöomorphie zwischen F und $\overline{F}$), ferner $\frac{qx}{\delta(x)}\to 1$, $qx\to 0$, $ax\to 0$, q. e. d.

Bemerken wir noch, dass wir E nur als metrischen Raum (also nicht als separabel oder gar kompakt) vorausgesetzt haben. Die Schichten von E, die wir als Elemente von $\overline{E}$ ansehen können, sind bei den Sätzen II, III die Schichten von F (die Urbilder der Punkte von $\overline{F}$) und die einzelnen Punkte von $G=E-F$. Ist E kompakt, so haben wir eine halbstetige Zerlegung von E und die Metrisierbarkeit des Überraumes $\overline{E}$ (nicht aber die Möglichkeit, die Metrik von $\overline{F}$ beizubehalten) folgt aus dem Urysohnschen Metrisationssatz. Die Beibehaltung der gegebenen Metrik von $\overline{F}$ ist für unseren Standpunkt wesentlich; der Satz III z. B. ist nur unter dieser Voraussetzung nicht trivial. Verzichtet man darauf, so gibt die folgende Note von Herrn Kuratowski im Falle eines separablen $\overline{F}$, das dann als Teilmenge des Hilbertschen Quaders angenommen werden kann, einen vereinfachten Beweis des Satzes II. Übrigens sei noch auf einen verwandten Satz[1]) hingewiesen, in dem $E-F$ zwar nicht topologisch, aber ohne Erhöhung der Dimension auf $\overline{E}-\overline{F}$ abgebildet wird.

[1]) C. Kuratowski, *Sur le prolongement des fonctions continues et les transformations en polytopes*, Fund. Math. **24** (1935), p. 259-268: th. 2, p. 266.